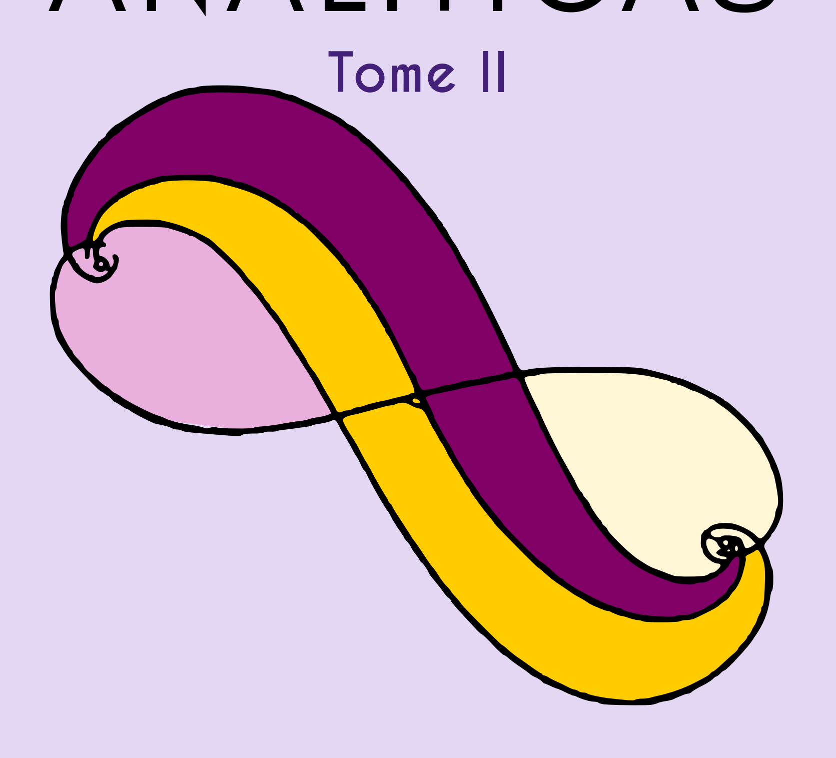
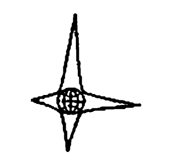
A. Markushevich

TEORIA DE LAS FUNCIONES ANALITICAS

Tome II



Editorial Mir Moscú



EDITORIAL MIR

А. И. МАРКУШЕВИЧ

ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ТОМ II ДАЛЬНЕЙШЕЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» МОСКВА

A. MARKUSHEVICH

TEORIA
DE LAS
FUNCIONES ANALITICAS

TOMO II

TRADUCIDO DEL RUSO

POR

EMILIANO APARICIO BERNARDO

CANDIDATO A DOCTOR EN CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS,

CATEDRATICO DE MATEMATICAS SUPERIORES

EDITORIAL MIR

MOSCU

1970

CDU 517.5=60

Impreso en la URSS

На испанском языке

INDICE

CAPITULO QUINTO

TRANSFORMACIONES CONFORMES. APLICACION A LOS PROBLEMAS DE LA APROXIMACION DE LAS FUNCIONES POR POLINOMIOS

CAPITULO SEXTO

FUNCIONES ARMONICAS Y SUBARMONICAS. EL SIGNIFICADO DE LAS FUNCIONES ANALITICAS EN LA HIDROMECANICA. FUNCIONES DE FORMA ACOTADA

CAPITULO SEPTIMO

FUNCIONES ENTERAS Y MEROMORFAS

CAPITULO OCTAVO

CONCEPTO DE SUPERFICIE DE RIEMANN. PROLONGACION ANALITICA

CAPITULO
QUINTO

TRANSFORMACIONES CONFORMES. APLICACION A LOS PROBLEMAS DE LA APROXIMACION DE LAS FUNCIONES POR POLINOMIOS

§ 1. TRANSFORMACIONES MEDIANTE FUNCIONES ANALITICAS. CRITERIO DE UNIVALENCIA

1.1. Dediquémonos al estudio de las transformaciones realizadas por funciones analíticas.

Teorema de la conservación del recinto en las transformaciones analíticas. *Si $f(z) \not\equiv$ const es una función analítica en un recinto G a excepción, posiblemente, de polos, entonces la imagen $f(G)$ de este recinto también es un recinto del plano ampliado.*

Obsérvese que, sin duda, la imagen $f(G)$ es conexa, pues, si L es una curva continua que une los puntos z_1 y z_2 del recinto G y pertenece a G, entonces su imagen $f(L)$ también es una curva continua (del plano ampliado) que une $f(z_1)$ con $f(z_2)$ y pertenece a $f(G)$. O sea, $f(G)$ es un conjunto conexo (véase el ap. 4.1 del cap. primero). No queda más que demostrar que cada punto $w_0 = f(z_0)$, donde $z_0 \in G$, es un punto interior del conjunto $f(G)$.

Supongamos primero que $z_0 \neq \infty$ y $w_0 \neq \infty$. Examinemos un círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant \rho_0$, perteneciente al recinto G, de un radio tan pequeño que en todos sus puntos, distintos de z_0, los valores de $f(z)$ sean distintos de $w_0 = f(z_0)$. Designando con γ_0 la circunferencia $|z - z_0| = \rho_0$, tendremos que su imagen $f(\gamma_0)$ en el plano w estará situada a una distancia positiva δ del punto w_0, donde $\delta = \min\limits_{z \in \gamma_0} |f(z) - f(z_0)|$.

Demostremos que el entorno $|w - w_0| < \delta$ del punto w_0 pertenece completamente al conjunto $f(G)$. De aquí se deducirá que w_0 es un punto interior de este conjunto.

Sea w_1 un punto arbitrario del entorno indicado: $|w_1 - w_0| < \delta$. Entonces, en los puntos de la circunferencia γ_0 tendremos:

$$|f(z) - w_0| > |w_0 - w_1|$$

y, por consiguiente, según el teorema de Rouché (véase el ap. 3.5 del cap. cuarto), las ecuaciones

$$f(z)-w_0=0 \quad \text{y} \quad (f(z)-w_0)+(w_0-w_1)=f(z)-w_1=0$$

tienen una misma cantidad de raíces en el interior de γ_0. Pero $f(z)-w_0=0$ tiene al menos una raíz en el interior de γ_0 ($z=z_0$). Por consiguiente, la ecuación $f(z)-w_1=0$ también tiene al menos una raíz en el interior de γ_0, es decir, existe en el entorno de z_0 un punto z_1 tal que $f(z_1)=w_1$. Así, pues, w_1 pertenece a $f(G)$, con lo cual se termina la demostración para el caso en que z_0 y $w_0=f(z_0)$ son puntos finitos.

Cuando $z_0=\infty$ y $w_0\neq\infty$, recurrimos a la transformación auxiliar $\zeta=1/z$, la cual realiza una transformación biunívoca y continua de un entorno del punto del infinito en un entorno del origen de coordenadas; además, la función $f(z)$, que es analítica en un entorno de $z_0=\infty$, se sustituye por la función $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)=f^*(\zeta)$, que es analítica en un entorno de $\zeta=0$ y toma aquí los mismos valores que toma la función $f(z)$ en el entorno del punto del infinito. Como el punto $f^*(0)=f(\infty)=w_0$ es interior para el conjunto de los valores $f^*(\zeta)$, esto mismo punto será interior también para $f(G)$.

Cuando $z_0\neq\infty$ y $w_0=\infty$, $f(z)$ tiene un polo en el punto z_0 y, por consiguiente, la función $t=\frac{1}{f(z)}$ tiene aquí un cero. Aplicando la proposición demostrada a la función $\frac{1}{f(z)}$ y al punto z_0, hallamos que $t=0$ — que es el valor de $\frac{1}{f(z)}$ en el punto z_0 — es un punto interior para el conjunto de los valores $\frac{1}{f(z)}$. Pero, como la transformación auxiliar $t=\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{w}$ transforma biunívoca y continuamente el entorno del punto $t=0$ en un entorno del punto $w=\infty$, de aquí se deduce que $w=\infty$ es un punto interior para el conjunto $f(G)$.

Finalmente, cuando $z_0=\infty$ y $w_0=\infty$, es suficiente realizar la transformación auxiliar $\zeta=1/z$ para reducir el problema al caso que acabamos de considerar.

Resumiendo, en todos los casos el punto $w_0=f(z_0)$ es interior para el conjunto $f(G)$.

Un estudio escrupuloso de la demostración expuesta muestra que se pueden hacer unas cuantas conclusiones importantes.

Ante todo, del teorema demostrado obtenemos de nuevo el principio del módulo máximo. A saber, si $f(z)\not\equiv$ const y el punto $z_0\in G$ no es un polo de la función $f(z)$, entonces el módulo $|f(z)|$ no puede

tener un máximo en el punto z_0. En efecto, la imagen de cualquier entorno del punto z_0 cubre un entorno del punto $w_0 = f(z_0)$; por consiguiente, en cualquier entorno del punto z_0 existen puntos z cuyas imágenes $f(z)$ distan del origen de coordenadas más que $f(z_0)$, o sea, $|f(z)| > |f(z_0)|$.

Suponiendo que $f(z_0) \neq 0$, se observa que en cualquier entorno del punto z_0 existen puntos z' cuyas imágenes $f(z')$ están más próximas del origen de coordenadas que $f(z_0)$. Por consiguiente, el módulo $|f(z)|$ no puede tener mínimo en el punto z_0 (si $f(z_0) \neq 0$).
En resumen, el principio del módulo máximo (y mínimo) es una consecuencia simple del hecho de que una función analítica transforma los puntos interiores en puntos interiores.

Para obtener otras consecuencias, limitémonos a estudiar el caso en que z_0 y $w_0 = f(z_0)$ son puntos finitos. Los casos $z_0 = \infty$ o $w_0 = \infty$ o, finalmente, $z_0 = w_0 = \infty$, se reducen fácilmente a éste mediante una transformación homográfica elemental, así como se ha indicado anteriormente.

Supongamos que z_0 es un w_0-punto k-múltiple ($k \geqslant 1$) de la función $f(z)$. Esto significa, para $k = 1$, que $f'(z_0) \neq 0$, y para $k > 1$, que $f'(z_0) = 0, \ldots, f^{(k-1)}(z_0) = 0$, pero $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Durante la demostración del teorema se había establecido que, si el número $\rho_0 > 0$ se ha tomado tan pequeño que la ecuación $f(z) - w_0 = 0$ no tiene otras raíces en el círculo $|z - z_0| \leqslant \rho_0$ más que $z = z_0$, o sea, que la cantidad de raíces en el interior de γ_0: $|z - z_0| = \rho_0$ coincide con k (lo cual será para valores de ρ_0 suficientemente pequeños), entonces, para δ igual a la distancia desde el punto w_0 hasta la curva $f(\gamma)$ y para cada punto w_1 perteneciente al entorno $|w - w_0| < \delta$, la ecuación $f(z) - w_1 = 0$ tiene tantas raíces en el interior de γ_0, cuantas tiene la ecuación $f(z) - w_0 = 0$, o sea, también k raíces.

Sustituyamos ρ_0 por un número positivo menor ρ, de modo que la imagen del entorno U_ρ: $|z - z_0| < \rho$ esté comprendida completamente en el entorno $|w - w_0| < \delta$. Por lo demostrado, esta imagen es un recinto. Además, debido a la elección de los números δ y ρ, cada punto w_1 perteneciente a la imagen del entorno U_ρ posee una misma cantidad de preimágenes, precisamente k en el círculo $|z - z_0| < \rho_0$. Naturalmente, algunas de estas preimágenes pueden coincidir entre sí en un punto múltiple z_1, en el cual necesariamente $f'(z_1) = 0$; pero si se elige ρ_0 tan pequeño que la derivada $f'(z)$ no se anule en los puntos del círculo $|z - z_0| < \rho_0$ distintos de z_0, entonces las preimágenes de cada punto $w_1 \neq w_0$ serán todas distintas entre sí.

En resumen, se verifica la siguiente proposición:

T e o r e m a. *Si, para una función analítica* $f(z)$, *el punto* z_0 *es un* $f(z_0)$*-punto* k*-múltiple* ($k \geqslant 1$), *entonces existe un entorno*

U_ρ: $|z - z_0| < \rho$ *del punto* z_0, *que se transforma por esta función en el recinto correspondiente* $f(U_\rho)$, *de modo que cada punto* $w \in f(U_\rho)$ *posee no más de* k *preimágenes en* U_ρ, *y los puntos suficientemente próximos a* w_0 *poseen* k *preimágenes en* U_ρ *(distintas, si* $w \neq w_0$*).*

Recordemos (véase el ap. 5.1, cap. segundo) que una función $f(z)$ se llama univalente en el recinto G, si es uniforme y analítica en este recinto a excepción, posiblemente, de polos, y si en puntos distintos del recinto G ella toma valores distintos:

$$f(z_1) \neq f(z_2), \quad \text{si} \quad z_1 \neq z_2; \; z_1, \; z_2 \in G.$$

De esta definición se deduce inmediatamente que una función univalente no puede tener más de un polo.

Del último teorema se deduce que, si $f'(z_0) \neq 0$, entonces $k = 1$ y $f(z)$ es una función univalente en cierto entorno del punto z_0. Si $k > 1$, la función no será univalente o, como suele decirse, será multivalente, precisamente, k-valente en cada entorno suficientemente pequeño del punto z_0.

Señalemos la siguiente proposición, que se deduce del mismo teorema: *Si una función analítica* $f(z)$ *es univalente en el recinto* G, *entonces, todos los puntos del recinto* G *son puntos simples para la misma. En particular, tienen que ser simples su cero y su polo* (si es que éstos existen en el recinto G), *y la derivada* $f'(z)$ *no tiene que anularse en los puntos finitos del recinto* G.

La proposición recíproca no es justa. Como ejemplo, examinemos la función exponencial e^z, cuya derivada no se anula en ningún punto del plano y la cual, sin embargo, no es univalente en el plano, puesto que $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Demostremos que *toda función analítica que sea univalente en el plano finito, tiene que ser homográfica* (en particular, lineal entera).

En efecto, sea $f(z)$ tal función. En virtud de la univalencia, ella no tiene en el plano finito otro punto singular más que, posiblemente, un polo único (simple).

El punto del infinito puede ser para la misma un punto regular, un polo o un punto singular esencial. Demostremos que esto último es imposible. En efecto, esta función transforma el círculo unidad $|z| < 1$ en cierto recinto g del plano w. Si $w_0 \in g$ y U_0 es un entorno del punto w_0 perteneciente a g, entonces, debido a la univalencia, $f(z)$ no puede tomar fuera del círculo unidad ningún valor que pertenezca a U_0. Por esta razón, no puede existir una sucesión $\{z_n\}$ que converja hacia ∞, tal que $\lim f(z_n) = w_0$. De aquí, según el teorema de Sojotski — Weierstrass (ap. 3.1, cap. cuarto) se deduce que ∞ no es un punto singular esencial de la función $f(z)$.

Así, pues, el punto ∞ es un punto regular o un polo para $f(z)$. Pero si este punto es un polo, éste tiene que ser simple. En caso contrario, en cierto entorno del punto ∞ la función $f(z)$ tomaría

cada valor unas cuantas veces, lo cual es incompatible con la univalencia. Cerciorémonos de que si $f(z)$ tiene un polo finito z_1, entonces no puede tener un polo en el punto del infinito. En efecto, esta función transforma el entorno $|z - z_1| < 1$ del punto z_1 en un recinto g_1 que contiene al punto $w = \infty$, y si U_1 es un entorno del punto $w = \infty$ perteneciente a g_1, entonces, debido a la univalencia, $f(z)$ no puede tomar fuera del círculo $|z - z_1| < 1$ valores que pertenezcan a U_1 y, por consiguiente, se mantiene acotada en valor absoluto. Por lo tanto, $f(z)$ no tiene en el plano ampliado más puntos singulares que un polo simple único, posiblemente. Evidentemente, este polo necesariamente tiene que existir; en caso contrario tendríamos que $f(z) \equiv \text{const}$, lo cual contradice a la univalencia de la función.

Si el polo está situado en el infinito, entocnes $f(z)$ es una función entera con un polo simple en el infinito, es decir, $f(z) = az + b$ $(a \neq 0)$ es una función lineal entera. Si el polo está situado en un punto finito z_1 y $\frac{a_1}{z-z_1}$ es la parte principal del desarrollo de Laurent correspondiente, entonces $f(z) - \frac{a_1}{z-z_1}$ no tiene singularidades en el plano ampliado y, por consiguiente, $f(z) - \frac{a_1}{z-z_1} \equiv \text{const} = b_1$, de donde se deduce que $f(z)$ es una función homográfica. Con esto se termina la demostración.

Demostremos también que la *transformación de un recinto G, realizada mediante una función univalente arbitraria, es conforme en todos los puntos del recinto.*

En efecto, si $z_0 \in G$ y $z_0 \neq \infty$, y, del mismo modo, $f(z_0) = w_0 \neq \infty$, entonces, según lo demostrado anteriormente, tiene que ser: $f'(z_0) \neq 0$, de donde se deduce que la transformación es conforme en el punto z_0.

Si uno de los puntos z_0 y w_0, o ambos, está situado en el infinito, recurrimos a la transformación auxiliar $\zeta = \frac{1}{z}$ o sea $t = \frac{1}{w}$, las cuales, sin alterar la univalencia de la función y sin cambiar los ángulos, dan lugar al caso de puntos finitos que acabamos de considerar. De este modo, la proposición queda demostrada en todos los casos.

Si la función $w = f(z)$ no es univalente en el recinto G, de aquí no se deduce todavía que tiene que dejar de ser conforme en algún sitio. En efecto, para que sea conforme es suficiente que sea $f'(z_0) \neq 0$, y esta condición puede cumplirse también para funciones que no son univalentes como, por ejemplo, para la función e^z en todo el plano. Pero si $w_0 = f(z_0)$ es un valor k-múltiple de la función $(k > 1)$, y, en particular (siendo z_0 y w_0 finitos), si $f'(z_0) = \ldots =$

$= f^{(k-1)}(z_0) = 0$, pero $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, entonces necesariamente se vulnera la conformidad. Precisando, *el ángulo formado por dos curvas con el vértice en el punto z_0 se altera en la transformación $w = f(z)$, aumentando k veces.*

Demostremos esta proposición, suponiendo que z_0 y w_0 son finitos (que es el caso al que se reducen todos los demás mediante transformaciones homográficas). En efecto, en este caso, en un entorno del punto z_0 se tiene:

$$f(z) = w_0 + a_k (z - z_0)^k + \ldots, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0,$$

por consiguiente:

$$\operatorname{Arg}[f(z) - w_0] = \operatorname{Arg}(z - z_0)^k + \operatorname{Arg}[a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \ldots].$$

Si la ecuación de la curva L que pasa por el punto z_0 es

$$z = \varphi(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

de modo que $\operatorname{Arg} \varphi'(t_0)$ representa el ángulo formado por la tangente a L en el punto z_0 y la parte positiva del eje real, entonces la ecuación de la imagen de esta curva $f(L)$ es:

$$w = f[\varphi(t)], \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Evidentemente, la derivada de esta función se anula en el punto $t = t_0$ (puesto que $f'(z_0) = 0$), por lo cual ésta no da la posibilidad de juzgar de la inclinación de la tangente a $f(L)$ en el punto w_0, ni incluso de la existencia de esta tangente. No obstante, se puede escribir:

$$\operatorname{Arg} \frac{w - w_0}{t - t_0} = \operatorname{Arg} \frac{w - w_0}{(z - z_0)^k} + \operatorname{Arg} \frac{(z - z_0)^k}{t - t_0} \longrightarrow \operatorname{Arg} a_k + k \operatorname{Arg} \varphi'(t_0)$$
$$\text{para} \quad t \longrightarrow t_0 \qquad (t > t_0),$$

de donde se deduce que existe la tangente y el ángulo de inclinación para la misma es:

$$\operatorname{Arg} a_k + k \operatorname{Arg} \varphi'(t_0).$$

Si ahora L_1 y L_2 son dos curvas $z = \varphi_1(t)$ y $z = \varphi_2(t)$, que pasan por el punto z_0 y forman en el mismo el ángulo θ:

$$\theta = \operatorname{Arg} \varphi_2'(t_0'') - \operatorname{Arg} \varphi_1'(t_0') \qquad (\varphi_1(t_0') = \varphi_2(t_0'') = z_0),$$

entonces las imágenes $f(L_1)$ y $f(L_2)$ de estas curvas pasan por el punto w_0 y forman en él el ángulo

$$[\operatorname{Arg} a_k + k \operatorname{Arg} \varphi_2'(t_0'')] - [\operatorname{Arg} a_k + k \operatorname{Arg} \varphi_1'(t_0)] = k\theta + 2n\pi.$$

En resumen, en la transformación $w = f(z)$ todos los ángulos con el vértice en el punto z_0 aumentan k veces*)

1.2. En muchas cuestiones resulta útil el siguiente teorema que proporciona las condiciones suficientes de univalencia.

Teorema. *Supongamos que la función $w = f(z)$, siendo continua en un dominio $\bar{g}$, donde g es la parte interior de una curva de Jordan γ, y analítica en el recinto g, transforma biunívocamente γ en una curva cerrada de Jordan Γ. Entonces $f(z)$ es univalente en el recinto g y transforma a éste en el interior Δ de la curva Γ.*

Con este enunciado el teorema se establecerá a continuación en el ap. 3.6 como resultado de la aplicación del principio generalizado del argumento. Aquí consideraremos ante todo un caso particular del mismo, cuando γ es una curva rectificable y $f(z)$ es analítica en cierto recinto $G' \supset \bar{g}$. Con estas restricciones, la demostración del teorema será consecuencia del principio del argumento en la forma en que éste fue demostrado en el ap. 3.5, cap. cuarto, tomo I.

Demostración. En virtud de lo demostrado anteriormente (pág. 7 y siguientes), la imagen $f(g)$ del recinto g es un recinto. Demostremos que $\Delta \subset f(g)$. En efecto, si $w_1 \in \Delta$, entonces, al dar una vuelta el punto z por la curva γ en sentido positivo, el punto $w = f(z)$, en virtud de la hipótesis del teorema, realiza un recorrido simple de la curva Γ y, por consiguiente, el vector $w - w_1$ gira un ángulo $\pm 2\pi$ alrededor del punto w_1. De aquí se deduce, debido al principio del argumento (ap. 3.5, cap. cuarto), que la diferencia entre el número de w_1-puntos y el número de polos de la función $f(z)$ en el interior de γ es igual a ± 1. Pero, según la condición, $f(z)$ no tiene polos en el interior de γ. Por esta razón, el número de w_1-puntos de la función $f(z)$ en el interior de γ tiene que coincidir con ± 1, es decir, tiene que ser igual a uno. Así, pues, el ángulo de rotación del vector $w - w_1$ es igual a 2π (y no a -2π), o sea, $f(z)$ necesariamente recorre Γ en sentido positivo cuando z recorre γ en sentido positivo, tomando $f(z)$ cada valor $w_1 \in \Delta$ en el interior de γ y, además, una sola vez.

Por consiguiente, queda demostrado que $f(g) \supset \Delta$. Demostremos que ningún punto w_2, situado en la parte exterior de la curva Γ, puede pertenecer a $f(g)$. En efecto, si el punto z recorre una vez γ en sentido positivo, entonces, por lo demostrado, $w = f(z)$ también recorre una vez Γ en sentido positivo, y como w_2 pertenece a la parte exterior de Γ, el ángulo de rotación del vector $w - w_2$ alrededor del punto w_2 es igual a cero. De aquí se deduce, en virtud del principio del argumento y de que la función $f(z)$ carece de polos en el interior

*) En el ap. 3.2, cap. segundo, se llevaron a cabo los mismos razonamientos para el caso en que $f(z)$ es un polinomio.

de γ, que $f(z)$ no tiene w_2-puntos en el interior de γ, es decir, $w_2 \bar{\in} f(C)$.

Así, pues, $f(g)$ contiene todos los puntos de la parte interior de Γ, pero no contiene ningún punto exterior a esta curva. De aquí se deduce luego que ningún punto de la curva Γ puede pertenecer a $f(g)$. En efecto, si algún punto $w \in \Gamma$ perteneciese al recinto $f(g)$, entonces a este último pertenecería también un entorno del punto w y, por consiguiente, el recinto $f(g)$ tendría que contener también aquellos puntos de la parte exterior de Γ que están situados en este entorno. Pero, como acabamos de ver, esto último es imposible.

Por lo tanto, hemos demostrado que $f(g)$ coincide con la parte interior Δ de la curva Γ.

Durante la demostración se vio que cada punto del recinto Δ tiene solamente una preimagen en el recinto g. Por consiguiente, la correspondencia entre g y Δ, establecida por la función $w = f(z)$, es biunívoca y $f(z)$ es una función univalente en el recinto g.

El teorema demostrado conserva su valor también cuando el recinto g es la parte exterior de la curva γ, con la condición de que esta parte exterior esté contenida en el recinto G en el cual la $f(z)$ es analítica. En efecto, tomemos en el interior de γ algún punto z_0 no perteneciente al recinto G (tal punto existe, puesto que el recinto G no coincide con el plano ampliado; en caso contrario, la función $f(z)$, siendo analítica en el plano ampliado, sería idénticamente constante). La transformación $z' = \frac{1}{z-z_0}$ transforma el recinto G en el recinto G', la curva γ en la curva cerrada rectificable γ' y el exterior g de la curva γ en el interior g' de la curva γ'. Haciendo $f(z) = f\left(z_0 + \frac{1}{z'}\right) = f^*(z')$ y observando que esta función es analítica en el recinto G' y que mediante la función $w = f^*(z')$ la curva γ' se transforma biunívocamente en la curva Γ $\Big($debido a que la función $w = f(z)$ transforma biunívocamente γ en Γ y la función $z = z_0 + \frac{1}{z'}$ transforma biunívocamente γ' en $\gamma\Big)$, sacamos la conclusión de que el teorema demostrado es aplicable a la función $f^*(z')$, de modo que esta función es univalente en el interior de γ' y transforma g' en el interior de la curva Γ. Como la función $z = z_0 + \frac{1}{z'}$ es univalente, de aquí se deduce que $f(z)$ es univalente en el exterior de γ y transforma el recinto g en la parte interior de Γ.

Supongamos ahora que γ es una curva cerrada de Jordan del plano ampliado y que g es uno de los dos recintos, limitados por esta curva, contenido en el recinto G. Si z_0 es un punto perteneciente al segundo recinto limitado por la curva γ y no contenido en el recin-

to G, entonces, aplicando la transformación $z' = \frac{1}{z-z_0}$ reducimos también este caso al teorema demostrado, suponiendo que la imagen γ' de la curva γ, obtenida como resultado de esta transformación, es una curva rectificable.

Veamos otras generalizaciones del caso particular demostrado del teorema. Para precisar, supongamos que γ es una curva cerrada rectificable de Jordan y que g es la parte interior a esta curva. La extensión de las proposiciones que se demuestran a continuación al caso en que g es la parte exterior de la curva γ, o al caso en que γ es una curva ilimitada y g es uno de los dos recintos con la frontera γ, se efectúa del mismo modo que se ha hecho anteriormente, y no nos detendremos más en tal generalización. La generalización va a consistir en que no se va a exigir que la curva γ esté situada completamente en el interior del recinto G, donde $f(z)$ es una función analítica, y supondremos que un número finito de puntos de la curva γ: $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ está situado en la frontera del recinto G. Además, supondremos que existen límites finitos de la función $f(z)$ cuando z, manteniéndose en el recinto cerrado $\bar{g}$, tiende a ζ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$):

$$\lim_{z\to\zeta_h} f(z) = w_k.$$

Entonces, haciendo $f(\zeta_h) = w_h$ ($k = 1, \ldots, m$), definimos $f(z)$ en todos los puntos del dominio $\bar{g}$ de modo que ella sea continua en $\bar{g}$ y analítica en todos los puntos del mismo, a excepción, posiblemente, de los puntos ζ_h. Supongamos, finalmente, que $w = f(z)$ transforma biunívocamente la curva γ en una curva cerrada de Jordan Γ del plano w. Entonces se puede afirmar que la función $f(z)$ es univalente en el recinto g y que transforma este recinto en un recinto Δ que es interior a la curva Γ*).

Para la demostración, describamos con los centros en los puntos ζ_h unas circunferencias $|z - \zeta_h| = \rho$ de un radio tan pequeño, que cada una de ellas esté situada fuera de cada una de las demás. En cada una de estas circunferencias tendremos al menos un arco perteneciente al recinto g (a excepción de los extremos, situados en la frontera de este recinto). Designemos con $\sigma_{h,\rho}$ el arco de la circunferencia $|z - \zeta_h| = \rho$ que, junto con un arco $\gamma_{h,\rho}$ de la curva γ, limita un recinto $g_{h,\rho}$, situado en el recinto g y que contiene al punto ζ_h en su frontera.

Para precisar, en la elección de los arcos $\sigma_{k,\rho}$ y $\gamma_{h,\rho}$ exigiremos también que el recinto $g_{h,\rho}$ no contenga un punto fijado $z_0 \in g$ (fig. 1).

Evidentemente, $\sigma_{k,\rho}$ y $\gamma_{h,\rho}$ poseen extremos comunes, y cuando ρ tiende a cero, los arcos $\sigma_{h,\rho}$ y $\gamma_{k,\rho}$, y junto con ellos también el recinto $g_{h,\rho}$, se ciñen al punto ζ_k. Tomemos ρ tan pequeño, de modo que no sólo los círculos $|z-\zeta_h| \leqslant$

*) El lector puede omitir los razonamientos que siguen, puesto que la aplicación del principio generalizado del argumento (véase más adelante el ap. 3.5) hace que éstos sean superfluos.

$\leqslant \rho$ sino también los dominios $\bar{g}_{h,\rho}$ no tengan dos a dos puntos comunes entre sí. Excluyamos de γ los arcos $\gamma_{h,\rho}$, sustituyéndolos por los arcos de la circunferencia $\sigma_{h,\rho}$. Entonces la curva γ se sustituirá por una nueva curva rectificable de Jordan γ_ρ situada completamente en el interior de G. Su parte interior g_ρ representa una parte del recinto g. La imagen Γ_ρ de la curva γ_ρ en la transformación mediante la función $w = f(z)$ se obtiene de Γ excluyendo los

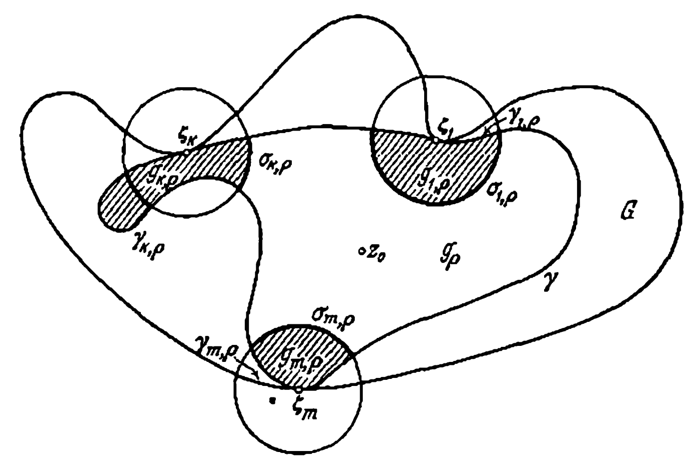


FIG. 1.

arcos $\Gamma_{h,\rho}$, que son las imágenes de los arcos $\gamma_{h,\rho}$, y sustituyéndolos por los arcos $\Sigma_{h,\rho}$, que son las imágenes de los arcos de las circunferencias $\sigma_{h,\rho}$.

Por ahora no podemos afirmar que la correspondencia entre los puntos $z \in \gamma_\rho$ y $w = f(z) \in \Gamma_\rho$ es biunívoca y, por consiguiente, no podemos basarnos en el teorema fundamental de este apartado.

Sea w' un punto arbitrario del recinto Δ y sean U_h unos entornos de los puntos w_h tan pequeños, que w' esté situado fuera de cualquiera de ellos. Para valores suficientemente pequeños de ρ los arcos $\Gamma_{h,\rho}$ y $\Sigma_{h,\rho}$ estarán contenidos en los entornos correspondientes U_h. Evidentemente, la variación del $\operatorname{Arg}[f(z) - w']$, cuando z hace un recorrido simple por γ_ρ en sentido positivo, es igual a la suma de las variaciones del $\operatorname{Arg}[w - w']$ en los arcos que quedan de Γ después de haber excluido los arcos $\Gamma_{h,\rho}$ y de las variaciones en los arcos $\Sigma_{h,\rho}$. Pero $\Gamma_{h,\rho}$ y $\Sigma_{h,\rho}$ tienen orígenes y extremos comunes y están comprendidos en el interior del entorno U_h del punto w_h; por esta razón, para el punto w', situado fuera de este entorno, tendremos:

$$\underset{z \in \sigma_{h,\rho}}{\operatorname{Var}} \operatorname{Arg}[f(z) - w'] = \underset{z \in \gamma_{h,\rho}}{\operatorname{Var}} \operatorname{Arg}[f(z) - w'].$$

En efecto, la diferencia entre una y otra variaciones es un número entero múltiplo de 2π y cada una de estas variaciones es en valor absoluto menor que π; por consiguiente, la diferencia indicada es igual a cero.

De aquí se deduce, finalmente, que

$$\underset{z \in \gamma_\rho}{\operatorname{Var}} \operatorname{Arg}[f(z) - w'] = \underset{z \in \gamma}{\operatorname{Var}} \operatorname{Arg}[f(z) - w'] = 2\pi,$$

o sea, la función $f(z)$ toma el valor w' en el interior de $\gamma,_\rho$ (para todos los valores de ρ suficientemente pequeños) y, además, una sola vez.

Tomando un punto w'' en la parte exterior a Γ, mediante un mismo razonamiento hallamos que

$$\operatorname*{Var}_{z\in\gamma_\rho} \operatorname{Arg} [f(z)-w''] = \operatorname*{Var}_{z\in\gamma} \operatorname{Arg} [f(z)-w''] = 0,$$

o sea, la función $f(z)$ no toma el valor w'' en el interior de γ_ρ (para todos los valores de ρ suficientemente pequeños).

Como cada uno de los puntos del recinto g_ρ pertenece al recinto g y cada punto del recinto g está contenido en todos los recintos g_ρ, comenzando desde un valor suficientemente pequeño de ρ, la función $f(z)$ toma en el recinto g (y además una sola vez) cualquier valor de la parte interior Δ de la curva Γ y no toma ninguno de los valores de la parte exterior a esta curva. Con esto queda terminada la demostración de nuestra proposición.

Como ejemplo, examinemos la función

$$w = f(z) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

donde $0 < k^2 < 1$ (integral elíptica de primera especie en la forma normal de Legendre). La función $\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}$ es biforme y tiene puntos de ramificación de primer orden para $t = \pm 1$ y $t = \pm \frac{1}{k}$. Como todos ellos están situados en el eje real, se pueden elegir en el semiplano superior dos ramas uniformes y analíticas de esta función que toman valores opuestos en cada punto. Aquí elegiremos aquella rama que en el intervalo $(0, 1)$ del eje real toma valores reales positivos. Entonces nuestra integral representará en el semiplano superior una función uniforme y analítica, que será continua en el semiplano cerrado y analítica en todos los sitios, a excepción de los puntos ± 1, $\pm \frac{1}{k}$ (en el entorno $|z| > \frac{1}{k}$ del punto del infinito la función subintegral puede desarrollarse en la serie siguiente:

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}} = k^{-1}t^{-2}(1-t^{-2})^{-\frac{1}{2}}(1-k^{-2}t^{-2})^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= \pm k^{-1}t^{-2}\left(1+\frac{1}{2}t^{-2}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{2k^2}t^{-2}+\dots\right) =$$
$$= \pm \left[k^{-1}t^{-2}+\frac{1}{2}(k^{-1}+k^{-3})(t^{-4}+\dots\right],$$

por lo cual, para $f(z)$ resulta:

$$f(z) = C_0 \mp \left[k^{-1}z^{-1}+\frac{1}{2\cdot 3}(k^{-1}+k^{-3})z^{-3}+\dots\right],$$

de donde se ve que ambas ramas de la función $f(z)$ son analíticas en el punto del infinito).

Tomando el semiplano superior por recinto g, y el eje real por curva γ (ya se señaló anteriormente que la extensión del teorema

demostrado al caso de recintos y curvas no acotados, es legítimo), consideremos la transformación de γ mediante la función $w = f(z)$. Cuando $z = x$ recorre el intervalo $0 < x < 1$, la función

$$w = f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}},$$

conservando valores reales, crece desde 0 hasta

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

En el intervalo $1 < x < \frac{1}{k}$ la expresión subintegral toma la forma

$$\frac{1}{\pm i \underset{+}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}}.$$

En la última expresión el signo no puede elegirse arbitrariamente; éste debe concordar con la elección efectuada anteriormente de la rama de la raíz cuadrada, con el fin de garantizar la continuidad de esta rama en el semiplano superior. Escribiendo $(1 - t^2)(1 - k^2t^2)$ en la forma

$$k^2(t-1)[t-(-1)]\left(t-\frac{1}{k}\right)\left[t-\left(-\frac{1}{k}\right)\right] = \varphi(t),$$

se observa que al pasar de los puntos del intervalo $(0, 1)$ a los puntos del intervalo $\left(1, \frac{1}{k}\right)$, a lo largo de una semicircunferencia con el centro en 1, perteneciente al semiplano superior, la variación del $\operatorname{Arg} \varphi(t)$, que se compone de la suma de las variaciones de los argumentos de los factores por separado, es igual a $-\pi$ (precisando: $\operatorname{Arg}(t - 1)$ disminuye en π, mientras que los argumentos de los demás factores no varían). Por lo tanto, $\operatorname{Arg} \sqrt{\varphi(t)}$ varía en $-\frac{1}{2}\pi$ y, por consiguiente, adquiere el valor $-\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$. Vemos, pues, que entre dos valores $\pm i \underset{+}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2t^2)}}$ se debe tomar el valor $-i \underset{+}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2t^2)}}$. En resumen, para $1 < x < \frac{1}{k}$ se tiene:

$$w = f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}} = \int_0^1 \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}} +$$

$$+ i \int_1^x \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}} = K + i \int_1^x \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}}.$$

De aquí se deduce que, cuando $z=x$ recorre el intervalo $1<x<\frac{1}{k}$, el punto w recorre el intervalo rectilíneo paralelo al eje imaginario, desde el punto K hasta el punto $K+iK'$, donde

$$K'=\int_1^{1/k}\frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}}.$$

Esta última integral puede expresarse en una forma análoga a K mediante la sustitución

$$t=\frac{1}{\sqrt{1-k'^2t'^2}},\quad \text{donde}\quad k'^2=1-k^2.$$

Resulta:

$$K'=\int_0^1\frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}},$$

donde $k'^2=1-k^2$.

Pasemos del intervalo $1<x<\frac{1}{k}$ al intervalo $\frac{1}{k}<x<+\infty$; el argumento de la expresión subradical

$$(t^2-1)(1-k^2t^2)=-k^2(t-1)(t+1)\left(t-\frac{1}{k}\right)\left(t+\frac{1}{k}\right)$$

disminuye en π $\left(\text{junto con } \operatorname{Arg}\left(t-\frac{1}{k}\right)\right)$. Por lo tanto, para $\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}$ resulta un valor cuyo argumento es igual a $-\frac{\pi}{2}$:

$$-i\underset{+}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}.$$

Resumiendo, para $\frac{1}{k}<x<+\infty$;

$$w=f(x)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}+i\int_1^{1/k}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}-$$

$$-\int_{1/k}^{x}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}=K+iK'-\int_{1/k}^{x}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(kt^2-1)}}.$$

Si x aumenta desde $\frac{1}{k}$ hasta $+\infty$, la integral $\int_{1/k}^{x}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}$ crece desde el valor 0 hasta el valor

$$\int_{1/k}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(k^2t^2-1)}}=\int_0^1\frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}=K$$

$\left(\text{aquí se hizo la sustitución } t = \frac{1}{k\tau}\right)$. Por esta razón, el punto $w = f(x)$ describe el intervalo rectilíneo paralelo al eje real, desde el punto $K + iK'$ hasta el punto iK'.

De un modo análogo nos cercioramos que, cuando x recorre los intervalos desde 0 hasta -1, desde -1 hasta $-\frac{1}{k}$ y desde $-\frac{1}{k}$ hasta $-\infty$, el punto $w = f(x)$ recorre consecutivamente los intervalos rectilíneos desde 0 hasta $-K$, desde $-K$ hasta $-K + iK'$ y, finalmente, desde $-K + iK'$ hasta iK'.

En resumen, la función $w = f(z)$ transforma biunívocamente el eje real γ en el contorno Γ del rectángulo con los vértices $-K$, K, $K + iK'$ y $-K + iK'$, donde

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$$

y $k'^2 = 1 - k^2$.

De aquí, según el teorema demostrado, sacamos la conclusión de que esta función es univalente en el semiplano superior y realiza una transformación conforme de este último en el rectángulo indicado.

La base del rectángulo es igual a $2K$, la altura es igual a K'; por lo tanto,

$$\frac{K'}{2K} = \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}}{\displaystyle 2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}} = \lambda(k).$$

Si el parámetro k $(0 < k < 1)$ crece desde 0 hasta 1, entonces el denominador de la fracción crece desde $2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi$ hasta ∞; en este caso, k' $(k' = \overset{}{\underset{+}{\sqrt{1-k^2}}})$ decrece desde 1 hasta 0 y, por consiguiente, el numerador de la fracción decrece desde ∞ hasta $\frac{\pi}{2}$. De este modo, la razón $\frac{K'}{2K} = \lambda(k)$, variando continuamente, decrece desde ∞ hasta 0, cuando k crece desde 0 hasta 1. Por esta razón, para cualquier rectángulo de base $2a$ y altura b se puede hallar

un valor de k $(0 < k < 1)$ y solamente uno, para el cual

$$\frac{b}{2a} = \frac{\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}}{2\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}} = \frac{K'}{2K}.$$

Por lo tanto, la función

$$f(z) = \int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

construida para el valor hallado de k, realiza una transformación conforme del semiplano superior en un rectángulo semejante al dado.

Si se desea obtener la transformación en el rectángulo dado, es suficiente introducir otro factor más $\mu = \frac{2a}{2K} = \frac{b}{K'}$; se tiene:

$$w = \mu \int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Como resultado de la transformación, se obtiene un rectángulo con los vértices:

$$-\mu K = -a, \ \mu K = a, \ \mu K + i\mu K' = a + bi,$$
$$-\mu K + i\mu K' = -a + bi.$$

En resumen, mediante la integral elíptica $\mu \int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ se puede transformar el semiplano en un rectángulo arbitrariamente dado, eligiendo para esto los valores correspondientes de los parámetros k y μ.

1.3. Consideremos, finalmente, el caso en que para uno de los puntos ζ_0 de la curva γ, perteneciente a la frontera del recinto G, se cumple la relación

$$\lim_{\substack{z \to \zeta_0 \\ z \in \bar{g}}} f(z) = \infty.$$

Supongamos que, haciendo

$$f(\zeta_0) = \infty,$$

se obtiene una función $f(z)$, continua (en el sentido generalizado) en el recinto cerrado $\bar{g}$ y analítica en todos los sitios, a excepción del punto ζ_0 y, posiblemente, de unos cuantos puntos más de la curva γ.

Supongamos de nuevo que $w = f(z)$ realiza una transformación biunívoca de la curva γ en una curva cerrada de Jordan Γ del plano ampliado (Γ necesariamente pasa por el punto del infinito). Ejemplos simples muestran que en este caso la función $f(z)$ puede ser no univalente en el recinto g y puede transformar g en un recinto distinto de Δ (distinto del interior de la curva Γ).

Examinemos, por ejemplo, la función

$$f(z) = i\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3,$$

la cual tiene un polo de tercer orden en el punto $z = -1$. Por recinto G se puede tomar aquí todo el plano, a excepción del punto $z = -1$. Sea γ la circunferencia unidad y sea g el círculo unidad. Como en γ $z = e^{i\theta}$ $(-\pi < \theta \leqslant \pi)$, la función $f(z) = f(e^{i\theta}) = = i\left(\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right)^3 = \operatorname{tg}^3 \frac{\theta}{2}$ realiza una transformación biunívoca de γ en el eje real Γ del plano w. Para hallar la imagen del círculo unidad g, realicemos la transformación auxiliar

$$\zeta = -i\,\frac{z-1}{z+1},$$

la cual transforma biunívocamente el círculo unidad en el semiplano superior ζ. Con esto, la función $w = f(z)$ se convertirá en $w = = f^*(\zeta) = \zeta^3$. Pero, evidentemente, esta última no es univalente en el semiplano superior, transformando a éste en todo el plano w, a excepción de los puntos $w = 0$ y $w = \infty$. De aquí se deduce que $f(z)$ tampoco es univalente en el recinto g y que transforma a éste en todo el plano w, a excepción de los puntos $w = 0$ y $w = \infty$, es decir, en todo caso resulta un recinto cuya frontera no coincide con Γ.

Este ejemplo muestra que, queriendo extender el teorema del ap. 1.2 al caso en que $f(z)$ se hace igual a ∞ en uno de los puntos de la curva γ, necesariamente tenemos que someter a esta función a condiciones complementarias. He aquí unas cuantas proposiciones sencillas que se pueden obtener en este sentido.

Sea $f(z)$ una función continua en el sentido generalizado en un recinto cerrado $\bar{g}$, limitado por una curva cerrada rectificable de Jordan γ, la cual toma el valor ∞ en uno de los puntos ζ_0 de esta curva y es analítica en todo el recinto $\bar{g}$, a excepción de una cantidad finita de puntos frontera.

Supongamos que $w = f(z)$ transforma biunívocamente γ en una curva cerrada de Jordan Γ del plano ampliado (que necesariamente pasa por el punto del infinito). Si existe un punto finito w_0, no perteneciente al conjunto de los valores que toma la función $f(z)$ en el recinto $\bar{g}$, entonces la función $F(z) = \frac{1}{f(z)-w_0}$ es continua

en $\bar{g}$ en el sentido ordinario, es analítica en todos los puntos, a excepción de un número finito de puntos frontera y realiza una transformación biunívoca de γ en una curva cerrada de Jordan Γ' del plano finito $\left(\Gamma'\right.$ es la imagen de la curva Γ en la transformación $\left.w' = \frac{1}{w-w_0}\right)$. Por lo tanto, a ella se le puede aplicar el teorema demostrado anteriormente, de donde se deduce que $F(z)$ y, por consiguiente, también $f(z)$, es univalente en el recinto G.

Señalemos ahora unas condiciones suficientes de otro tipo, en las cuales se va a tener en cuenta el comportamiento de la función $f(z)$ en un entorno arbitrariamente pequeño del punto ζ_0 (de aquel punto de la curva γ, en el cual la función $f(z)$ se hace infinita). Supongamos que en el punto ζ_0 la curva γ posee tangentes a la derecha y a la izquierda, las cuales forman entre sí un ángulo $\alpha\pi$ $(0 < \alpha \leqslant 2)$, y que para un número real positivo λ, $0 < \lambda < \frac{3}{\alpha}$, se verifica la relación

$$\lim_{\substack{z\to\zeta_0\\ z\in\bar{g}}} f(z)(z-\zeta_0)^{\lambda} = c \qquad (c \neq 0,\ c \neq \infty).$$

Entonces, si $w = f(z)$ realiza una transformación biunívoca de γ en el eje real Γ del plano w, la función $f(z)$ es univalente en el recinto g y transforma a éste en aquel semiplano Δ, limitado por la recta Γ, que queda a la izquierda del observador que se mueve junto con el punto $f(z)$, cuando z recorre la curva γ en sentido positivo.

Para comprender mejor este enunciado, supongamos que $\alpha = 1$, es decir, que la curva γ posee tangente en el punto ζ_0. Entonces, para λ se obtiene la desigualdad $\lambda < 3$. De aquí se deduce que la proposición será justa, en particular, cuando se sabe previamente que $f(z)$ posee en el punto ζ_0 un polo de orden no superior al segundo (se tiene, respectivamente:

$$\lim_{z\to\zeta_0} f(z)(z-\zeta_0) = c_1 \qquad (\lambda = 1)$$

o bien

$$\lim_{z\to\zeta_0} f(z)(z-\zeta_0)^2 = c_2 \qquad (\lambda = 2).$$

No obstante, en el caso de un polo de tercer orden, esto deja de ser cierto, como se ve en el ejemplo expuesto anteriormente. En resumen, si $\alpha = 1$ no se puede sustituir en la condición $\lambda < 3$ el signo de la desigualdad por el de la igualdad.

Pasando a demostrar el teorema, describamos las circunferencias $|z-\zeta_k| = \rho$ $(k = 0, \ldots, m)$ con los centros en el punto ζ_0 y en los demás puntos ζ_k de la curva γ, en los cuales $f(z)$ no es analítica. Conservando las notaciones de la pág. 15, hallemos los arcos $\sigma_{k,\rho}$ de las circunferencias $|z-\zeta_k| = \rho$, que junto con los arcos $\gamma_{k,\rho}$ de la curva γ limitan los recintos $g_{k,\rho}$ que están situados en el recinto g y tienen en sus fronteras los puntos ζ_k $(k = 0, \ldots, m)$, respectivamente. Sea ρ tan pequeño que los dominios $\bar{g}_{k,\rho}$ no tengan puntos comunes dos a dos. Como anteriormente, designemos con γ_ρ la curva que se obtiene de γ sustituyendo los arcos $\gamma_{k,\rho}$ por los arcos $\sigma_{k,\rho}$, y con Γ_ρ la curva que se obtiene del eje real sustituyendo los segmentos $\Gamma_{k,\rho} = f(\gamma_{k,\rho})$ por los arcos $\Sigma_{k,\rho} = f(\sigma_{k,\rho})$. Tomemos un punto arbitrario w' en el semiplano Δ y calculemos la variación del $\operatorname{Arg}[f(z)-w']$ cuando el punto z recorre la curva γ_ρ en sentido positivo. Fijando unos entornos U_k de los puntos w_k que

no contengan a w', tomemos ρ tan pequeño que los arcos $\Gamma_{k,\rho}$ y $\Sigma_{k,\rho}$ estén contenidos en U_k ($k = 0, \ldots, m$). Entonces, para $k \neq 0$, tendremos:

$$\underset{z\in\sigma_{k,\rho}}{\operatorname{Var}} \operatorname{Arg}[f(z)-w'] = \underset{z\in\gamma_{k,\rho}}{\operatorname{Var}} \operatorname{Arg}[f(z)-w'];$$

por consiguiente, sumando todas las variaciones, menos aquellas que corresponden al recorrido por los arcos $\sigma_{0\rho}$ y $\gamma_{0\rho}$, obtendremos:

$$\underset{z\in\gamma-\gamma_{0,\rho}}{\operatorname{Var}} \operatorname{Arg}[f(z)-w'] = \underset{z\in\gamma_\rho-\sigma_{0,\rho}}{\operatorname{Var}} \operatorname{Arg}[f(z)-w'].$$

Designemos con a_ρ y b_ρ los puntos inicial y final comunes de los arcos $\Gamma_{0,\rho}$ y $\Sigma_{0,\rho}$ (en el sentido del recorrido positivo). Evidentemente, a_ρ y b_ρ son pun-

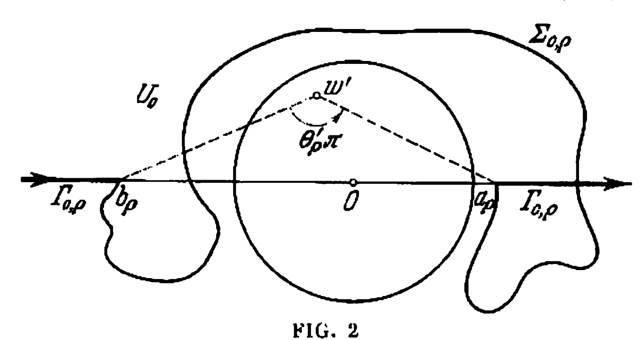


FIG. 2

tos del eje real y $\Gamma_{0,\rho}$ representa un segmento infinito del mismo con el origen a_ρ y el extremo b_ρ, mientras que $\Gamma - \Gamma_{0,\rho}$ es el segmento finito con el origen b_ρ y el extremo a_ρ (fig. 2.). Por esta razón, la variación de $\underset{z\in\gamma-\gamma_{0,\rho}}{\operatorname{Arg}} [f(z)-w']$ es igual a la variación de $\underset{w\in[b_\rho, a_\rho]}{\operatorname{Arg}} (w-w')$ cuando w recorre el segmento $[b_\rho, a_\rho]$ de modo que el vector $w - w'$ gire alrededor de w' en sentido positivo (w' se mantiene a la izquierda cuando el punto w recorre el segmento $[b_\rho, a_\rho]$), y, por consiguiente, esta variación es igual al ángulo $\theta'_\rho\pi$, $0 < \theta'_\rho < 1$, bajo el cual se ve el segmento $[b_\rho, a_\rho]$ desde el punto w'. Así, pues,

$$\underset{z\in\gamma_\rho-\sigma_{0,\rho}}{\operatorname{Var}} \operatorname{Arg}[f(z)-w'] = \underset{w\in[b_\rho, a_\rho]}{\operatorname{Var}} \operatorname{Arg}(w-w') = \theta'_\rho\pi.$$

Pero $\underset{w\in[b_\rho, a_\rho]}{\operatorname{Var}} \operatorname{Arg}(w-w')$ es uno de los valores de la diferencia

$$\operatorname{Arg}(a_\rho-w') - \operatorname{Arg}(b_\rho-w') = \operatorname{Arg}\frac{a_\rho-w'}{b_\rho-w'}.$$

Por lo tanto,

$$\arg\frac{a_\rho-w'}{b_\rho-w'} = \theta'_\rho\pi$$

y, luego,

$$\underset{z\in\sigma_{0,\rho}}{\operatorname{Var}} \operatorname{Arg}[f(z)-w'] = \underset{w\in\Sigma_{0,\rho}}{\operatorname{Var}} \operatorname{Arg}(w-w') = -\arg\frac{a_\rho-w'}{b_\rho-w'} + 2k\pi = 2k\pi - \theta'_\rho\pi$$

donde k es un número entero. Por otra parte, en un entorno del punto ζ_0 la función $f(z)$ puede expresarse en la forma

$$f(z)=\frac{c\,[1+\varepsilon(z)]}{(z-\zeta_0)^\lambda},$$

donde $\varepsilon(z)\longrightarrow 0$ cuando $z\longrightarrow\zeta_0$. Por esta razón,

$$f(z)-w'=\frac{c}{(z-\zeta_0)^\lambda}\left[1+\varepsilon(z)-\frac{w'(z-\zeta_0)^\lambda}{c}\right]=\frac{c}{(z-\zeta_0)^\lambda}[1+\eta(z)],$$

donde $\eta(z)\longrightarrow 0$ cuando $z\longrightarrow\zeta_0$. Por consiguiente,

$$\underset{z\in\sigma_{0,\rho}}{\mathrm{Var}}\ \mathrm{Arg}\,[f(z)-w']=-\lambda\underset{z\in\sigma_{0,\rho}}{\mathrm{Var}}\ \mathrm{Arg}\,(z-\zeta_0)+\underset{z\in\sigma_{0,\rho}}{\mathrm{Var}}\ \mathrm{Arg}\,[1+\eta(z)].$$

Como las tangentes en el punto ζ_0 a la curva γ forman entre sí, un ángulo $\alpha\pi$, todos los puntos del arco $\gamma_{0,\rho}$ para valores suficientemente pequeños de ρ están situados en el interior de dos ángulos de magnitud arbitrariamente pequeña, simétricos respecto de sus tangentes respectivas. Debido a esto, el ángulo $\alpha_\rho\pi$ bajo el cual se ve el arco $\sigma_{0,\rho}$ desde el punto ζ_0, se puede suponer arbitrariamente próximo a $\alpha\pi$. Observando que z recorre $\sigma_{0,\rho}$ de tal modo que el interior del recinto g_ρ (situado fuera de la circunferencia $|z-\zeta_0|=\rho$, uno de cuyos arcos es $\sigma_{0,\rho}$) se mantiene a la izquierda de z, hallamos:

$$\underset{h\in\sigma_{0,\rho}}{\mathrm{Var}}\ \mathrm{Arg}\,(z-\zeta_0)=-\alpha_\rho\pi$$

y, por consiguiente,

$$\underset{z\in\sigma_{0,\rho}}{\mathrm{Var}}\ \mathrm{Arg}\,[f(z)-w']=\lambda\alpha_\rho\pi+\beta_\rho\pi,$$

donde

$$\lim_{\rho\to 0}\alpha_\rho=\alpha \ \text{ y } \ \lim_{\rho\to 0}\beta_\rho=0 \quad (\beta_\rho\pi=\underset{z\in\sigma_{0,\rho}}{\mathrm{Var}}\ \mathrm{Arg}\,[1+\eta(z)]).$$

Comparando esta expresión con la hallada anteriormente, obtenemos:

$$2k=\theta'_\rho+\lambda\alpha_\rho+\beta_\rho.$$

Si $\rho\to 0$, el ángulo $\pi\theta'_\rho$ tiende a π, puesto que los puntos a_ρ y b_ρ tienden a $\pm\infty$. Por esta razón, el segundo miembro de la igualdad tiende hacia el límite $1+\lambda\alpha$ y, además, según la condición,

$$1<1+\lambda\alpha<4.$$

De aquí se deduce que $k=1$ para todos los valores de ρ suficientemente pequeños*). Debido a esto

$$\underset{z\in\sigma_{0,\rho}}{\mathrm{Var}}\ \mathrm{Arg}\,[f(z)-w']=2\pi-\theta'_\rho\pi$$

y, finalmente,

$$\underset{z\in\gamma_\rho}{\mathrm{Var}}\ \mathrm{Arg}\,[f(z)-w']=\underset{z\in\gamma_\rho-\sigma_{0,\rho}}{\mathrm{Var}}\ \mathrm{Arg}\,[f(z)-w']+$$
$$+\underset{z\in\sigma_{0,\rho}}{\mathrm{Var}}\ \mathrm{Arg}\,[f(z)-w']=\theta'_\rho\pi+(2\pi-\theta'_\rho\pi)=2\pi.$$

---

*) Y, por consiguiente, $\lambda=\frac{1}{\alpha}$.

En resumen, la función $f(z)$ toma cualquier valor $w' \in \Delta$ en el recinto g_ρ y, además, una sola vez, para todos los valores suficientemente pequeños de ρ. Del mismo modo, para cualquier punto w'', perteneciente al semiplano limitado por la recta Γ y que queda a la derecha durante el recorrido de Γ por el punto $w = f(z)$, correspondiente al recorrido del punto z por la curva γ en sentido positivo, se tiene que

$$\underset{z \in \gamma_\rho - \sigma_{0,\rho}}{\mathrm{Var}} \mathrm{Arg}\,[f(z) - w''] = \underset{z \in \gamma - \gamma_{0,\rho}}{\mathrm{Var}} \mathrm{Arg}\,[f(z) - w''] = -\theta''_\rho \pi,$$

$$\underset{z \in \sigma_{0,\rho}}{\mathrm{Var}} \mathrm{Arg}\,[f(z) - w''] = \underset{z \in \gamma_{0,\rho}}{\mathrm{Var}} \mathrm{Arg}\,[f(z) - w''] = \theta''_\rho \pi,$$

y, por lo tanto,

$$\underset{z \in \gamma_\rho}{\mathrm{Var}} \mathrm{Arg}\,[f(z) - w''] = 0.$$

Aquí $\theta''_\rho \pi$ designa el ángulo bajo el cual se ve el segmento $[b_\rho, a_\rho]$ desde el punto w''. Así, pues, la función $f(z)$ no toma en el recinto g_ρ el valor w'', situado fuera del semiplano Δ, para todos los valores suficientemente pequeños de ρ. De los hechos establecidos se deduce la justeza de nuestra proposición.

Proponemos al lector demostrar como ejercicio el siguiente teorema:

Supongamos que el recinto g está limitado por una curva cerrada de Jordan γ del plano ampliado (cualquier arco finito de la cual es rectificable) y está contenido en una franja $A < y < A + h\pi$, $0 < h < 2$, cuyos lados son asíntotas para γ; para precisar supondremos que ambas ramas infinitas de la curva γ se extienden en la dirección de las x crecientes (el recinto g tiene la forma de una semifranja curvilínea). Sea $f(z)$ una función continua en el sentido generalizado en el recinto $\bar{g}$, la cual se hace igual a ∞ en el punto $z = \infty$ y es analítica en todos los puntos finitos del recinto $\bar{g}$. Si ésta realiza una transformación biunívoca de la curva γ en el eje real Γ y se pueden señalar unos números reales μ y λ, $-\infty < \mu < +\infty$, $0 < \lambda < \frac{3}{h}$, tales que existe el límite $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ z \in g}} [z^{\mu} e^{-\lambda z} f(z)] = C$ $(C \neq 0,\ C \neq \infty)$, entonces $f(z)$ es univalente en el recinto g y transforma a éste en uno de los dos semiplanos limitados por la recta Γ.

1.4. Ejemplos sencillos muestran que la suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones univalentes en un recinto dado pueden no ser funciones univalentes. Del mismo modo, la derivada y la integral de una función univalente, por lo general, no son funciones univalentes. Sin embargo, la superposición de dos funciones univalentes $f[\varphi(z)]$ es, evidentemente, una función univalente; más de una vez se utilizó anteriormente esta observación. Hay que tener cuidado solamente de que los valores de la función $\varphi(z)$ descansen en aquel recinto del plano w en el cual $f(w)$ es una función univalente.

Es de gran importancia el teorema que afirma que el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones univalentes

es una función univalente (salvo una excepción evidente). Precisando, se verifica la siguiente proposición:

T e o r e m a. *Si una sucesión de funciones* $\{f_n(z)\}$, *que son univalentes en un recinto G, es uniformemente convergente en este recinto y* $f(z) = \lim f_n(z)$ *no es idénticamente constante, entonces* $f(z)$ *es univalente en el recinto G.*

Como, en virtud del teorema de Weierstrass sobre las sucesiones (o series) uniformemente convergentes, $f(z)$ es analítica en el recinto G, solamente se necesita demostrar que $f(z_1) \neq f(z_2)$, si $z_1 \neq z_2$.

Supongamos lo contrario, y sea

$$f(z_1) = f(z_2) = a, \quad z_1 \neq z_2.$$

Entonces, para la función $f(z) - a$, que es el límite de la sucesión uniformemente convergente de funciones univalentes $\{f_n(z) - a\}$, tendremos al menos dos ceros z_1 y z_2 en el recinto G. Por consiguiente, según el teorema del ap. 3.5, cap. cuarto (teorema de Hurwitz), todas las funciones $f_n(z) - a$, comenzando desde cierto índice en adelante, tienen que tener cada una de ellas al menos un cero en cualquier entorno del punto z_1 y en cualquier entorno del punto z_2. Tomando estos entornos tan pequeños que no tengan puntos comunes, sacamos la conclusión de que todas las funciones, comenzando desde una de ellas en adelante, toman el valor a al menos en dos puntos distintos del recinto G, lo cual contradice a la propiedad de univalencia de las funciones $f_n(z)$. El teorema queda demostrado.

§ 2. TEOREMAS DE EXISTENCIA DE RIEMANN Y HILBERT. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES UNIVALENTES

2.1. Ocupémonos del problema fundamental en la teoría de las transformaciones conformes relativo a la posibilidad de transformar biunívoca y conformemente (tal transformación se llamará a continuación, simplemente, conforme) un recinto en otro. Nos basaremos en el hecho de que toda transformación conforme (de primera especie) se realiza mediante una función analítica*).

Como la transformación examinada es homeomorfa, la condición necesaria para que exista una transformación conforme es que exista alguna transformación homeomorfa de los recintos, o sea, que los mismos recintos sean homeomorfos. De aquí que un recinto múltiplemente conexo, por ejemplo, no se pueda transformar en uno simplemente conexo.

No obstante, la condición de homeomorfismo siendo necesaria para la existencia de la transformación conforme, no es por lo gene-

*) Véase la demostración en D. M e n s h o f f, « Les conditions de monogénité », París, 1936, pág. 39 y siguientes.

ral, suficiente. Supongamos, por ejemplo, que G es todo el plano finito z y que D es un círculo: $|w| < R < \infty$. Si existiese una función $w = f(z)$ que transformase conformemente G sobre D, ésta sería unívoca, analítica y acotada en valor absoluto en el plano finito. Pero de aquí, según el teorema de Liouville, se deduce que: $f(z) = \text{const}$, lo cual contradice a la univalencia de la función $f(z)$. Así, pues, no existe una transformación conforme del plano finito G sobre un círculo D (de radio finito). No obstante, estos recintos son homeomorfos; en efecto, la función $w = \frac{2R}{\pi}\frac{z}{|z|}\operatorname{arctg}|z|$ $(w(0)=0)$ realiza una transformación homeomorfa de G sobre D, perteneciente al conjunto infinito de transformaciones de éstas.

Agreguemos, que el plano finito admite una transformación conforme solamente sobre el plano ampliado, del cual se ha excluido un punto finito, o sobre sí mismo. Esto se deduce de que cada función univalente en el plano finito tiene que ser homográfica (en particular, lineal entera (véase el ap. 1.1)).

Consideremos también el caso de recintos biconexos simples. Sea G un anillo circular: $0 < r_1 < |z| < r_2 < \infty$ y sea D también un anillo circular: $0 < R_1 < |w| < R_2 < \infty$.

Supongamos que la función $w = f(z)$ realiza una transformación conforme de G sobre D, y sea $z = \varphi(w)$ la función inversa. Designemos con Γ_ρ la imagen de la circunferencia $\gamma_\rho : z = \rho e^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi;$ $r_1 < \rho < r_2)$. Γ_ρ es una curva cerrada de Jordan; su ecuación tiene la forma $w = f(\rho e^{i\theta})$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$.

De la igualdad

$$1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho}\frac{dz}{z} = \pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)}\,dw = \pm\frac{1}{2\pi}\operatorname{Var}_{\Gamma_\rho}\operatorname{Arg}\varphi(w),$$

donde ambas curvas γ_ρ y Γ_ρ se recorren en la integración en sentido positivo, y se pone el signo más o menos según que el punto $w = f(z)$ recorra la curva Γ_ρ en el mismo sentido que el punto z recorre la curva γ_ρ, o que estos sentidos sean opuestos entre sí, se deduce, ante todo, que el origen de coordenadas está situado en el interior de Γ_ρ. Por otra parte, la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)}\,dw$ es una función continua de ρ, la cual toma solamente valores enteros (± 1). De aquí se deduce que esta integral conserva un valor constante y, por consiguiente, el signo ante la integral ($+$ o $-$) no depende de ρ. Esto significa que el sentido del recorrido del punto $w = f(z)$ a lo largo de cualquier curva Γ_ρ o coincide para todos los valores de ρ, $r_1 < \rho < r_2$, con el sentido del recorrido del punto z a lo largo de la curva γ_ρ, o es para todos los valores de ρ opuesto a este último sentido. Supongamos primero que los sentidos de los recorridos de las curvas Γ_ρ y γ_ρ

coinciden, y calculemos el área limitada por la curva Γ_ρ. Según la fórmula conocida*), este área S_ρ se expresa por la siguiente integral:

$$S_\rho = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\rho} (u\,dv - v\,du) > 0,$$

donde la curva Γ_ρ se recorre en sentido positivo. Transformando esta integral, tendremos:

$$S_\rho = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\rho} \operatorname{Im}\,[(u - iv)(du + i\,dv)] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}\left[\overline{f(\rho e^{i\theta})}\,\frac{\partial f(\rho e^{i\theta})}{\partial\theta}\right] d\theta.$$

Aquí no hemos cambiado el signo ante la integral, precisamente porque al crecimiento de θ desde 0 hasta 2π corresponde el recorrido de la curva Γ_ρ en sentido positivo. Desarrollando $f(\rho e^{i\theta})$ en serie de Laurent, resulta:

$$f(\rho e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \rho^n e^{in\theta}, \qquad \frac{\partial f}{\partial\theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} i n a_n \rho^n e^{in\theta},$$

de donde, basándose en la convergencia absoluta y uniforme (para un valor fijo de ρ) de estos desarrollos, tendremos:

$$S_\rho = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}\left\{\sum_{-\infty}^{+\infty} \overline{a}_n \rho^n e^{-in\theta} \sum_{-\infty}^{+\infty} i n a_n \rho^n e^{in\theta}\right\} d\theta =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} in\,|a_n|^2 \rho^{2n} 2\pi\right\} = \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} n\,|a_n|^2 \rho^{2n} =$$

$$= \pi \sum_1^{\infty} n\,|a_n|^2 \rho^{2n} - \pi \sum_1^{\infty} n\,|a_{-n}|^2 \rho^{-2n} > 0.$$

Como la curva Γ_ρ está situada en el interior de la circunferencia $|w| = R_2$ y, por otra parte, contiene en su interior a la circunferencia $|w| = R_1$, tendremos que tener para todos los valores de ρ, $r_1 < \rho < r_2$:

$$\pi R_1^2 < \pi \sum_{-\infty}^{+\infty} n\,|a_n|^2 \rho^{2n} < \pi R_2^2.$$

---

*) Véase, por ejemplo, J. R. Pastor, P. P. Calleja, C. A. Trejo, Análisis matemático, Volumen II, XXIII, 88-5, pág. 482. (*Nota del T.*)

De aquí se deduce ante todo que las series $\sum_{-\infty}^{\infty} n\,|a_n|^2 r_1^{2n}$ y $\sum_{-\infty}^{+\infty} n\,|a_n|^2 r_2^{2n}$ son convergentes. Demostremos esto para la serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n\,|a_n|^2 r_2^{2n} = \sum_{1}^{\infty} n\,|a_n|^2 r_2^{2n} - \sum_{1}^{\infty} n\,|a_{-n}|^2 r_2^{-2n}.$$

De la última desigualdad deducimos que

$$\sum_{1}^{\infty} n\,|a_n|^2 \rho^{2n} < R_2^2 + \sum_{1}^{\infty} n\,|a_{-n}|^2 \rho^{-2n}$$

para $r_1 < \rho < r_2$. Por esta razón, para cualquier natural N se verifica la desigualdad

$$\sum_{1}^{N} n\,|a_n|^2 \rho^{2n} \leqslant R_2^2 + \sum_{1}^{\infty} n\,|a_{-n}|^2 \rho^{-2n},$$

o bien, pasando al límite para $\rho \to r_2$:

$$\sum_{1}^{N} n\,|a_n|^2 r_2^{2n} \leqslant R_2^2 + \sum_{1}^{\infty} n\,|a_{-n}|^2 r_2^{-2n},$$

de donde se deduce la convergencia de la serie $\sum_{1}^{\infty} n\,|a_n|^2 r_2^{2n}$ y a la vez la desigualdad

$$\sum_{-\infty}^{\infty} n\,|a_n|^2 r_2^{2n} \leqslant R_2^2.$$

De un modo análogo se demuestra la convergencia de la serie $\sum_{1}^{\infty} n\,|a_{-n}|^2 r_1^{-2n}$ y la desigualdad:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} n\,|a_n|^2 r_1^{2n} \geqslant R_1^2.$$

De aquí se desprende que

$$\lambda^2 = \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} n\,|a_n|^2 r_2^{2n}}{\sum_{-\infty}^{\infty} n\,|a_n|^2 r_1^{2n}} \leqslant \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

Observando que

$$\lambda^2-\frac{r_2^2}{r_1^2}=\frac{r_1^2r_2^2\sum\limits_{-\infty}^{\infty} n\,|\,a_n\,|^2\,(r_2^{2n-2}-r_1^{2n-2})}{r_1^2\sum\limits_{-\infty}^{\infty} n\,|\,a_n\,|^2\,r_1^{2n}}\geqslant 0,$$

puesto que $n\,(r_2^{2n-2}-r_1^{2n-2})\geqslant 0$ para todos los valores enteros de n, sacamos la conclusión de que

$$\frac{r_2^2}{r_1^2}\leqslant\lambda^2\leqslant\frac{R_2^2}{R_1^2},$$

es decir,

$$\frac{R_2}{R_1}\geqslant\frac{r_2}{r_1}.$$

Evidentemente, en nuestros razonamientos se podían cambiar de sitio los planos z y w y los recintos G y D. Entonces obtenemos la desigualdad:

$$\frac{R_2}{R_1}\leqslant\frac{r_2}{r_1}.$$

Por consiguiente, $\frac{R_2}{R_1}=\frac{r_2}{r_1}$, es decir, los anillos circulares G y D tienen que ser semejantes entre sí. Luego obtenemos que

$$\lambda^2-\frac{r_2^2}{r_1^2}=\frac{r_1^2r_2^2\sum\limits_{-\infty}^{\infty} n\,|\,a_n\,|^2\,(r_2^{2n-2}-r_1^{2n-2})}{r_1^2\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} n\,|\,a_n\,|^2\,r_1^{2n}}=0,$$

de donde se deduce que

$$a_n=0\quad\text{para}\quad n\neq 0 \text{ y } n\neq 1.$$

Por lo tanto

$$f(z)=a_0+a_1z,$$

es decir, es una función lineal entera.

Consideremos ahora el caso en que el sentido del recorrido del punto $w=f(z)$ por la curva Γ_ρ es opuesto al sentido del recorrido del punto z por la circunferencia γ_ρ. Entonces la transformación $w'=\frac{1}{w}$ convierte el anillo D en un nuevo anillo D': $\frac{1}{R_2}<|\,w'\,|<\frac{1}{R_1}$, de modo que la función $w'=\frac{1}{f(z)}$ transforma conformemente el anillo G: $r_1<|\,z\,|<r_2$ en el anillo D'.

Como $\operatorname{Arg} w'=-\operatorname{Arg} f(z)=-\operatorname{Arg} w$, resulta que la curva Γ'_ρ, que es la imagen de la circunferencia γ_ρ en la transformación

$w' = \frac{1}{f(z)}$, queda recorrida por el punto w' en el sendito opuesto al recorrido de la curva Γ_ρ realizado por el punto $w = f(z)$ y, por consiguiente, en el mismo sentido en que el punto z recorre la circunferencia γ_ρ. Según lo demostrado, obtenemos:

$$\frac{1 : R_1}{1 : R_2} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1},$$

o sea, resulta que los anillos G y D son de nuevo semejantes entre sí. Además, para la función $\frac{1}{f(z)}$ obtenemos:

$$\frac{1}{f(z)} = a_0 + a_1 z,$$

es decir, $f(z)$ es una función homográfica.

Haciendo un resumen de los resultados obtenidos, llegamos al siguiente teorema:

Para que exista una transformación conforme del anillo circular G: $r_1 < |z| < r_2$ sobre el anillo circular D: $R_1 < |w| < R_2$ es necesario y suficiente que estos anillos sean semejantes entre sí, es decir, que se cumpla la condición $\frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1}$. Cumpliéndose esta condición la transformación puede realizarse solamente mediante una función homográfica (en particular, lineal entera).

Por lo tanto, los anillos circulares que son recintos homeomorfos entre sí, por lo general (o sea, sin una condición especial), no pueden transformarse conformemente uno en el otro. (El hecho de que dos anillos G y D son verdaderamente homeomorfos, se deduce considerando la función

$$w = \left(R_2 \frac{|z| - r_1}{r_2 - r_1} + R_1 \frac{r_2 - |z|}{r_2 - r_1}\right) \frac{z}{|z|},$$

la cual transforma G sobre D).

Tanto más admirable es el hecho de que para cualesquiera dos recintos s i m p l e m e n t e c o n e x o s del plano ampliado, cuyas fronteras contengan más de un punto cada una, siempre existe una transformación conforme de uno de ellos sobre el otro. Para demostrar esta proposición, es suficiente establecer que para cada recinto G de este tipo existe una transformación conforme sobre un círculo K_R: $|w| < R$ con el centro en el origen de coordenadas. En efecto, si la función $w = f(z)$ transforma conformemente G sobre K_R y la función $w' = F(z')$ transforma conformemente otro recinto D sobre el círculo $K_{R'}$: $|w'| < R'$, entonces la función $w' = \frac{R'}{R} w$ transforma conformemente el círculo K_R sobre $K_{R'}$, la función $z' = F^{-1}(w')$ transforma conformemente el círculo $K_{R'}$

sobre D y, por consiguiente, la función

$$z' = F^{-1}\left[\frac{R'}{R} f(z)\right]$$

transforma conformemente el recinto G sobre D.

2.2. Teorema de existencia de la transformación conforme (Riemann). *Todo recinto simplemente conexo G del plano ampliado, cuya frontera contenga más de un punto, se puede transformar conformemente sobre un círculo con el centro en el origen de coordenadas.*

Demostremos primero que entre las funciones univalentes en el recinto dado (pueden servir de ejemplos de funciones univalentes en el recinto G las funciones homográficas), existen funciones que son acotadas en valor absoluto.

Si el mismo recinto G está acotado, entonces tal función es, por ejemplo, $f(z) = z$.

Si G no está acotado, pero existe un punto z_0 exterior a G, entonces existe también un círculo $|z - z_0| < \rho$ situado fuera de G. En este caso, $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ es un ejemplo de función univalente en G y acotada $\left(|f(z)| < \frac{1}{\rho} \text{ para } z \in G\right)$.

Supongamos, finalmente, que el recinto G no está acotado y no tiene puntos exteriores. Según la condición, existen al menos dos puntos frontera de G distintos: α y β. Como el recinto G es simplemente conexo, los puntos α y β pertenecen al continuo Γ que representa la frontera de este recinto. Consideremos la función $F(z) = \sqrt{\frac{z-\alpha}{z-\beta}}$. Esta función biforme posee dos puntos de ramificación: α y β. Como el recinto G se obtiene del plano excluyendo un continuo que liga α y β, la función $F(z)$ se descompone en el recinto G en dos ramas uniformes analíticas $F_1(z)$ y $F_2(z)$, cuyos valores en cada punto del recinto G se distinguen entre sí solamente en el signo. Estas funciones son univalentes en el recinto G, puesto que de la igualdad

$$\sqrt{\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta}} = \sqrt{\frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta}}$$

se deduce que

$$\frac{z_1-\alpha}{z_1-\beta} = \frac{z_2-\alpha}{z_2-\beta},$$

y, por consiguiente,

$$z_1 = z_2.$$

Por esta razón, las funciones $w = F_1(z)$ y $w = F_2(z)$ transforman conformemente G en dos recintos: G_1 y G_2. Evidentemente, G_1 y G_2

no tienen puntos comunes, puesto que la existencia de un punto común $w = F(z_1) = F(z_2)$, debido al cálculo que acabamos de hacer, significaría la igualdad $z_1 = z_2 = z$, lo cual contradice al hecho de que $F_1(z) = -F_2(z)$ y de que las funciones $F_1(z)$ y $F_2(z)$ no toman en ningún punto los valores 0 y ∞. Por consiguiente, cada punto w_0 del recinto G_2 es exterior para G_1, de modo que existe un círculo $|w - w_0| < \rho$ perteneciente al exterior del recinto G_1. Formando la función

$$\frac{1}{w-w_0} = \frac{1}{F_1(z)-w_0} = f(z),$$

hallamos que ésta es univalente en el recinto G y está acotada $\left(|f(z)| < \frac{1}{\rho}\right)$.

En resumen, en todos los casos existen en el recinto G funciones univalentes y acotadas. Sea $f(z)$ una de tales funciones y sea z_0 un punto finito fijado del recinto G. Entonces $f'(z_0) \neq 0$ (debido a la univalencia de $f(z)$) y, por consiguiente,

$$F(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{f'(z_0)}$$

es una función acotada y univalente en el recinto G, la cual se anula en el punto z_0 y posee en este punto derivada, igual a 1.

Designemos con E_{z_0} el conjunto de todas las funciones que poseen en el recinto G las propiedades indicadas. Para cada función $F(z) \in E_{z_0}$ existe el extremo superior finito del módulo en el recinto G:

$$M(F) = \sup_G |F(z)| > 0.$$

Está claro que $M(F)$ significa geométricamente el radio del círculo mínimo con el centro en el origen de coordenadas que contiene a la imagen del recinto G en la transformación $w = F(z)$. Para funciones distintas $F(z) \in E_{z_0}$, por lo general, resultarán diferentes números $M(F)$.

Ahora demostraremos que en el conjunto E_{z_0} existe una función $f(z)$, para la cual $M(F)$ alcanza el valor mínimo R_{z_0}:

$$R_{z_0} = \inf_{F(z)\in E_{z_0}} M(F).$$

Precisamente esta función transformará conformemente el recinto G en el círculo $|w| < R_{z_0}$.

Consideremos una sucesión de funciones $F_n(z)$ del conjunto E_{z_0}, para las cuales se cumpla la condición

$$\lim_{n\to\infty} M(F_n) = \inf_{F(z)\in E_{z_0}} M(F) = R_{z_0}$$

(tal sucesión existe, debido a la definición misma de extremo inferior $\inf M(F)$). Esta sucesión estará uniformemente acotada en el recinto G, puesto que está acotada la sucesión convergente de números $\{M(F_n)\}$:

$$M(F_n) = \sup_G |F_n(z)| < M' \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Según el teorema de Montel, la sucesión $\{F_n(z)\}$ es compacta en el recinto G, de modo que de ella se puede extraer una sucesión parcial $\{F_{n_k}(z)\}$ uniformemente convergente en el interior de G hacia una función analítica $f(z)$. Para esta función tendremos:

$$f(z_0) = \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = \lim_{k\to\infty} F'_{n_k}(z_0) = 1,$$

de donde se deduce que $f(z) \not\equiv \text{const}$, y, por consiguiente, según el teorema del ap. 1.4, es univalente. Luego, de las relaciones

$$f(z) = \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(z) \quad \text{y} \quad |F_{n_k}(z)| \leqslant M(F_{n_k}) \to R_{z_0}$$

se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$

$$|f(z)| < |F_{n_k}(z)| + \frac{\varepsilon}{2} < R_{z_0} + \varepsilon$$

para todos los valores de n_k suficientemente grandes, de donde, debido a la arbitrariedad de ε, sacamos la conclusión de que

$$|f(z)| \leqslant R_{z_0} \qquad (z \in G).$$

Pero, como $f(z)$ es univalente y acotada en el recinto G y satisface a las condiciones

$$f(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad f'(z_0) = 1,$$

resulta que $f(z) \in E_{z_0}$ y $\sup |f(z)| \geqslant R_{z_0}$.

Confrontando las desigualdades obtenidas, obtenemos:

$$\sup_G |f(z)| = R_{z_0}.$$

Demostremos que la función $w = f(z)$ transforma conformemente el recinto G en el círculo K_0: $|w| < R_{z_0}$. Como de las propiedades obtenidas de la función $f(z)$ se deduce que la imagen $f(G)$ del recinto G está contenida en el círculo $|w| < R_{z_0}$, es suficiente cerciorarse de que cada punto del círculo K_0 pertenece a $f(G)$. Supongamos que esto no es así; entonces dentro de K_0 tienen que estar situados algunos puntos frontera del conjunto $f(G)$. Designemos uno de ellos con $w_0 (0 < |w_0| < R_{z_0})$ y formemos, consecutivamente, las funciones:

$$w = f(z), \quad w_1 = R^2_{z_0} \frac{w - w_0}{R^2_{z_0} - \bar{w}_0 w} = f_1(z), \quad w_2 = \sqrt{R_{z_0} w_1} = f_2(z)$$

(se fija una de las dos ramas de esta función),

$$w_3 = R_{z_0}^2 \frac{w_2 - f_2(z_0)}{R_{z_0}^2 - \overline{f_2(z_0)}\cdot w_2} = f_3(z) \quad \text{y} \quad w_4 = \frac{w_3}{f_3'(z_0)}.$$

Cada una de las funciones $w_j = f_j(z)$, considerada como función de w_{j-1} ($w_0 = w$), es univalente en el recinto $f_{j-1}(G)$ ($f_0(G) = f(G)$). Por lo tanto, todas estas funciones, consideradas como funciones de z, son univalentes en el recinto G.

La función $w_1(w)$ transforma el círculo K_0 en sí mismo, de modo que lleva el punto w_0 al origen de coordenadas. En este caso $f(G)$ se transforma en un recinto $f_1(G)$ contenido en K_0; el punto $w_1 = 0$ es un punto frontera para $f_1(G)$. La función $w_2(w_1)$ tiene dos ramas uniformes y analíticas en el recinto $f_1(G)$. Fijando una de ellas y observando que sus valores pertenecen al círculo K_0, y que al punto $w_1 = 0$ le corresponde el punto $w_2 = 0$, hallamos que $f_2(G)$ de nuevo pertenece al círculo K_0 y el punto $w_2 = 0$ es un punto frontera para $f_2(G)$. La función $w_3(w_2)$ transforma el círculo K_0 en sí mismo y lleva el punto $f_2(z_0)$ al origen de coordenadas. Por consiguiente, la función univalente $f_3(z)$ se anula en el punto z_0 y transforma el recinto G en un recinto $f_3(G)$, perteneciente al círculo K_0.

Para su derivada $f_3'(z_0)$ obtenemos el valor:

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_0} \cdot \left.\frac{dw_1}{dw}\right|_{w=f(z_0)=0} \cdot \left.\frac{dw_2}{dw_1}\right|_{w_1=f_1(z_0)=-w_0} \left.\frac{dw_3}{dw_2}\right|_{w_2=f_2(z_0)=\sqrt{-R_{z_0}w_0}} =$$

$$= 1\cdot\frac{R_{z_0}^2 - |w_0|^2}{R_{z_0}^2}\,\frac{\sqrt{R_{z_0}}\,+}{2\sqrt{-w_0}}\cdot\frac{R_{z_0}^2}{R_{z_0}^2 - R_{z_0}|w_0|} = \frac{R_{z_0} + |w_0|}{2\sqrt{-R_{z_0}w_0}}.$$

Como $|w_0| < R_{z_0}$, se tiene que $|f_3'(z_0)| > 1$. Por esto, $f_3(z)$ no pertenece al conjunto E_{z_0}. Dividiéndola por $f_3'(z_0)$, obtenemos una función $f_4(z)$ del conjunto E_{z_0} ($f_4(z)$ es univalente en el recinto G y satisface a las condiciones: $f_4(z_0) = 0$ y $f_4'(z_0) = 1$). Pero esta última transforma el recinto G en un recinto $f_4(G)$ contenido en el círculo

$$|w_4| < \frac{R_{z_0}}{|f_3'(z_0)|} < R_{z_0},$$

y, por consiguiente,

$$\sup_G |f_4(z)| \leqslant \frac{R_{z_0}}{|f_3'(z_0)|} < R_{z_0};$$

esto contradice a la definición del número R_{z_0} como extremo inferior del conjunto de números $\sup\limits_{z\in G} |F(z)|$, $F(z) \in E_{z_0}$. El teorema queda demostrado.

Durante la demostración hemos hallado que la función que realiza la transformación conforme del recinto en el círculo, se puede

someter a las condiciones complementarias:

$$f(z_0) = 0 \text{ y } f'(z_0) = 1,$$

donde z_0 es un punto finito arbitrario del recinto.

El círculo K_0 obtenido tiene el centro en el origen de coordenadas y un radio R_{z_0} completamente determinado. Este se llama radio de conformidad del recinto G respecto del punto z_0. Tomando en lugar de $f(z)$ la función $F(z) = \frac{1}{R_{z_0}} f(z)$, obtendremos la transformación del recinto G en el círculo unidad $|w| < 1$. La función que realiza la transformación satisface a las condiciones:

$$F(z_0) = 0, \quad F'(z_0) > 0.$$

Geométricamente, esto significa que el punto z_0 del recinto G se traslada al centro del círculo unidad y que las tangentes a todas las curvas que pasan por el punto z_0 no observan rotación alguna al pasar a las imágenes de estas curvas, las cuales pasan por el centro del círculo.

Demostremos que se verifica el siguiente teorema de unicidad para las transformaciones conformes.

Teorema. *Existe solamente una función $F(z)$ que transforma conformemente el recinto G en el círculo $|w| < 1$ y que satisface a las condiciones*:

$$F(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad F'(z_0) > 0,$$

donde z_0 es un punto finito dado del recinto G.

En efecto, sea $w_1 = F_1(z)$ una función que satisfaga a las mismas condiciones. Entonces la función $w_1 = F_1F^{-1}(w) = \Phi(w)$, que es uniforme y analítica en el círculo unidad, satisface a las condiciones:

$$\Phi(0) = F_1F^{-1}(0) = F_1(z_0) = 0, \qquad \Phi'(0) = \frac{1}{F'(z_0)} F_1'(z_0) > 0$$

y transforma conformemente este círculo en sí mismo. En virtud del lema de Schwarz (ap. 6.2, cap. tercero), se tiene:

$$|w_1| = |\Phi(w)| \leqslant |w|.$$

Pero este mismo razonamiento puede aplicarse también a la función inversa

$$w = FF_1^{-1}(w_1) = \Phi^{-1}(w_1).$$

Por esto, se tiene:

$$|w| = |\Phi^{-1}(w_1)| \leqslant |w_1|,$$

de donde se deduce que se verifica la igualdad

$$|\Phi(w)| = |w|, \quad |w| < 1,$$

es decir, según el lema de Schwarz,

$$\Phi(w) = e^{i\alpha}w.$$

Como $\Phi'(0) > 0$, se deduce que $e^{i\alpha} = 1$, por consiguiente:

$$\Phi(w) = w, \quad F_1F^{-1}(w) = w,$$

o sea

$$F_1(z) = F(z)$$

en el recinto G, con lo cual se termina la demostración.

2.3. Sea $\{G_n\}$ una sucesión de recintos simplemente conexos del plano finito z, que contienen un círculo fijado k con el centro en z_0. Consideremos el conjunto E de todos los puntos del plano, cada uno de los cuales posee un entorno perteneciente a todos los recintos G_n, comenzando desde cierto índice n. Evidentemente, todos los puntos del círculo k pertenecen a E. Por esta razón, E es un conjunto no vacío. Además, éste es abierto y, por consiguiente, representa un conjunto finito o numerable de recintos que no tienen puntos comunes dos a dos (véase el ap. 4.2, cap. primero). Aquel que contiene al punto z_0 y, por consiguiente, al círculo k, llamaremos n ú c l e o de la sucesión de los recintos $\{G_n\}$ (respecto del punto z_0) y lo designaremos con G_{z_0}. El núcleo G_{z_0} es el recinto máximo entre los que contienen a z_0 y poseen la propiedad de que cualquier conjunto cerrado F de puntos del mismo pertenece a todos los recintos G_n, comenzando desde uno de ellos. En otras palabras, todo recinto g que contiene al punto z_0 y posee la propiedad indicada, está contenido en G_{z_0}. En efecto, si $F \subset G_{z_0}$, entonces para cada punto $\zeta \in F$ se puede señalar un entorno U_ζ, perteneciente a los recintos G_n para $n > \nu(\zeta)$. Cubriendo F con un número finito de tales entornos U_{ζ_j} $(j = 1, \ldots, m)$ (lo cual es posible según el lema de Heine-Borel) y eligiendo el mayor de los números $\nu(\zeta_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$ — sea éste el número ν—, hallaremos que para $n > \nu$ todos los entornos U_{ζ_j} y, por consiguiente, también todo el conjunto F, estarán contenidos en G_n. Si alguno de los recintos g posee una propiedad análoga, entonces para cada uno de sus puntos tiene que existir un entorno perteneciente a todos los recintos G_n, comenzando desde uno de ellos. Por esta razón $g \subset E$, y si g contiene al punto z_0, entonces g pertenece a aquella componente conexa del conjunto E que contiene a este punto, es decir, $g \subset G_{z_0}$. En la fig. 3 están representados los recintos G_n, cada uno de los cuales consta de dos rectángulos fijados D' y D'', unidos entre sí por el rectángulo δ_n de base constante l y cuya altura h_n decrece indefinidamente. En este ejemplo el conjunto E consta

de los rectángulos D' y D''. El núcleo de la sucesión $\{G_n\}$ respecto del punto $z_0' \in D'$ es el rectángulo D', el núcleo de esta misma sucesión respecto del punto $z_0'' \in D''$ es el rectángulo D''.

Diremos que la sucesión $\{G_n\}$ converge hacia su núcleo G_{z_0}, si cualquier sucesión parcial de estos recintos posee el mismo núcleo respecto del punto z_0 que toda la sucesión.

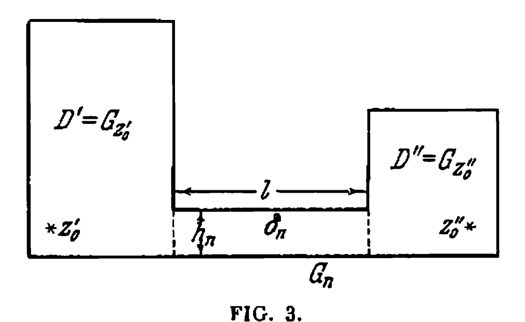


FIG. 3.

En nuestro ejemplo la sucesión $\{G_n\}$ converge hacia el núcleo D' (respecto del punto z_0'), y también hacia el núcleo D'' (respecto del punto z_0'').

En la fig. 4 se muestra un ejemplo de sucesión divergente de recintos $\{G_n\}$. En este caso, cada uno de los recintos G_{2m-1} coincide con

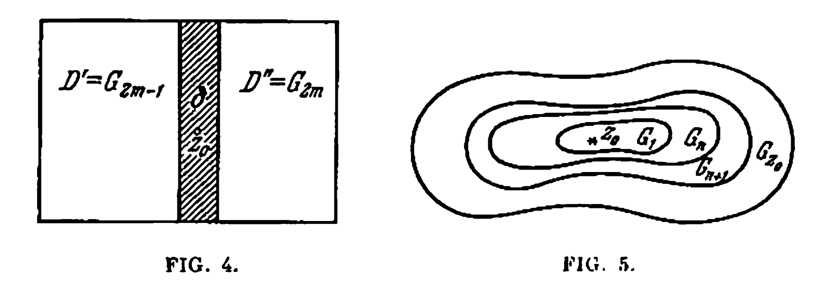


FIG. 4. FIG. 5.

un mismo rectángulo D', y cada recinto G_{2m} coincide con el rectángulo D'', distinto de D', pero que tiene una parte común con D': el rectángulo δ. El núcleo de la sucesión $\{G_n\}$ respecto de cualquier punto $z_0 \in \delta$ es el rectángulo δ. Sin embargo, el núcleo de la sucesión parcial $\{G_{2m-1}\}$ respecto de este mismo punto es D', y el núcleo

de la sucesión parcial $\{G_{2m}\}$ respecto del punto z_0 es D''. De aquí se deduce que en este ejemplo la sucesión $\{G_n\}$ es divergente.

El siguiente teorema pone de relieve el valor de los conceptos introducidos aquí para la teoría de las transformaciones conformes.

Teorema de los recintos de fronteras variables (Carathéodory). *Sea $\{G_n\}$ una sucesión de recintos contenidos en un círculo fijado K: $|z| < R$ (es decir, uniformemente acotados) y que contienen en su interior a un círculo k: $|z - z_0| < \rho$. Designemos con $w = f_n(z)$ las funciones que transforman conformemente los recintos G_n en el círculo unidad Δ: $|w| < 1$ y que satisfacen a las condiciones $f_n(z_0) = 0$, $f'_n(z_0) > 0$, y con $w = f(z)$, la función que transforma conformemente el núcleo G_{z_0} de la sucesión $\{G_n\}$ en el círculo unidad y que satisface a las condiciones $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$, y sean $z = \varphi_n(w)$ y $z = \varphi(w)$ las funciones inversas a las indicadas. En estas condiciones, de la convergencia de la sucesión de los recintos $\{G_n\}$ a su núcleo G_{z_0} se deduce la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n(z)\}$ en el interior de G_{z_0} hacia la función $f(z)$ y de la sucesión $\{\varphi_n(w)\}$ en el interior de Δ hacia la función $\varphi(w)$. Recíprocamente, la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n(z)\}$ hacia la función $f(z)$ (o $\{\varphi_n(w)\}$ hacia $\varphi(w)$) implica la convergencia de la sucesión $\{G_n\}$ hacia su núcleo G_{z_0}.*

Demostración. Sin hacer por ahora ninguna suposición acerca de la convergencia de la sucesión $\{G_n\}$, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$. Cada una de éstas está definida en su recinto G_n, y puede ocurrir que para cualquiera de ellas existan tales puntos del núcleo G_{z_0}, en los cuales la función dada no esté definida (es suficiente figurarse una sucesión creciente de recintos $\{G_n\}$: $\overline{G}_n \subset G_{n+1}$, que aproximan al recinto G por el interior, el cual es, en este caso, el núcleo de la sucesión $\{G_n\}$ (fig. 5)). No obstante, cada conjunto cerrado de puntos del recinto G_{z_0}, en particular, cada círculo cerrado perteneciente a G_{z_0}, está contenido en todos los recintos G_n, comenzando desde uno de ellos, y, por consiguiente, todas las funciones $\{f_n(z)\}$, comenzando desde una de ellas, están definidas y son analíticas en este conjunto. Como todos los conceptos y teoremas, relativos a la compacidad de las familias de las funciones analíticas, tratan solamente del comportamiento de las funciones en los conjuntos cerrados de puntos del recinto dado, podemos aplicarlos en el caso considerado a la sucesión $\{f_n(z)\}$ y al recinto G_{z_0}.

Fijemos una sucesión arbitraria de números naturales $\{n_k\}$, creciente indefinidamente, y sea G'_{z_0} el núcleo de la sucesión de recintos $\{G_{n_k}\}$; como las funciones $\{f_{n_k}(z)\}$ están uniformemente acotadas ($|f_{n_k}(z)| < 1$), de $\{n_k\}$ se puede extraer una sucesión parcial de índices $\{n'_k\}$ tal, que la sucesión de funciones $\{f_{n'_k}(z)\}$

sea uniformemente convergente en el interior de G'_{z_0}. Extraigamos de $\{n'_k\}$ una nueva sucesión parcial $\{\tilde{n}_k\}$ de modo que la sucesión de funciones $\{\varphi_{\tilde{n}_k}(w)\}$ sea uniformemente convergente en el interior del círculo unidad (lo cual es posible, puesto que las funciones $\varphi_n(w)$ están uniformemente acotadas en el círculo unidad: $|\varphi_n(w)| < R$). Evidentemente, la sucesión $\{f_{\tilde{n}_k}(z)\}$, como anteriormente, será uniformemente convergente en el interior de G'_{z_0}. Sin embargo, el núcleo $\tilde{G}_{z_0}$ de la sucesión de recintos $\{G_{\tilde{n}_k}\}$ puede diferenciarse de G'_{z_0}; en todo caso, $\tilde{G}_{z_0} \supset G'_{z_0}$ (puesto que la sucesión $\{G_{\tilde{n}_k}\}$ está contenida en la sucesión $\{G'_{n_k}\}$).

Como la sucesión de funciones $\{f_{\tilde{n}_k}(z)\}$ está uniformemente acotada y es convergente en la parte G'_{z_0} del recinto $\tilde{G}_{z_0}$, resulta, según el teorema de Vitali, que la misma es uniformemente convergente en el interior de $\tilde{G}_{z_0}$. En resumen, hemos establecido que de cualquier sucesión de números naturales $\{n_k\}$ se puede extraer una sucesión parcial $\{\tilde{n}_k\}$ tal, que la sucesión de funciones $\{f_{\tilde{n}_k}(z)\}$ converja uniformemente en el interior del núcleo $\tilde{G}_{z_0}$ de la sucesión de recintos $\{G_{\tilde{n}_k}\}$ hacia una función analítica $\tilde{f}(z)$, y las funciones inversas a ellas $\{\varphi_{\tilde{n}_k}(w)\}$ converjan uniformemente en el interior del círculo $|w| < 1$ hacia una función analítica $\tilde{\varphi}(w)$. Evidentemente,

$$\tilde{f}(z_0) = \lim_{\tilde{n}_k \to \infty} f_{\tilde{n}_k}(z_0) = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{f}'(z_0) = \lim_{\tilde{n}_k \to \infty} f'_{\tilde{n}_k}(z_0) \geqslant 0,$$

y exactamente igual

$$\tilde{\varphi}(0) = \lim_{\tilde{n}_k \to \infty} \varphi_{\tilde{n}_k}(0) = z_0 \quad \text{y} \quad \tilde{\varphi}'(0) = \lim \varphi'_{\tilde{n}_k}(0) \geqslant 0.$$

Así, pues, existen límites finitos tanto para los números $f'_{\tilde{n}_k}(z_0)$, como para los números inversos a ellos $\varphi'_{\tilde{n}_k}(0) = \frac{1}{f'_{\tilde{n}_k}(z_0)}$. De aquí se deduce que ambos límites son distintos de cero, o sea, $\tilde{f}'(z_0) > 0$ y $\tilde{\varphi}'(0) > 0$, siendo, además, $\tilde{f}'(z_0) \cdot \tilde{\varphi}'(0) = 1$. Luego, $\tilde{f}(z) \not\equiv \text{const}$ y $\tilde{\varphi}(w) \not\equiv \text{const}$, de donde, según el teorema del ap. 1.4, sacamos la conclusión de que $\tilde{f}(z)$ y $\tilde{\varphi}(w)$ son univalentes en los recintos correspondientes $\tilde{G}_{z_0}$ y Δ.

Como $|f_{\tilde{n}_k}(z)| < 1$, se tiene, $|\tilde{f}(z)| \leqslant 1$, es decir, la imagen $\tilde{f}(\tilde{G})_{z_0}$ está contenida en el círculo unidad Δ; además, $\tilde{f}(\tilde{G}_{z_0})$ contiene

al punto 0. La imagen $\tilde{\varphi}(\Delta)$ contiene al punto z_0; demostremos que ella está contenida en el recinto $\tilde{G}_{z_0}$. Sea $\tilde{w} \in \Delta$; entonces $\tilde{z} = \tilde{\varphi}(\tilde{w})$ es un punto del recinto $\tilde{\varphi}(\Delta)$. Cerciorémonos de que existe un entorno del punto $\tilde{z}$ que está contenido en todos los recintos $G_{\tilde{n}_k}$, comenzando desde uno de ellos. La función $z = \tilde{\varphi}(w)$ transforma la circunferencia δ: $|w - \tilde{w}| = \tilde{\rho}$, contenida en Δ, en una curva cerrada de Jordan γ, contenida en $\tilde{\varphi}(\Delta)$. Además, la parte interior de la curva γ pertenece a $\tilde{\varphi}(\Delta)$ y contiene al punto $\tilde{z}$. Construyamos un círculo cerrado C: $|z - \tilde{z}| \leqslant \tilde{r}$, situado en el interior de γ, y designemos con ε la distancia entre C y γ; evidentemente, $\varepsilon > 0$. Para $w \in \delta$ y $\zeta \in C$, se tiene:

$$|\tilde{\varphi}(w) - \zeta| \geqslant \varepsilon;$$

por otra parte, para todos los valores $\tilde{n}_k > N$ en la circunferencia δ tiene que verificarse la desigualdad

$$|\varphi_{\tilde{n}_k}(w) - \tilde{\varphi}(w)| < \varepsilon.$$

De aquí, según el teorema de Rouché (véase el ap. 3.5, cap. cuarto), sacamos la conclusión de que las funciones $\tilde{\varphi}(w) - \zeta$ y $\varphi_{\tilde{n}_k}(w) - \zeta = [\tilde{\varphi}(w) - \zeta] + [\varphi_{\tilde{n}_k}(w) - \varphi(w)]$ poseen una misma cantidad de ceros en el interior de γ, es decir, cada punto ζ del círculo C pertenece a la imagen $\varphi_{\tilde{n}_k}(\Delta) = G_{\tilde{n}_k}$ para $\tilde{n}_k > N$. Así, pues, cada punto $\tilde{z} \in \tilde{\varphi}(\Delta)$ posee un entorno ($|z - \tilde{z}| < \tilde{r}$), perteneciente a todos los recintos $G_{\tilde{n}_k}$, comenzando desde uno de ellos. Como $\tilde{\varphi}(\Delta)$ es un recinto que contiene a z_0, de aquí, en virtud de la propiedad fundamental del núcleo de la sucesión $\{G_{\tilde{n}_k}\}$, se deduce que $\tilde{\varphi}(\Delta) \subset \tilde{G}_{z_0}$. Esto es lo que se afirmaba.

Como $z = \tilde{\varphi}(w)$ transforma conformemente Δ en $\tilde{\varphi}(\Delta) \subset \tilde{G}_{z_0}$ y $w = \tilde{f}(z)$ transforma conformemente $\tilde{G}_{z_0}$ en el recinto $\tilde{f}(\tilde{G}_{z_0}) \subset \subset \Delta$, sacamos la conclusión de que la función $\psi(w) = \tilde{f}\tilde{\varphi}(w)$ transforma conformemente Δ en el recinto $\tilde{f}(\tilde{G}_{z_0})$, el cual está contenido en Δ. Observando que $\psi(0) = \tilde{f}\tilde{\varphi}(0) = \tilde{f}(z_0) = 0$ y $\psi'(0) = \tilde{\varphi}'(0) \cdot \tilde{f}'(z_0) = 1$, deducimos, según el lema de Schwarz, que $\psi(w) = e^{i\alpha}w$, siendo $e^{i\alpha} = \psi'(0) = 1$. En resumen,

$$\psi(w) = \tilde{f}\tilde{\varphi}(w) = w \quad \text{o bien} \quad \tilde{\varphi}(w) = \tilde{f}^{-1}(w),$$

es decir, $\tilde{\varphi}(w)$ es una función inversa respecto de la función $\tilde{f}(z)$. Si, por consiguiente, w es un punto arbitrario del círculo Δ y $z =$

$= \tilde{\varphi}(w) \in \tilde{\varphi}(\Delta) \subset \tilde{G}_{z_0}$, se tiene $\tilde{f}(z) = w \in \tilde{f}(\tilde{G}_{z_0})$. Por esta razón, el recinto $\tilde{f}(\tilde{G}_{z_0})$, el cual está contenido en Δ, contiene cualquier punto de Δ, es decir, coincide con Δ. Del mismo modo, $\tilde{\varphi}(\Delta)$ coincide con $\tilde{G}_{z_0}$. Hemos hallado que las funciones $w = \tilde{f}(z)$ y $z = \tilde{\varphi}(w)$ son inversas entre sí y la primera de ellas realiza una transformación conforme del núcleo $\tilde{G}_{z_0}$ de la sucesión $\{G_{\tilde{n}_k}\}$ en el círculo unidad; además, se cumplen las condiciones $\tilde{f}(z_0) = 0$ y $\tilde{f}'(z_0) > 0$.

Después de haber establecido esto, la demostración de la primera parte del teorema se termina del modo siguiente.

Supongamos que la sucesión dada de recintos $\{G_n\}$ converge hacia su núcleo G_{z_0}. Entonces para cualquier sucesión parcial de recintos $\{G_{\tilde{n}_k}\}$ el núcleo queda el mismo: $\tilde{G}_{z_0} = G_{z_0}$. Por consiguiente, la función límite $f(z) = \lim f_{n_k}(z)$ transforma en el círculo unidad un mismo recinto G_{z_0} en las condiciones invariables $\tilde{f}(z_0) = 0$ y $\tilde{f}'(z_0) > 0$. De aquí, según el teorema de unicidad para las transformaciones conformes, se deduce que todas las sucesiones parciales posibles de funciones $\{f_{\tilde{n}_k}(z)\}$, uniformemente convergentes, poseen un mismo límite $f(z) = \tilde{f}(z)$. Suponiendo que la sucesión $\{f_n(z)\}$ no converge hacia $f(z)$ uniformemente en el interior de G_{z_0}, tendríamos que tener un conjunto cerrado $F \subset G_{z_0}$ en el cual no tendría lugar la convergencia uniforme. Esto significaría la existencia de un número $\alpha > 0$, de una sucesión de puntos $\{z_k\}$, pertenecientes a F, y de unos números naturales n_k, crecientes indefinidamente, tales que

$$|f(z_k) - f_{n_k}(z_k)| \geqslant \alpha \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Pero, debido a la compacidad, de la sucesión $\{f_{n_k}(z)\}$ se puede extraer una sucesión parcial $\{f_{n_{k_m}}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en el interior de G_{z_0} y, en particular, en el conjunto F. En este caso, la función límite de la sucesión parcial será $f(z)$. De aquí se deduce que, para todos los valores suficientemente grandes de k_m, en el conjunto F se verifica la desigualdad

$$|f(z) - f_{n_{k_m}}(z)| < \alpha.$$

Pero esto contradice al hecho de que en los puntos z_{k_m} tiene que verificarse la desigualdad

$$|f(z_{k_m}) - f_{n_{k_m}}(z_{k_m})| \geqslant \alpha.$$

De la contradicción obtenida se deduce que la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de G_{z_0}.

La proposición recíproca (la segunda parte del teorema) se demuestra del siguiente modo.

Supongamos que la sucesión de recintos $\{G_n\}$ no converge a su núcleo G_{z_0}. Entonces existe una sucesión parcial $\{G_{n_k}\}$, cuyo núcleo es distinto de G_{z_0} (contiene a G_{z_0} como parte propia). Extraigamos de $\{f_{n_k}(z)\}$ una nueva sucesión parcial $\{f_{\tilde{n}_k}(z)\}$, que sea uniformemente convergente en el interior del núcleo $\tilde{G}_{z_0}$ de la sucesión parcial de recintos $\{G_{\tilde{n}_k}\}$ correspondiente. La función límite $\tilde{f}(z) = \lim_{\tilde{n}_k \to \infty} f_{\tilde{n}_k}(z)$ transforma conformemente el recinto $\tilde{G}_{z_0}$ en el círculo $|w| < 1$ y, por consiguiente, no coincide con la función $f(z)$, la cual transforma conformemente a G_{z_0}, o sea, a la parte propia de este recinto, en el mismo círculo. De aquí se deduce que $\{f_n(z)\}$ no puede converger hacia $f(z)$, si la sucesión de recintos $\{G_n\}$ no converge a su núcleo G_{z_0}. Con esto se termina la demostración del teorema.

Para ilustrar este teorema, volvamos a examinar la sucesión de recintos $\{G_n\}$ representados en la fig. 3. Designemos con $f_n(z)$ y $F_n(z)$ las funciones que transforman conformemente G_n en el círculo unidad y satisfacen, respectivamente, a las condiciones siguientes:

$$f_n(z_0') = 0, \quad f_n'(z_0') > 0 \quad \text{y} \quad F_n(z_0'') = 0, \quad F_n'(z_0'') > 0.$$

Entonces la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente en el interior del rectángulo D' hacia la función $f(z)$ que transforma D' en el círculo unidad, y la sucesión $\{F_n(z)\}$ converge uniformemente en el interior de D'' hacia la función $F(z)$ que transforma D'' en el círculo unidad.

2.4. En este apartado estudiaremos algunas de las propiedades generales de las funciones univalentes.

T e o r e m a 1. (T e o r e m a d e l a s á r e a s). *Sea*

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \alpha_1 \zeta^{-1} + \alpha_2 \zeta^{-2} + \ldots + \alpha_n \zeta^{-n} + \ldots$$

una función univalente fuera del círculo unidad. Entonces

$$\sum_{1}^{\infty} n |\alpha_n|^2 \leqslant 1. \qquad (2.4:1)$$

D e m o s t r a c i ó n. La función $w = F(\zeta)$ transforma la circunferencia $|\zeta| = \rho > 1$ en una curva cerrada de Jordan γ_ρ, la cual limita un recinto de área σ_ρ; además, a un recorrido simple de la circunferencia en sentido positivo corresponde un recorrido simple de la curva γ_ρ también en sentido positivo. Para el área σ_ρ

obtenemos la expresión (compárense los cálculos del ap. 2.1):

$$\sigma_\rho = \frac{1}{2}\int\limits_{|\zeta|=\rho}(u\,dv - v\,du) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Im}\left[\overline{F(\rho e^{i\theta})}\,\frac{\partial F(\rho e^{i\theta})}{\partial\theta}\right]d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Im}\{[\rho e^{-i\theta} + \overline{\alpha}_0 + \overline{\alpha}_1\rho^{-1}e^{i\theta} + \overline{\alpha}_2\rho^{-2}e^{2i\theta} + \ldots]\times$$

$$\times\, i\,[\rho e^{i\theta} - \alpha_1\rho^{-1}e^{-i\theta} - 2\alpha_2\rho^{-2}e^{-2i\theta} - \ldots]\}\,d\theta =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{\frac{2\pi i}{2}(\rho^2 - |\alpha_1|^2\rho^{-2} - 2|\alpha_2|^2\rho^{-4} - \ldots - n|\alpha_n|^2\rho^{-2n} - \ldots)\right\} =$$

$$= \pi\left(\rho^2 - \sum_1^\infty n|\alpha_n|^2\rho^{-2n}\right) > 0.$$

De aquí se deduce que

$$\sum_1^\infty n|\alpha_n|^2\rho^{-2n} < \rho^2$$

para cualquier $\rho > 1$. Como $\sum\limits_1^N n|\alpha_n|^2\rho^{-2n} < \rho^2$, pasando al límite para $\rho\to 1$ obtenemos: $\sum\limits_1^N n|\alpha_n|^2 \leqslant 1$ y, finalmente, para $N\to\infty$:

$$\sum_1^\infty n|\alpha_n|^2 \leqslant 1.$$

Teorema 2. *Sea*

$$f(z) = z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots$$

una función univalente en el círculo unidad. Entonces

$$|a_2| \leqslant 2, \tag{2.4:2}$$

y se alcanza la igualdad solamente en el caso de la función

$$f(z) = \frac{z}{(1 - ze^{i\alpha})^2} = z + 2e^{i\alpha}z^2 + 3e^{2i\alpha}z^3 + \ldots,$$

la cual transforma conformemente el círculo unidad en un recinto cuya frontera es un rayo rectilíneo y que representa la prolongación del vector $-\frac{1}{4}e^{-i\alpha}$ *desde el extremo de este vector hasta el infinito.*

Demostración. Consideremos la función

$$\varphi(z) = \frac{f(z^2)}{z^2} = 1 + a_2z^2 + a_3z^4 + \ldots + a_nz^{2n-2} + \ldots$$

Esta es uniforme y analítica en el círculo unidad y no se anula en el mismo. En efecto, $\varphi(0) = 1 \neq 0$, y si $z \neq 0$, entonces $\varphi(z) = \frac{f(z^2)}{z^2}$, y como $f(z^2) \neq 0$ para $z \neq 0$ (en virtud de la univalencia), también $\varphi(z) \neq 0$ para $z \neq 0$. Por esta razón, la función biforme $\psi(z) = \sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}$ posee dos ramas uniformes y analíticas en el círculo unidad. Elegiremos aquella que se hace igual a la unidad para $z = 0$. Entonces tendremos:

$$\psi(z) = [1 + (a_2 z^2 + \ldots)]^{\frac{1}{2}} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}(a_2 z^2 + \ldots) - \frac{1}{8}(a_2 z^2 + \ldots)^2 + \ldots = 1 + \frac{a_2}{2} z^2 + \ldots$$

Como la función $\psi(z)$ es analítica, este desarrollo tiene que ser convergente en el círculo unidad.

Obsérvese que $\psi(z)$ es una función par.

Formemos ahora una función impar:

$$\chi(z) = z + \frac{a_2}{2} z^3 + \ldots = z\psi(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = \sqrt{f(z^2)} \qquad (2.4:3)$$

y cerciorémonos de que ésta es univalente en el círculo unidad. En efecto, si $\chi(z_1) = \chi(z_2)$, entonces $f(z_1^2) = f(z_2^2)$, o sea, $z_1 = \pm z_2$. Pero si $z_1 = -z_2 \neq 0$, entonces $\chi(z_1) = -\chi(z_2)$ y, por consiguiente, la igualdad $\chi(z_1) = \chi(z_2)$ resulta imposible (la función $\chi(z)$ se anula junto con $f(z^2)$, es decir, sólo cuando $z = 0$). En resumen, tiene que ser $z_1 = z_2$, de donde se deduce que $\chi(z)$ es una función univalente.

Sustituyamos, finalmente, z por $\frac{1}{\zeta}$ y $\chi(z) = \chi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ por $F(\zeta) = \frac{1}{\chi\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$. Como solamente se utilizan transformaciones homográficas (univalentes), la función $F(\zeta)$ también resulta univalente en el exterior del círculo unidad (si $|z| < 1$, entonces $|\zeta| > 1$).

Para ella se obtiene el siguiente desarrollo:

$$F(\zeta) = \frac{1}{\frac{1}{\zeta} + \frac{a_2}{2}\frac{1}{\zeta^3} + \ldots} = \zeta \frac{1}{1 + \frac{a_2}{2}\frac{1}{\zeta^2} + \ldots} =$$
$$= \zeta\left(1 - \frac{a_2}{2}\frac{1}{\zeta^2} + \ldots\right) = \zeta - \frac{a_2}{2}\zeta^{-1} - \ldots$$

Por consiguiente, según el teorema 1:

$$\left|\frac{a_2}{2}\right|^2 + \ldots \leqslant 1$$

y, finalmente,

$$|a_2| \leqslant 2.$$

Si en esta relación se verifica la igualdad

$$|a_2| = 2, \text{ es decir, } a_2 = 2e^{i\alpha},$$

entonces todos los coeficientes del desarrollo de $F(\zeta)$, comenzando desde el coeficiente de ζ^{-2} en adelante, tienen que anularse. Por consiguiente,

$$F(\zeta) = \zeta - e^{i\alpha}\zeta^{-1},$$

de donde

$$\chi(z) = \chi\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{1}{F(\zeta)} = \frac{1}{\zeta - e^{i\alpha}\zeta^{-1}} = \frac{z}{1 - e^{i\alpha}z^2},$$

$$f(z^2) = [\chi(z)]^2 = \frac{z^2}{(1 - e^{i\alpha}z^2)^2}$$

y, finalmente,

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2}.$$

Para esta función el desarrollo de Taylor es:

$$f(z) = z + 2e^{i\alpha}z^2 + 3e^{2i\alpha}z^3 + \ldots + ne^{(n-1)i\alpha}z^n + \ldots$$

El carácter de la transformación que se obtiene mediante esta función se puede apreciar sencillamente realizando sucesivamente las transformaciones elementales:

$$z_1 = -e^{i\alpha}z, \quad z_2 = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right), \quad z_3 = -2e^{i\alpha}(z_2 + 1), \quad w = \frac{1}{z_3} = f(z).$$

Teorema 3. *El recinto G del plano w, en el cual la función univalente*

$$f(z) = z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots$$

transforma el círculo unidad, siempre contiene al círculo de radio $\frac{1}{4}$ con el centro en el origen de coordenadas.

Demostración. Sea w_0 un punto frontera arbitrario del recinto G. Entonces la función

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{1 - \frac{1}{w_0} f(z)}$$

es también univalente en el círculo unidad. Esta posee el siguiente desarrollo:

$$\varphi(z) = \frac{z + a_2z^2 + \ldots}{1 - \frac{1}{w_0}z - \frac{a_2}{w_0}z^2 - \ldots} = z + \left(a_2 + \frac{1}{w_0}\right)z^2 + \ldots$$

Según el teorema 2, tendremos que tener:

$$\left|a_2+\frac{1}{w_0}\right|\leqslant 2;$$

por lo cual

$$\left|\frac{1}{w_0}\right|\leqslant 2+|a_2|\leqslant 4 \text{ y } |w_0|\geqslant\frac{1}{4}.$$

Así, pues, en el círculo $|w|<\frac{1}{4}$ no hay ningún punto frontera del recinto G. Como el centro de este círculo ($w=0$) está situado en el recinto G, todo el círculo está contenido en el recinto G.

En el caso de la función $w=\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}$, el punto $-\frac{1}{4}e^{-i\alpha}$ es un punto frontera para el recinto correspondiente G. Por consiguiente, en las condiciones del teorema 3, el número $\frac{1}{4}$ no se puede sustituir por un número más grande.

Teorema 4 («Teorema de la desfiguración») *Si la función*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

es univalente en el círculo unidad, entonces la dilatación $|f'(z)|$ (la «desfiguración») en la transformación $w=f(z)$ satisface en cada punto z, $|z|<1$, a las desigualdades

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\leqslant|f'(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \tag{2.4:4}$$

En estas relaciones se alcanzan los signos de igualdad en los puntos $z\neq 0$ solamente para la función $f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}$.

Demostración. Sea $z=re^{i\theta}$ un punto arbitrario del círculo unidad. Efectuemos la transformación del círculo unidad $|\zeta|<1$ sobre sí mismo, de modo que este punto vaya al origen de coordenadas. Obtendremos:

$$\zeta'=\frac{\zeta-z}{\zeta\bar{z}-1} \text{ o bien } \zeta=\frac{\zeta'-z}{\zeta'\bar{z}-1}.$$

En esta transformación la función $f(\zeta)$ se convertirá en la función

$$\varphi(\zeta')=f\left(\frac{\zeta'-z}{\zeta'\bar{z}-1}\right),$$

la cual también es univalente en el círculo unidad $|\zeta'|<1$. Se tiene:

$$\varphi(0)=f(z),\quad \varphi'(0)=-f'(z)(1-|z|^2),$$

$$\varphi''(0)=f''(z)(1-|z|^2)^2-2\bar{z}f'(z)(1-|z|^2),\ \ldots,$$

de donde

$$\varphi(\zeta') = f(z) - f'(z)(1-|z|^2)\zeta' + \frac{1}{2}[f''(z)(1-|z|^2)^2 - 2\bar{z}f'(z)(1-|z|^2)]\zeta'^2 + \ldots,$$

o bien

$$\psi(\zeta') = \frac{\varphi(\zeta') - f(z)}{-f'(z)(1-|z|^2)} = \zeta' - \frac{1}{2}\left[\frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2) - 2\bar{z}\right]\zeta'^2 + \ldots$$

Aplicando el teorema 2 a la función univalente $\psi(\zeta')$, resulta:

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}(1-|z|^2) - 2\bar{z}\right| \leqslant 2, \qquad (2.4:5)$$

o bien

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{4r}{1-r^2}. \qquad (2.4:5')$$

De aquí que

$$-\frac{4r}{1-r^2} \leqslant \operatorname{Re}\left[z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right] \leqslant \frac{4r}{1-r^2},$$

$$-\frac{4r}{1-r^2} \leqslant \operatorname{Im}\left[z\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right] \leqslant \frac{4r}{1-r^2}.$$

Observando que

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)} = z\frac{d\operatorname{Ln} f'(z)}{dz} = r\left[\frac{\partial \ln|f'(z)|}{\partial r} + i\frac{\partial \operatorname{Arg} f'(z)}{\partial r}\right]$$

(véase el tomo I, fórmula (1.3:9) del cap. segundo), hallamos:

$$-\frac{4r}{1-r^2} \leqslant r\frac{\partial \ln|f'(z)|}{\partial r} - \frac{2r^2}{1-r^2} \leqslant \frac{4r}{1-r^2},$$

$$-\frac{4r}{1-r^2} \leqslant r\frac{\partial \operatorname{Arg} f'(z)}{\partial r} \leqslant \frac{4r}{1-r^2},$$

es decir,

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leqslant \frac{\partial \ln|f'(z)|}{\partial r} \leqslant \frac{2r+4}{1-r^2} \qquad (2.4:6)$$

y

$$-\frac{4}{1-r^2} \leqslant \frac{\partial \operatorname{Arg} f'(z)}{\partial r} \leqslant \frac{4}{1-r^2}. \qquad (2.4:7)$$

Integrando las relaciones (2.4:6) respecto de r desde 0 hasta $r=|z|$, obtenemos:

$$\ln\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant \ln|f'(z)| \leqslant \ln\frac{1+r}{(1-r)^3},$$

o bien

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \qquad (2.4:8)$$

Este es el resultado que se pedía.

El signo de igualdad en el primero o segundo miembro para algún valor $z \neq 0$ supone el signo de igualdad en el miembro correspondiente de las relaciones (2.4:6) para todos los puntos del segmento rectilíneo que une 0 y z. Por esta razón, tiene que valer también el signo de igualdad en los puntos correspondientes para las relaciones (2.4:5). Haciendo en éstas $z = 0$ y observando que $f'(0) = 1$, hallamos:

$$|a_2| = \frac{1}{2}|f''(0)| = 2,$$

de donde, según el teorema 2, se deduce que $f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}$.

Para esta función verdaderamente se alcanzan los signos de igualdad en las relaciones (2.4:8), pues,

$$f'(z) = \frac{1+e^{i\alpha}z}{(1-e^{i\alpha}z)^3},$$

y para $z = |z|e^{-i\alpha}$ se tiene:

$$f'(z) = \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3},$$

y para $z = -|z|e^{-i\alpha}$ se tiene:

$$f'(z) = \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}.$$

Las desigualdades (2.4:7) obtenidas en la demostración, permiten acotar $\operatorname{Arg} f'(z)$, es decir, el ángulo de rotación de las tangentes a las curvas en la transformación $w = f(z)$.

Integrando las relaciones (2.4:7) desde 0 hasta $r = |z|$ y observando que $f'(0) = 1$, hallamos:

$$|\operatorname{Arg} f'(z)| \leqslant 2 \ln \frac{1+|z|}{1-|z|}. \qquad (2.4:9)$$

Aquí $\operatorname{Arg} f'(z)$ denota aquella rama de la función multiforme en el círculo unidad que se anula en el punto $z = 0$. Esta cota no es la mejor posible. En forma definitiva la cota de $\operatorname{Arg} f'(z)$ fue obtenida por otros medios más complicados por G. M. Goluzin. Esta se expresa por las siguientes desigualdades:

$$|\operatorname{Arg} f'(z)| \leqslant \begin{cases} 4 \operatorname{arc\,sen} |z| & \text{si} \quad |z| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \pi + \ln \frac{|z|^2}{1-|z|^2} & \text{si} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant |z| < 1. \end{cases} \qquad (2.4:10)$$

Estas desigualdades forman el contenido del t e o r e m a d e r o t a c i ó n en la teoría de las funciones univalentes. Estas son exactas en el sentido de que existen funciones univalentes (distintas

de $\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}$), para las cuales | Arg $f'(z)$ | toma valores arbitrariamente próximos a los valores de los segundos miembros de las relaciones (2.4:10) en un punto previamente dado del círculo unidad.

Volvamos a examinar las desigualdades (2.4:6), obtenidas anteriormente, para deducir de la primera de ellas una propiedad geométrica sencilla de las transformaciones conformes. Observando que

$$r\frac{\partial \ln |f'(z)|}{\partial r}=\frac{\partial \operatorname{Arg} f'(z)}{\partial\theta}=\operatorname{Re}\left[z\frac{d \operatorname{Ln} f'(z)}{dz}\right]=\operatorname{Re}\left[z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]$$

(véase t. I, fórmulas (1.3:9) y (1.3:10), cap. segundo), de (2.4:6) resulta:

$$\frac{\partial \operatorname{Arg} f'(z)}{\partial\theta}\geqslant\frac{2r^2-4r}{1-r^2}. \qquad (2.4:11)$$

Sea Γ: $w=f(re^{i\theta})$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, la imagen de la circunferencia γ: $|z|=r$ en la transformación $w=f(z)$. Como la tangente a γ en el punto $z=re^{i\theta}$ forma con el eje real el ángulo $\theta+\frac{\pi}{2}$, la tangente a Γ en el punto correspondiente $f(re^{i\theta})$ formará con el eje real el ángulo $\varphi=\theta+\frac{\pi}{2}+\operatorname{Arg} f'(re^{i\theta})$ y el signo de la derivada $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=$ $=1+\frac{\partial \operatorname{Arg} f'(re^{i\theta})}{\partial\theta}$ determinará el carácter de variación del ángulo de inclinación de la tangente a Γ en el punto $f(re^{i\theta})$ al recorrer Γ en el sentido positivo (creciendo θ). En particular, el cumplimiento de la relación $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}>0$ en un intervalo $\theta'<\theta<\theta''$ significa que el arco correspondiente de Γ tiene la concavidad dirigida hacia el punto $w=0$ (o sea, es convexa por la parte del exterior a Γ), y el cumplimiento de la relación $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}<0$ significa que este arco tiene dirigida su concavidad hacia el punto $w=0$ (o sea, es cóncava desde fuera). Pero de la desigualdad (2.4:11) podemos enterarnos acerca del signo de la derivada $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=1+\frac{\partial \operatorname{Arg} f'(re^{i\theta})}{\partial\theta}$, pues

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\geqslant\frac{r^2-4r+1}{1-r^2}=\frac{(r-2+\sqrt{3})(r-2-\sqrt{3})}{1-r^2}.$$

De aquí se deduce que $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}>0$ para todos los valores de $\theta\in[0, 2\pi]$, si $r<2-\sqrt{3}=0{,}2678\ldots$ $(r>0)$, de modo que *la imagen Γ de cada una de las circunferencias $|z|=r<2-\sqrt{3}$ es una curva convexa en cualquier transformación conforme de la forma*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

Para la función $f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}$ se tiene:

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)}=\frac{2(e^{i\alpha}z)^2+4e^{i\alpha}z}{1-(e^{i\alpha}z)^2};$$

esta expresión para $z=-re^{-i\alpha}$ toma los valores reales $\frac{2r^2-4r}{1-r^2}$, de donde se deduce que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=1+\frac{\partial \operatorname{Arg} f'(z)}{\partial\theta}=1+\operatorname{Re}\left[z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]=\frac{r^2-4r+1}{1-r^2}=$$

$$=\frac{(r-2+\sqrt{3})(r-2-\sqrt{3})}{1-r^2}.$$

Evidentemente, estos valores de $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ son negativos si $r>2-\sqrt{3}$ $(r<1)$, es decir, las imágenes de las circunferencias $|z|=r>$ $>2-\sqrt{3}$ $(r<1)$ en la transformación $w=\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}$ ya no son curvas convexas.

Teorema 5. *Una función*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

que es univalente en el círculo unidad, satisface a las desigualdades:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leqslant|f(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \qquad (2.4:12)$$

En estas relaciones, los signos de igualdad pueden alcanzarse para $z\neq 0$ solamente para la función

$$f(z)=\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}.$$

Demostración. Integrando ambos miembros de la desigualdad obtenida en el teorema 4

$$|f'(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}$$

a lo largo del radio que une 0 con z, hallamos:

$$|f(z)|=\left|\int_0^z f'(z)\,dz\right|\leqslant\int_0^{|z|}|f'(z)|\,d|z|\leqslant\int_0^{|z|}\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}\,d|z|=\frac{|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Esta es la segunda de las desigualdades pedidas.

Para obtener la primera de estas desigualdades, consideremos la imagen Γ de la circunferencia $|z|=r$ en la transformación $w=$ $=f(z)$. Γ es una curva cerrada de Jordan del plano w que contiene en su interior al origen de coordenadas. Si $R>0$ es la distancia desde el punto $w=0$ hasta la curva Γ, entonces en Γ tiene que haber al

menos un punto $w_1 = f(z_1)$ ($|z_1| = r$) tal, que $|f(z_1)| = R$. El segmento Δ de la recta que une los puntos 0 y $f(z_1)$ pertenece a la imagen del círculo unidad en la transformación $w = f(z)$; por esta razón, la preimagen δ de este segmento pertenece al círculo unidad. Para $|z| = r$ se tiene (aplicando la primera de las desigualdades establecidas en el teorema 4):

$$|f(z)| \geqslant R = |f(z_1)| =$$
$$= \int\limits_{\Delta} |dw| = \int\limits_{\delta} |f'(z)||dz| = \int\limits_{\delta} |f'(z)| \left|\frac{dz}{d|z|}\right| d|z| \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{0}^{|z|} |f'(z)|\,d|z| \geqslant \int\limits_{0}^{|z|} \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\,d|z| = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}.$$

Las desigualdades (2.4:12) quedan demostradas. Evidentemente, en ellas puede alcanzarse la igualdad para algún $z \neq 0$ solamente cuando esto tiene lugar en la desigualdad correspondiente (2.4:4) del teorema precedente.

En este caso, como ya sabemos, $f(z) = \dfrac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}$.

T e o r e m a 6. *El área del recinto G, en el cual la función univalente*

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

transforma el círculo unidad, tiene el valor

$$S = \pi\{1 + 2|a_2|^2 + \ldots + n|a_n|^2 + \ldots\} \geqslant \pi. \qquad (2.4:13)$$

Esta es igual a π *solamente cuando* $f(z) = z$.

D e m o s t r a c i ó n. Sea Γ_r la imagen de la circunferencia $|z| = r$ $(r < 1)$; en la transformación considerada Γ_r es una curva cerrada de Jordan cuya parte interior G_r pertenece al recinto G. Por esta razón, designando con S_r el área del recinto G_r, se tiene: $S_r \leqslant S$.

Cerciorémonos de que cualquier conjunto acotado y cerrado $F \subset G$ pertenece a G_r si $r > r(F)$, es decir, que los recintos G_r aproximan a G por el interior. Sea $\{r_n\}$ una sucesión de valores crecientes de radios, convergente hacia 1. Supongamos, en contra de lo que se afirma, que para cada n existe un punto $w_n \in F$ que no pertenece a G_{r_n}. La sucesión $\{w_n\}$ posee un punto de acumulación w_0 perteneciente a F y, por consiguiente, al recinto G. Su preimagen z_0 está situada en el círculo unidad, y junto con cierto entorno U_0 de la misma pertenece a todos los círculos $|z| < r_n$ para $n > N$. Por esta razón, $f(U_0)$ pertenece a todos los recintos G_{r_n} para $n > N$. Pero el punto w_0 pertenece a $f(U_0)$ junto con un entorno del mismo,

y en este último tienen que estar situados los puntos w_n con subíndices arbitrariamente grandes. De aquí se deduce que existen puntos w_n pertenecientes a los recintos correspondientes G_{r_n}, lo cual contradice a la definición de estos puntos. De la contradicción obtenida se deduce que el conjunto F está situado en uno de los recintos $G_{r_{n_0}}$ (y en todos los siguientes a éste). Si (como se hace ordinariamente) definimos el área S del recinto G (interior) como el extremo superior de las sumas de las áreas de los cuadrados que están comprendidos en el recinto G junto con sus contornos y que pertenecen a subdivisiones arbitrariamente pequeñas del plano en cuadrados, tendremos, de la propiedad demostrada del recinto G_r, que

$$\lim S_r \geqslant S.$$

En efecto, para cualquier conjunto finito de los cuadrados mencionados de una misma división se puede hallar un número $r_0 < 1$ tal, que para $r > r_0$ los recintos G_r contienen en el interior a estos cuadrados.

Confrontando las desigualdades obtenidas para S, resulta:

$$S = \lim_{r \to 1} S_r.$$

Pero, para las áreas S_r se tienen las expresiones:

$$S_r = \int\limits_{|z| \leq r}\int \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} dx\, dy = \int\limits_{|z| \leq r}\int |f'(z)|^2 r\, dr\, d\theta$$

(puesto que, en virtud de las ecuaciones de D'Alembert-Euler,

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2\Big).$$

Sustituyendo $f'(z)$ por su desarrollo en serie

$$f'(z) = f'(re^{i\theta}) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta},$$

hallamos:

$$S_r = \int_0^r \int_0^{2\pi} \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k r^{k-1} e^{i(k-1)\theta}\right] \times$$

$$\times \left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} k \bar{a}_k r^{k-1} e^{-i(k-1)\theta}\right] r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^r 2\pi \left[r + \sum_{k=2}^{\infty} k^2 |a_k|^2 r^{2k-1}\right] dr = \pi \left[r^2 + \sum_{k=2}^{\infty} k |a_k|^2 r^{2k}\right].$$

Cerciorémonos, finalmente, de que

$$\lim_{r\to 1} S_r = \pi [1 + \sum_{k=2}^{\infty} k |a_k|^2] .$$

Esta proposición se deduce del segundo teorema de Abel (t. 1, ap. 7.3, cap. tercero), aplicándolo a la serie de potencias:

$$\pi [z^2 + 2 |a_2|^2 z^4 + \ldots + n |a_n|^2 z^{2n} + \ldots],$$

suponiendo que esta serie es convergente para $z=1$. Si ésta es divergente, es decir, si $\pi [1 + \sum_{k=2}^{\infty} k |a_k|^2] = \infty$, entonces para un valor $A > 0$ arbitrariamente grande, se tiene: $\pi [1 + \sum_{k=2}^{n} k |a_k|^2] > A$ para $n > N(A)$; por lo tanto, también $\pi [r^2 + \sum_{k=2}^{n} k |a_k|^2 r^{2k}] > A$ para n fijo y para todos los valores de r suficientemente próximos a 1. De aquí que

$$S_r = \pi [r^2 + \sum_{k=2}^{\infty} k |a_k|^2 r^{2k}] > A$$

para todos los valores de r suficientemente próximos a 1, es decir, $\lim_{r\to 1} S_r = \infty$.

Por consiguiente, en todos los casos, el área finita o infinita del recinto G se expresa por la fórmula

$$S = \pi (1 + 2 |a_2|^2 + \ldots + n |a_n|^2 + \ldots) \geqslant \pi.$$

En el caso de igualdad

$$S = \pi$$

tiene que ser:

$$a_2 = \ldots = a_n = \ldots = 0,$$

es decir,

$$f(z) = z.$$

Resumiendo, *en las transformaciones conformes del círculo* $|z| < 1$ *mediante la función inivalente*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

en todos los casos resulta un recinto de área mayor que la del círculo; forma una excepción solamente el caso único de la transformación idéntica. Naturalmente, este resultado se extiende inmediatamente a las transformaciones conformes de un círculo con cualquier centro

y radio, suponiendo que la derivada de la función en el centro del círculo es igual a la unidad.

Sea G un recinto simplemente conexo arbitrario del plano finito cuya frontera contenga más de un punto, y sea $z = \varphi(w)$ una función que transforme conformemente G en un círculo K con el centro en el origen de coordenadas, de modo que sea $\varphi(w_0) = 0$ y $\varphi'(w_0) = 1$ ($w_0 \in G$); el radio de K, igual a R_{w_0}, es el radio de conformidad del recinto G respecto del punto w_0 (ap. 2.2). Designemos con d_{w_0} la distancia desde el punto w_0 hasta la frontera del recinto G. El área de la imagen del círculo $|w - w_0| < d_{w_0}$ tiene que ser, por una parte, no menor que el área $\pi d_{w_0}^2$ de este círculo, y por otra, no mayor que el área $\pi R_{w_0}^2$ de todo el círculo K. Por esta razón,

$$R_{w_0} \geqslant d_{w_0}.$$

Aplicando el teorema 3 a la transformación considerada, en cuyas condiciones se debe sustituir el círculo unidad por el círculo $|z| < R_{w_0}$ y el punto $w = 0$ por el punto w_0, hallaremos que el recinto G contiene un círculo con el centro en w_0 de radio $\frac{R_{w_0}}{4}$. Por lo tanto,

$$d_{w_0} \geqslant \frac{R_{w_0}}{4}.$$

En resumen, el radio de conformidad R_{w_0} está ligado con la distancia d_{w_0} por las desigualdades

$$4d_{w_0} \geqslant R_{w_0} \geqslant d_{w_0}.$$

En particular, R_{w_0} tiende a cero cuando d_{w_0} tiende a cero.

Lema. *Si $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n + \ldots$ es una función univalente en el círculo unidad, entonces*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \frac{r}{1-r} \quad \text{si} \quad r < 1. \tag{2.4:14}$$

Demostración. Introduzcamos la función univalente impar $\chi(z)$ utilizada en la demostración del teorema 2:

$$\chi(z) = \sqrt{f(z^2)} = z + b_3z^3 + b_5z^5 + \ldots$$

Esta función transforma conformemente cada círculo $|z| \leqslant r < 1$ en un recinto D_r de área

$$\sum\nolimits_r = \pi\,[r^2 + 3\,|b_3|^2\, r^6 - 5\,|b_5|^2\, r^{10} + \ldots]$$

(véase la demostración del teorema precedente).

Hagamos la notación: $\mu(r) = \max\limits_{|z| \leqslant r} |\chi(z)|$. Entonces tendremos:

$$\pi\,|\mu(r)|^2 \geqslant \sum\nolimits_r = \pi\,[r^2 + 3\,|b_3|^2\, r^6 + 5\,|b_5|^2\, r^{10} + \ldots].$$

Pero

$$[\mu(r)]^2 = \max_{|z| \leq r} |\chi(z)|^2 = \max_{|z| \leq r} |f(z)^2| = \max_{|z| \leq r^2} |f(z)| \leq \frac{r^2}{(1-r^2)^2}$$

(según el teorema 5), por lo cual

$$\pi[r^2 + 3|b_3|^2 r^6 + 5|b_5|^2 r^{10} + \ldots] \leq \frac{\pi r^2}{(1-r^2)^2},$$

de donde

$$r + 3|b_3|^2 r^5 + 5|b_5|^2 r^9 + \ldots \leq \frac{r}{(1-r^2)^2}$$

o bien, integrando desde 0 hasta $r < 1$:

$$r^2 + |b_3|^2 r^6 + |b_5|^2 r^{10} + \ldots \leq \frac{r^2}{(1-r^2)^2}.$$

El primer miembro de esta relación es igual a la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\chi(re^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

(véase el t. I, ap. 5.3, cap. tercero). Se tiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\chi(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r^2e^{2i\theta})| \, d\theta.$$

Sustituyendo en la última integral 2θ por θ', resulta:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r^2e^{2i\theta})| \, d\theta = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} |f(r^2e^{i\theta'})| \, d\theta'.$$

Pero, como $f(r^2e^{i\theta'})$, considerada como función de θ', es periódica, se tiene:

$$\int_{2\pi}^{4\pi} |f(r^2e^{i\theta'})| \, d\theta' = \int_0^{2\pi} |f(r^2e^{i\theta'})| \, d\theta'.$$

De aquí que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\chi(re^{i\theta})|^2 \, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r^2e^{i\theta'})| \, d\theta'.$$

Así, pues,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r^2e^{i\theta'})| \, d\theta' \leq \frac{r^2}{1-r^2}.$$

Sustituyendo, finalmente, r^2 por r', tendremos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r'e^{i\theta})|\,d\theta' \leqslant \frac{r'}{1-r'}, \qquad 0<r'<1,$$

que es lo que se quería demostrar.

Teorema 7. *Si*

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots$$

es una función univalente en el círculo unidad, entonces, para cualquier natural n se verifica la desigualdad

$$|a_n|<en.$$

Demostración. Se tiene:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}} \qquad (r<1).$$

De aquí, en virtud del lema:

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{r^n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant\frac{1}{r^n}\frac{r}{1-r}=\frac{1}{r^{n-1}}\frac{1}{1-r}.$$

Haciendo aquí $r=1-\frac{1}{n}$, resulta:

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}}n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\cdot n<en,$$

como se quería demostrar.

Este resultado está muy lejos de ser definitivo. Para los coeficientes $|a_3|$ y $|a_4|$ se puede obtener una cota que ya no admite mayor precisión:

$$|a_3|\leqslant 3, \qquad |a_4|\leqslant 4.$$

Para los demás coeficientes la mejor de las cotas hasta ahora conocidas fue obtenida por I. M. Milin; ésta es:

$$|a_n|<1{,}243n.$$

Existe la hipótesis (L. Bieberbach) de que para todos los valores naturales de n se verifican las desigualdades:

$$|a_n|\leqslant n.$$

Si esto es cierto, entonces entre las funciones univalentes de la forma $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$, la que posee los coeficientes

mayores en valor absoluto es la función

$$\frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}=z+2e^{i\alpha}z^2+3e^{2i\alpha}z^3+\ldots+ne^{(n-1)i\alpha}z^n+\ldots$$

W. Hayman demostró que para cada función univalente $f(z)$, distinta de la expuesta, existe el $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{n}=\alpha_f<1$. Por esta razón, para cada función de éstas y para todos los valores naturales de n suficientemente grandes se verifican las desigualdades:

$$|a_n|\leqslant n\ (n>N_f).$$

Para el estudio ulterior de la teoría de las funciones univalentes véase: G. M. Goluzin. Teoría geométrica de las funciones de variable compleja (Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966); J. A. Jenkins. Univalent functions and conformal mapping. Springer, Berlín, 1958 y W. K. Hayman, Multivalent Functions, Cambridge University Press, 1958.

2.5. Aquí demostraremos el teorema de Hilbert sobre la posibilidad de la transformación conforme de cualquier recinto múltiplemente conexo en un recinto canónico que se obtiene del plano excluyendo segmentos rectilíneos paralelos al eje real y, posiblemente, algunos puntos.*)

Lema 1. *Sea G un recinto arbitrario que contenga un entorno U_R: $|z|>R$ del punto del infinito. Consideremos la familia Σ de todas las funciones analíticas y univalentes en $G\setminus\infty$ que posean en U_R un desarrollo de la forma:*

$$f(z)=z+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots \tag{2.5:1}$$

Entonces: a) la familia $\{f(z)-z\}$, $f(z)\in\Sigma$, es compacta en el recinto G y b) el conjunto de los coeficientes $\{a_1\}$ está acotado.

Demostración. Si $f(z)\in\Sigma$, entonces

$$f^*(\zeta)=\frac{1}{R}f(R\zeta)=\zeta+\frac{a_1}{R^2\zeta}+\frac{a_2}{R^3\zeta^2}+\ldots$$

*) Para el estudio de la teoría de las transformaciones conformes de los recintos múltiplemente conexos, recomendamos al lector que consulte el artículo de M. V. Kéldish, Transformaciones conformes de los recintos múltiplemente conexos en recintos canónicos (М. В. Келдыш, Конформные отображения многосвязных областей на канонические области, Успехи математических наук, т. VI (1939), стр. 90—119) y la monografía de G. M. Goluzin, Teoría geométrica de las funciones de variable compleja (Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», 1966 (гл. V и VI).

es univalente en el exterior del círculo unidad. Aplicando a ésta el teorema de las áreas (ap. 2.4), obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,|a_n|^2}{R^{2n+2}} \leqslant 1 \quad \text{o bien} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,|a_n|^2}{R^{2n}} \leqslant R^2 \qquad (2.5{:}2)$$

por lo cual,

$$|a_1| \leqslant R^2. \qquad (2.5{:}3)$$

Por otra parte, en la circunferencia $|z| = R' > R$:

$$|f(z) - z| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{R'^n} \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,|a_n|^2}{R^{2n}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{2n}}{nR'^{2n}}} <$$

$$< R \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{2n}}{R'^{2n}}} = \frac{R^2}{\sqrt{R'^2 - R^2}} = R'' \quad (2.5{:}3')$$

(se ha aplicado la conocida desigualdad de Buniakovski-Schwarz y la desigualdad (2.5:2)). De aquí que

$$|f(z)| < R' + R'' = R''', \qquad |z| = R'. \qquad (2.5{:}4)$$

Como $w = f(z) \in \Sigma$ es univalente en U_R y lleva el punto $z = \infty$ al punto $w = \infty$, la circunferencia $|z| = R'$ se transforma en una curva cerrada de Jordan $\Gamma_{R'}$ cuya parte exterior está contenida completamente en $f(U_R)$. Por esta razón, debido a (2.5:4), la circunferencia $|w| = R'''$ pertenece a $f(U_R)$ y los valores que toma $f(z)$ en la intersección del círculo $V_{R'}$: $|z| < R'$ con el recinto G, no pueden pertenecer al recinto $|w| > R'''$. En otras palabras, la familia $\{f(z)\}$ (y, por consiguiente, también $\{f(z) - z\}$) está uniformemente acotada en cada recinto $V_{R'} \cap G$. De (2.5:3') se deduce también que la familia $\{f(z) - z\}$ está uniformemente acotada en el interior de cada recinto $U_{R'}$, $R' > R$. Por lo tanto, según el teorema de Montel, la familia $\{f(z) - z\}$ es compacta en el recinto G. El lema queda demostrado.

De lo demostrado se deduce que, de cualquier sucesión $\{f_n(z)\} \subset \Sigma$ se puede extraer una sucesión parcial $\{f_{n_k}(z)\}$ tal, que $\{f_{n_k}(z) - z\}$ es uniformemente convergente en el interior de U_R y $\{f_{n_k}(z)\}$ es uniformemente convergente en cada conjunto cerrado y acotado de puntos del recinto G. Según el teorema de Hurwitz, la función límite

$$\varphi(z) = \lim_{n_k \to \infty} f_{n_k}(z)$$

es univalente en el recinto G. Además, en U_n ésta admite un desarrollo de la forma:

$$\varphi(z) = z + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots$$

Por consiguiente, $\varphi(z) \in \Sigma$.

Lema 2. *Si la función $f(z)$ es univalente en el exterior de un segmento $[-\lambda, \lambda]$ $(\lambda > 0)$ y en el entorno de $z = \infty$ admite un desarrollo de la forma:*

$$f(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots,$$

entonces $\operatorname{Re} b_1 \leqslant 0$; aquí se alcanza la igualdad solamente cuando $f(z) \equiv z + b_0$.

Demostración. Sin restringir la generalidad se puede suponer que $\lambda = 2$ $\left(\text{se llega a este caso sustituyendo } z \text{ por } \frac{\lambda}{2} z^* \text{ y } f(z) \text{ por } \frac{2}{\lambda} f\left(\frac{\lambda}{2} z^*\right) = f^*(z^*)\right)$.

Hagamos $z = \zeta + \frac{1}{\zeta}$; entonces la función

$$\psi(\zeta) = f\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = \zeta + b_0 + \frac{1+b_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots$$

será analítica y univalente en el exterior del círculo unidad. Aplicando a ella el teorema de las áreas, obtenemos:

$$|1 + b_1|^2 + \sum_{2}^{\infty} n |c_n|^2 \leqslant 1. \qquad (2.5:5)$$

De aquí que

$$|1 + b_1|^2 \leqslant 1, \qquad |1 + b_1| \leqslant 1, \qquad (2.5:6)$$

$$|\operatorname{Re}(1 + b_1)| \leqslant 1, \qquad \operatorname{Re} b_1 \leqslant 0.$$

Si $\operatorname{Re} b_1 = 0$, entonces $b_1 = \beta i$, $|1 + b_1| = \sqrt{1+\beta^2}$ y, debido a (2.5:6), $\beta = 0$, o sea, $b_1 = 0$. Por lo tanto, de (2.5:5) se deduce que

$$c_2 = c_3 = \dots = 0,$$

de donde

$$f\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = \zeta + \frac{1}{\zeta} + b_0 \quad \text{y} \quad f(z) = z + b_0.$$

Teorema de Hilbert. *Para todo recinto G que contenga al punto $z = \infty$, existe una transformación conforme $w = \varphi(z)$ en un recinto canónico D, cuyos continuos frontera que no degeneran en un punto, son todos segmentos rectilíneos paralelos al eje real. En un entorno del punto $z = \infty$ la función $\varphi(z)$ admite un desarrollo de la*

forma:

$$\varphi(z)=z+\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+\ldots$$

Demostración. Consideremos la familia Σ de todas las funciones $f(z)$ que son univalentes en el recinto G y admiten en el entorno U_R: $|z|>R$ del punto $z=\infty$ desarrollos de la forma:

$$f(z)=z+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\ldots$$

En virtud del lema 1, la familia $\{f(z)\}$ es compacta: además, el conjunto $\{a_1\}$ está acotado; hagamos la notación

$$\sup_{f\in\Sigma}\operatorname{Re} a_1=\alpha.$$

Razonando del mismo modo que en la demostración del teorema de Riemann (ap. 2.2), hallaremos una sucesión de funciones $\{f_n(z)\}\subset$ $\subset\Sigma$ que converge a una función $\varphi(z)\in\Sigma$ uniformemente en cada conjunto cerrado y acotado de puntos del recinto G; además, su desarrollo en un entorno del punto $z=\infty$ tendrá la forma:

$$w=\varphi(z)=z+\frac{\alpha_1}{z}+\frac{\alpha_2}{z^2}+\ldots, \qquad (2.5:7)$$

donde

$$\operatorname{Re}\alpha_1=\alpha. \qquad (2.5:8)$$

Demostremos que el recinto $D=\varphi(G)$ del plano ampliado w satisface a las condiciones del teorema. Supongamos lo contrario, y sea distinto de un segmento rectilíneo paralelo al eje real uno de los continuos frontera δ no degenerados del recinto D. Consideremos el recinto simplemente conexo Δ que es el complemento de δ respecto del plano ampliado. Transformemos primero Δ en el recinto Δ_1 mediante $w_1=w^{-1}$; en este caso, el homólogo de $w=\infty$ será $w_1=0$. Transformemos después Δ_1, según el teorema de Riemann, en el círculo unidad $|t|<1$ mediante $w_1=\beta_1 t+\beta_2 t^2+\ldots$ $\ldots(\beta_1>0)$ y, finalmente, mediante $\zeta=\beta_1^{-1}(t+t^{-1})$ o $t=2\beta_1^{-1}\times$ $\times[\zeta+\sqrt{\zeta^2-4\beta_1^2}]^{-1}$ transformemos el círculo unidad en el exterior del segmento $[-2\beta_1^{-1}, 2\beta_1^{-1}]$ del eje real. Como resultado, obtendremos la transformación de Δ en el exterior del último segmento, donde el homólogo de $w=\infty$ será $\zeta=\infty$. Esta transformación tiene la forma

$$w=w_1^{-1}=(\beta_1 t+\beta_2 t^2+\ldots)^{-1}=\frac{1}{\beta_1 t}+c_0+c_1 t+\ldots$$
$$\ldots=\zeta+b_0+b_1\zeta^{-1}+b_2\zeta^{-2}+\ldots=\psi(\zeta), \qquad (2.5:9)$$

donde, en virtud del lema 2:

$$\operatorname{Re} b_1<0. \qquad (2.5:10)$$

En efecto, suponiendo que Re $b_1 = 0$, debido a este lema, tendríamos que $w \equiv \zeta + b_0$, o sea, en contra de la hipótesis, el continuo δ sería un segmento rectilíneo paralelo al eje real. Pero de (2.5:9) obtenemos:

$$\zeta = \psi^{-1}(w) = w - b_0 - \frac{b_1}{w} + \ldots,$$

por lo cual, en virtud de (2.5:7):

$$\zeta = F(z) = \psi^{-1}[\varphi(z)] + b_0 = z + \frac{\alpha_1 - b_1}{z} + \ldots \qquad (2.5:11)$$

Es evidente que la función $F(z) \in \Sigma$. Pero, para ésta, debido a (2.5:8) y (2.5:10):

$$\text{Re}(\alpha_1 - b_1) = \alpha - \text{Re}\, b_1 > \alpha,$$

lo cual contradice a la definición del número α como el extremo superior. De esta contradicción se deduce que el teorema de Hilbert es justo.

§ 3. CORRESPONDENCIA DE LAS FRONTERAS. ESTRUCTURA DE LA FRONTERA DE UN RECINTO SIMPLEMENTE CONEXO

3.1. Consideremos una función arbitraria $z = \lambda(t)$, definida y continua en el semiintervalo $\alpha \leqslant t < \beta$, la cual satisface a la condición $\lambda(t') \neq \lambda(t'')$ para $t' \neq t''$.

Se dirá que una función tal define un s e m i i n t e r v a l o c u r v i l í n e o γ. A los valores $z = \lambda(t)$ los llamaremos puntos del semiintervalo γ, al punto $z = \lambda(\alpha) = z_0$ lo llamaremos punto inicial, y al conjunto E_γ de los puntos de acumulación de todas las sucesiones posibles $z_n = \lambda(t_n)$, donde $t_n \to \beta$, lo llamaremos c o n j u n t o l í m i t e del semiintervalo curvilíneo γ. Dos semiintervalos curvilíneos γ y γ': $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t < \beta$ y $z = \lambda'(t')$, $\alpha' \leqslant t' < \beta$, se identificarán cuando, y sólo cuando, existe una función creciente y continua $t' = \mu(t)$ que transforma $[\alpha, \beta)$ en $[\alpha', \beta')$ y $\lambda(t)$ en $\lambda'(t')$.

Puede servir de ejemplo de semiintervalo curvilíneo cualquier curva de Jordan, de la cual se ha excluido su punto final z'. Para ella, el conjunto límite consta del punto único z'.

Evidentemente, todo semiintervalo, cuyo conjunto límite consta de un punto z', puede convertirse en una curva de Jordan si se le une este punto, haciendo $\lambda(\beta) = z'$. A este tipo de semiintervalo curvilíneo lo llamaremos de J o r d a n, y al punto z' lo llamaremos extremo del semiintervalo de Jordan.

El semiintervalo curvilíneo γ:

$$z = t + i \operatorname{sen} \frac{1}{t} \qquad (\alpha \leqslant t < 0)$$

(o sea, la gráfica de la función $y = \text{sen}\,\frac{1}{x}$, $x \in [\alpha, 0)$) representa un ejemplo de otro tipo. Para éste, el conjunto límite es el segmento del eje imaginario $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Agregándole a γ obtenemos un continuo que, sin embargo, no es una curva continua.

Señalemos dos teoremas referentes a las transformaciones conformes de los recintos (por cierto, referentes también a cualquier transformación homeomorfa).

T e o r e m a 1. *Si $\{z_n\}$ es una sucesión de puntos de un recinto G, cuyos puntos de acumulación están situados todos en la frontera Γ de este recinto, entonces todos los puntos de acumulación de la sucesión $\{w_n = f(z_n)\}$, donde $w = f(z)$ transforma conformemente G en un recinto D del plano w, están situados en la frontera Δ de este último recinto.*

D e m o s t r a c i ó n. Como $w_n \in D$ ($n = 1, 2, \ldots$), los puntos de acumulación de la sucesión $\{w_n\}$ tienen que pertenecer a $\bar{D}$. Supongamos que uno de ellos, w_0, no está situado en Δ; entonces $w_0 \in D$ y existe un entorno cerrado $\bar{U}_0$ del punto w_0 que pertenece a D. Su preimagen en el plano z representa un dominio $\bar{g}_0 \subset G$. Como $\bar{U}_0$ contiene un conjunto infinito de términos de la sucesión $\{w_n\}$, $\bar{g}_0$ tiene que contener un conjunto infinito de términos de la sucesión $\{z_n\}$ que son las preimágenes de los puntos w_n. Por esta razón, tienen que existir puntos de acumulación de la sucesión $\{z_n\}$ situados en $\bar{g}_0$, es decir, situados en el interior del recinto G, lo cual contradice a la hipótesis del teorema. Con esto se termina la demostración.

T e o r e m a 2. *Si γ es un semiintervalo curvilíneo de un recinto G, cuyo conjunto límite pertenece a la frontera Γ de este recinto, y $w = f(z)$ es una función que transforma conformemente el recinto G en un recinto $D = f(G)$, entonces $f(\gamma)$ es un semiintervalo curvilíneo del recinto D cuyo conjunto límite está situado en su frontera Δ.*

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que γ se determina por la ecuación $z = \lambda(t)$, $\alpha \leqslant t < \beta$, donde $\lambda(t)$ es una función continua del parámetro real t que satisface a la condición $\lambda(t') \neq \lambda(t'')$ para $t' \neq t''$. Entonces para la imagen $f(\gamma)$ en la transformación conforme $w = f(z)$ obtenemos la ecuación $w = f[\lambda(t)]$, $\alpha \leqslant t < \beta$, donde, para $t' \neq t''$, se tiene $\lambda(t') \neq \lambda(t'')$ y, por consiguiente, $f[\lambda(t')] \neq f[\lambda(t'')]$; de aquí se deduce que $f(\gamma)$ es un semiintervalo curvilíneo del recinto $D = f(G)$. Para una sucesión arbitraria $\{t_n\}$ de valores t, convergente hacia β, la sucesión de los puntos correspondientes $\{z_n = \lambda(t_n)\}$, según la condición, tiene todos sus puntos de acumulación en Γ. Debido a esto, según el teorema 1, todos los

puntos de acumulación de la sucesión $\{w_n = f[\lambda(t_n)]\}$ tienen que estar situados en Δ, con lo cual se termina la demostración.

Como ya se ha señalado, en las proposiciones demostradas no hay nada específico para las transformaciones conformes. En la demostración solamente nos basábamos en el hecho de que la transformación conforme $w = f(z)$ es homeomorfa. Pasando a considerar unos teoremas más complicados que utilizan la conformidad, tendremos que examinar previamente dos lemas que son de interés particular.

3.2. **Lema 1.** *Sea* γ: $z = \lambda(t)$, $t \in [\alpha, \beta)$ *un semiintervalo curvilíneo contenido en el círculo unidad, cuyo conjunto límite esté situado en la circunferencia unidad y conste de más de un punto. Si la función* $w = f(z)$ *es analítica y está acotada en valor absoluto en el círculo unidad, y tiende en* γ *hacia cierto límite* c

$$\lim_{t\to\beta} f[\lambda(t)] = c,$$

entonces esta función es constante: $f(z) \equiv c$.

Demostración. Demostraremos este lema por reducción a lo absurdo. Sea $f(z) - c \not\equiv 0$; si $f(z) - c = \delta z^k + \ldots$, donde $\delta \neq 0$, entonces $\varphi(z) = \frac{f(z) - c}{z^k} = \delta + \ldots$ está acotada en valor absoluto en el círculo unidad*) y tiende en γ a cero, siendo su valor en el origen de coordenadas $\varphi(0) = \delta$ distinto de cero. Consideremos dos puntos a y b, pertenecientes al conjunto límite del semiintervalo γ, y sean $a'_n = \lambda(t'_n)$ y $b'_n = \lambda(\tau'_n)$ dos sucesiones de puntos en γ, convergentes hacia a y b ($\lim\limits_{n\to\infty} t'_n = \lim\limits_{n\to\infty} \tau'_n = \beta$). Pasando en caso de necesidad a sucesiones parciales, se puede suponer que $t'_1 < \tau'_1 < < t'_2 < \ldots < t'_n < \tau'_n < \ldots$ Designemos con σ'_n los arcos de Jordan situados en γ que se determinan por las desigualdades $t'_n \leqslant \leqslant t \leqslant \tau'_n$. Para cualquier r, $0 < r < 1$, se puede indicar un $N(r)$ tal, que para $n > N(r)$ todos los arcos σ'_n van a estar situados en el anillo $r < |z| < 1$.

Sea σ' el arco más pequeño de los dos arcos de la circunferencia unidad con los extremos en a y b (en caso de que estos últimos sean iguales, se toma uno cualquiera de ellos. *Nota del T.*). Fijemos en éste un arco $\widehat{AB}$ con los extremos distintos de a y b, y de longitud $\frac{\pi}{m}$,

*) Si $0 < |z| \leqslant r < 1$, entonces, según el principio del módulo máximo:

$$|\varphi(z)| < \frac{1}{r^k}\left[\max_{|z|=r} |f(z)| + |c|\right] \leqslant \frac{M + c}{r^k},$$

donde $M = \sup|f(z)|$. Fijando z y pasando al límite cuando $r \to 1$, resulta

$$|\varphi(z)| \leqslant M + |c| \quad \text{para} \quad |z| < 1.$$

donde m es un número natural mayor que la unidad, y tracemos los diámetros AOD y BOC (fig. 6). Para valores suficientemente grandes de $n > N'$ el punto a'_n estará situado en el interior del recinto g' (AA_1C_1CaA), el punto b'_n en el interior del recinto d' (BB_1D_1DbB) y el arco σ'_n en el anillo $r < |z| < 1$. Demostremos que para cada valor de $n > N'$ en el arco σ'_n existe un arco σ_n, uno de cuyos extremos está situado en el diámetro AD, y el otro, en el diámetro BC; además, σ_n está completamente situado, a excepción de sus extremos, en uno de los recintos AA_1B_1B o CDD_1C_1.

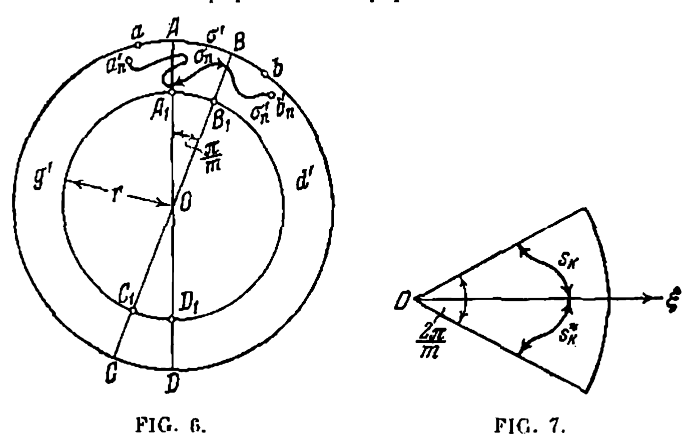


FIG. 6. FIG. 7.

En efecto, cuando t crece desde t'_n hasta τ'_n, el punto $z = \lambda(t)$ recorre continuamente el arco σ'_n desde el punto a'_n hasta el punto b'_n; además, a'_n y b'_n pertenecen a unos recintos g' y d' tales, que $\bar{g}'$ y $\bar{d}'$ no tienen puntos comunes. Por lo tanto, tiene que existir un valor de t_n, $t'_n < t_n < \tau'_n$, tal que $a_n = \lambda(t_n)$ pertenece al recinto cerrado $\bar{g}'$, mientras que $\lambda(t)$ para $t_n < t \leqslant \tau'_n$ ya no pertenece a $\bar{g}'$, y un valor τ_n, $t_n < \tau_n < \tau'_n$, tal que $b_n = \lambda(\tau_n)$ pertenece a $\bar{d}'$, mientras que $\lambda(t)$ para $t_n \leqslant t < \tau_n$ todavía no pertenece a $\bar{d}'$. Evidentemente, los puntos a_n y b_n están situados en las fronteras de los recintos g' y d', precisamente, en los segmentos de los diámetros A_1A o C_1C (para el punto a_n) y BB_1 o DD_1 (para el punto b_n). El arco de Jordan σ_n: $t_n \leqslant t \leqslant \tau_n$ con los extremos a_n y b_n pertenece a uno de los dos recintos $\overline{AA_1B_1B}$ o $\overline{CDD_1C_1}$ y solamente sus extremos están situados en la frontera del recinto, mientras que todos los demás son interiores. Como n toma un conjunto infinito de valores, al menos uno de los dos últimos recintos — sea éste AA_1B_1B — contiene un conjunto infinito de arcos distintos σ_n: $\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2}, \ldots, \sigma_{n_k}, \ldots, n_1 < n_2 < \ldots$

$\ldots < n_k < \ldots$ Hagamos la sustitución de la variable $\zeta = e^{i\theta}z$, de modo que uno de los diámetros AD o BC se transforme en el eje real del plano ζ y que la imagen del recinto AA_1B_1B pertenezca al primer cuadrante coordenado. Designaremos las imágenes de los arcos $\sigma_{n_1}, \sigma_{n_2}, \ldots, \sigma_{n_k}, \ldots$ mediante $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots$ En la sustitución indicada la función $\varphi(z)$ se transforma en la función $\varphi(e^{-i\theta}\zeta) = \psi(\zeta)$, la cual es analítica y está acotada en el círculo unidad, satisfaciendo a las condiciones: $\psi(0) = \delta \neq 0$, $\lim\limits_{\zeta \in s_k,\ k \to \infty} \psi(\zeta) =$ $= 0$. Haciendo la notación $\mu_k = \max\limits_{\zeta \in s_k} |\psi(\zeta)|$, se puede escribir la última condición en la forma:

$$\lim_{k \to \infty} \mu_k = 0.$$

Si el desarrollo de Taylor de la función $\psi(\zeta)$ es

$$\psi(\zeta) = \delta + \delta_1\zeta + \ldots + \delta_n\zeta^n + \ldots,$$

entonces introducimos otra función analítica más:

$$\psi^*(\zeta) = \overline{\delta} + \overline{\delta}_1\zeta + \ldots + \overline{\delta}_n\zeta^n + \ldots$$

Evidentemente, en los puntos que son simétricos respecto del eje real, $\psi(\zeta)$ y $\psi^*(\zeta)$ toman valores conjugados. Por esta razón

$$\sup_{|\zeta| < 1} |\psi(\zeta)| = \sup_{|\zeta| < 1} |\psi^*(\zeta)| = M < \infty \quad \text{y} \quad \psi^*(0) = \overline{\psi(0)} \neq 0;$$

designando con s_k^* el arco que es simétrico a s_k respecto del eje real, tendremos también:

$$\max_{\zeta \in s_k} |\psi(\zeta)| = \max_{\zeta \in s_k^*} |\psi^*(\zeta)| = \mu_k.$$

Los arcos s_k y s_k^* tienen un punto único común situado en el eje real y conjuntamente forman un arco de Jordan S_k, que es simétrico respecto del eje real y une dos lados del ángulo $|\arg\varphi| < \frac{\pi}{m}$ (fig. 7). Para la función analítica $\chi(\zeta) = \psi(\zeta)\psi^*(\zeta)$ se tiene:

$$|\chi(\zeta)| \leqslant M^2 \quad \text{cuando} \quad |\zeta| < 1, \quad \chi(0) = \psi(0)\psi^*(0) = |\delta|^2 \neq 0$$

y

$$\max_{\zeta \in S_k} |\chi(\zeta)| \leqslant M\mu_k \to 0 \quad \text{cuando} \quad k \to \infty.$$

Sometiendo al arco S_k a rotaciones de la forma

$$\zeta' = e^{i\frac{2\pi}{m}j}\zeta \qquad (j = 1, 2, \ldots, m-1),$$

se obtienen de él los arcos $S_k', \ldots, S_k^{(m-1)}$, que junto con S_k forman una curva cerrada de Jordan Γ_k, la cual contiene en su interior

al origen de coordenadas y está situada ella misma en el círculo unidad. Si ζ es un punto arbitrario de la curva Γ_k, entonces todos los m puntos: $\zeta, e^{i\frac{2\pi}{m}}\zeta, \ldots, e^{i\frac{2\pi(m-1)}{m}}\zeta$ también están situados en Γ_k y, además, al menos uno de ellos pertenece al arco S_k. Debido a esto, en el punto $\zeta \in \Gamma_k$ al menos uno de los m números

$$\chi(\zeta), \ \chi(e^{i\frac{2\pi}{m}}\zeta), \ \ldots, \ \chi(e^{i\frac{2\pi(m-1)}{m}}\zeta)$$

será en valor absoluto no superior a $M\mu_k$, mientras que cada uno de los demás no superará a M^2. Por consiguiente, para el producto

$$F(\zeta) = \chi(\zeta)\cdot\chi(e^{i\frac{2\pi}{m}}\zeta)\ \ldots\ \chi(e^{i\frac{2\pi(m-1)}{m}}\zeta)$$

en cualquier punfo $\zeta \in \Gamma_k$ se verificará la desigualdad

$$|F(\zeta)| \leqslant M\mu_k M^{2(m-1)},$$

y como la función $F(\zeta)$ es analítica, en el punto $\zeta = 0$ también se tendrá:

$$|F(0)| = |\delta|^{2m} \leqslant \mu_k M^{2m-1}.$$

Finalmente, pasando aquí al límite para $k \to \infty$, obtenemos $\delta = 0$, lo cual contradice a la hipótesis hecha. Con esto se termina la demostración.

O b s e r v a c i ó n. De la demostración efectuada se ve que la proposición conserva su valor en las condiciones siguientes: sea $\{\gamma_n\}$ una sucesión de arcos de Jordan pertenecientes al círculo unidad, a excepción, posiblemente, de los puntos iniciales y finales, y tal que para cualquier sucesión de puntos $\{z_n\}$, $z_n \in \gamma_n$, todos los puntos de acumulación están situados en la circunferencia unidad; supondremos también que en γ_n se pueden hallar sendos pares de puntos a_n y b_n, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Entonces, si una función $f(z)$, analítica y acotada en valor absoluto, satisface a la condición

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ z_n \in \gamma_n}} f(z_n) = c,$$

se tiene: $f(z) \equiv c$. Para cerciorarse de esto, es suficiente observar que en la sucesión de arcos $\{\gamma_n\}$ se puede construir una sucesión de arcos $\{\sigma_m\}$ exactamente iguales que los que se utilizaron en la demostración del lema 1.

L e m a 2. *Sea g un recinto limitado por una curva de Jordan γ y perteneciente al círculo unidad conjuntamente con γ, a excepción del único punto frontera ζ, situado en la circunferencia $|z| = 1$. Vamos a considerar la curva γ como compuesta de dos semiintervalos*

de Jordan

$$\gamma_1\colon\ z=\lambda_1(t),\quad \alpha_1\leqslant t<\beta_1 \quad \text{y} \quad \gamma_2\colon\ z=\lambda_2(t),\quad \alpha_2\leqslant t<\beta_2$$

con el origen común $\lambda_1(\alpha_1)=\lambda_2(\alpha_2)$ *y el extremo común* ζ, *y del mismo punto* ζ.

Si $f(z)$ *es una función analítica y acotada en el círculo unidad, y tiende hacia unos límites determinados* c_1 *y* c_2 *en* γ_1 *y* γ_2:

$$\lim_{t\to\beta_1} f[\lambda_1(t)]=c_1,\qquad \lim_{t\to\beta_2} f[\lambda_2(t)]=c_2,$$

entonces necesariamente $c_1=c_2=c$ *y, además,* $\lim\limits_{\substack{z\to\zeta\\ z\in\bar{g}}} f(z)=c$.

D e m o s t r a c i ó n. Examinemos primero el caso en que $c_1 = c_2 = c$, y demostremos la última parte de la tesis del lema: $\lim\limits_{\substack{z\to\zeta\\ z\in\bar{g}}} f(z)=0$. Evidentemente, podemos no examinar los puntos situados en la frontera del recinto, puesto que para ellos se cumple la relación $f(z)\to 0$ debido a la hipótesis hecha. Así, pues, sea

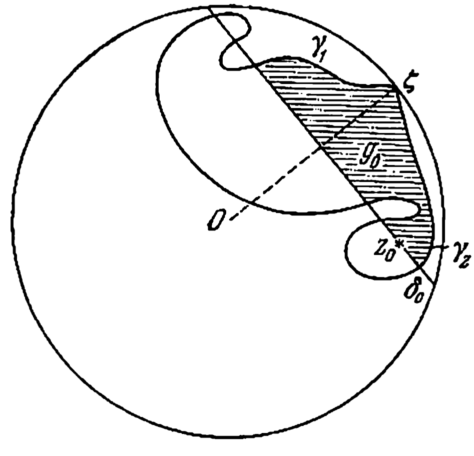


FIG. 8.

z_0 un punto interior del recinto g; tracemos por él una cuerda δ_0 perpendicular al radio 0ζ (fig. 8). Esta cuerda dividirá al recinto g en subrecintos, de los cuales consideraremos solamente aquellos que están hacia un mismo lado de δ_0 que el punto ζ. Un recinto de ellos y solamente uno, g_0, contiene en la frontera el punto z_0. Si ζ no es un punto frontera para g_0, entonces el dominio $\bar{g}_0$ está contenido en

el círculo unidad; en la fig. 8 está representado el caso en que el punto ζ pertenece a la frontera del recinto g_0.

La frontera de g_0 consta solamente de las partes de los semiintervalos curvilíneos γ_1 y γ_2 que están situados en el mismo lado de δ_0 en que está situado el punto ζ, y de los segmentos de la cuerda (que pueden degenerar en puntos). Como, según la hipótesis, $f(z)$ tiende a cero en γ_1 y γ_2, para cualquier $\varepsilon > 0$ y para z_0 suficientemente próximo a ζ, los valores del módulo $|f(z)|$ en las partes de la frontera de g_0 que están situadas en γ_1 y γ_2 serán menores que ε.

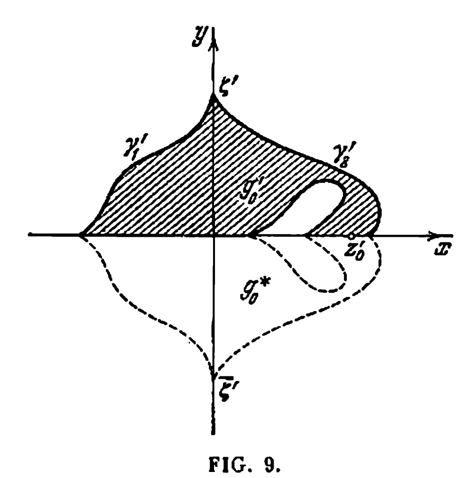


FIG. 9.

Hagamos la sustitución de la variable $z' = e^{i\theta}z + a$ (rotación y traslación), eligiendo θ y a de modo que la cuerda δ se transforme en un segmento del eje real, y el punto ζ ocupe la posición ζ' en la parte positiva del eje imaginario (fig. 9). Entonces el recinto g_0 se transformará en un recinto g_0' situado en el semiplano superior, $z = 0$ se convertirá en el punto a de la parte negativa del eje imaginario, el círculo unidad $|z| < 1$ en el círculo $|z' - a| < 1$, γ_1 y γ_2 en γ_1' y γ_2', y el punto z_0 en un punto z_0' del eje real situado en la frontera de g_0'. Designemos $f(z) = f[(z' - a)e^{-i\theta}]$ mediante $\varphi(z')$. Esta función es analítica en el círculo $|z' - a| < 1$, está acotada en valor absoluto, satisface a la desigualdad $|\varphi(z')| < \varepsilon$ en los puntos frontera del recinto g_0' situados en γ_1' y γ_2', y tiende a cero cuando z' tiende a ζ' manteniéndose en γ_1' o en γ_2'. Si se hace

$$\varphi(z)' = \sum_{0}^{\infty} a_n (z' - a)^n,$$

entonces la función

$$\varphi^*(z') = \sum_0^\infty \bar{a}_n (z' - \bar{a})^n,$$

la cual toma en cada punto z' un valor conjugado con el valor $\varphi(\bar{z}')$:

$$\varphi^*(z') = \overline{\varphi(\bar{z}')},$$

será analítica en el círculo $|z' - \bar{a}| < 1$, estará acotada en valor absoluto y en los puntos z' situados debajo del eje real, que son puntos frontera del recinto g_0^* que es simétrico a g_0' respecto del eje real, satisface a las condiciones:

$$|\varphi^*(z')| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \lim_{z' \to \bar{\zeta}'} \varphi^*(z') = 0.$$

Compongamos con los recintos g_0' y g_0^* un recinto G_0, incluyendo en él todos los puntos de los intervalos del eje real que son fronteras de g_0' y g_0^*. El punto z_0' será interior para G_0. Sea

$$\sup_{|z'-a|<1} |\varphi(z')| = \sup_{|z|<1} |f(z)| = M < \infty;$$

entonces también $\sup\limits_{|z'-\bar{a}|<1} |\varphi^*(z')| = M$, por consiguiente, la función $\varphi(z')\varphi^*(z')$, que es analítica en el recinto G_0, satisface en el mismo a la desigualdad:

$$|\varphi(z')\varphi^*(z'),| \leqslant M^2.$$

Si el punto ζ no está situado en la frontera del recinto g_0, entonces ζ' tampoco estará situado en la frontera del recinto g_0', por consiguiente, $\bar{g}_0'$ estará contenido en el círculo $|z' - a| < 1$ y $\bar{g}_0^*$ en el círculo $|z' - \bar{a}| < 1$. Por esta razón, la función $\varphi(z')\varphi^*(z')$ será analítica y, por lo tanto, también continua en el dominio $\bar{G}_0$. En la frontera del recinto G_0 ésta satisface a la desigualdad $|\varphi(z')\varphi^*(z')| \leqslant M\varepsilon$, de donde, en virtud del principio del módulo máximo, se tiene:

$$|\varphi(z_0')\varphi^*(z_0')| \leqslant M\varepsilon,$$

o bien, observando que $\varphi^*(z_0') = \overline{\varphi(\bar{z}_0')} = \overline{\varphi(z_0')}$ ($\bar{z}_0' = z_0'$, puesto que z_0' es número real):

$$|\varphi(z_0')|^2 = |f(z_0)|^2 \leqslant M\varepsilon.$$

Supongamos ahora que ζ está situado en la frontera del recinto g_0; entonces ζ' también estará situado en la frontera de g_0'; por lo tanto, los puntos frontera ζ' y $\bar{\zeta}'$ del recinto G_0 no serán interiores

para los círculos $|z' - a| < 1$ y $|z' - \bar{a}| < 1$, de modo que no se puede afirmar que $\varphi(z')\,\varphi^*(z')$ es una función continua en el dominio $\bar{G}_0$. Para reducir este caso al de una función continua en el dominio, formemos el producto

$$\psi(z') = \varphi(z')\,\varphi^*(z')\,(z' - \zeta')^\mu (z' - \bar{\zeta}')^\mu,$$

donde μ es un número positivo arbitrario y $(z' - \zeta')^\mu$ y $(z' - \bar{\zeta}')^\mu$ son unas ramas uniformes cualesquiera de las funciones analíticas correspondientes en el recinto G_0. La función $\psi(z')$ es uniforme y analítica en el recinto G_0 y está acotada en valor absoluto $|\psi(z')| < M^2 2^\mu \cdot 2^\mu = 4^\mu \cdot M^2$. Además, resulta continua en el dominio $\bar{G}_0$ si se hace:

$$\psi(\zeta') = \lim_{z' \to \zeta'} \varphi(z')\,\varphi^*(z')\,(z' - \zeta')^\mu (z' - \bar{\zeta}')^\mu = 0 \quad \text{y} \quad \psi(\bar{\zeta}) = 0.$$

Como en la frontera del recinto G_0 la función satisface a la desigualdad

$$|\psi(z')| < M \cdot \varepsilon \cdot 2^\mu \cdot 2^\mu = 4^\mu M \cdot \varepsilon,$$

en virtud del principio del módulo máximo, esta desigualdad se satisface también en el punto $z_0' \in G_0$:

$$|\psi(z_0')| = |\varphi(z_0')|^2 \, |z_0' - \zeta'|^{2\mu} < 4^\mu M \varepsilon,$$

de donde, pasando al límite para $\mu \to 0$:

$$|\varphi(z_0')|^2 \leqslant M\varepsilon \quad \text{o sea,} \quad |f(z_0)|^2 \leqslant M\varepsilon.$$

Resumiendo, en todos los casos se cumple la desigualdad

$$|f(z_0)|^2 \leqslant M\varepsilon$$

para cualquier $\varepsilon > 0$ y z_0 suficientemente próximo a ζ. De aquí se deduce que

$$\lim_{z_0 \to \zeta} f(z_0) = 0.$$

No queda más que demostrar la primera parte del lema, o sea que de

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \gamma_1}} f(z) = c_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \gamma_2}} f(z) = c_2$$

se deduce que $c_1 = c_2$ Formemos el producto

$$F(z) = [f(z) - c_1]\,[f(z) - c_2].$$

Este satisface a las condiciones del teorema y, además,

$$\lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \gamma_1}} F(z) = \lim_{\substack{z \to \zeta \\ z \in \gamma_2}} F(z) = 0.$$

Supongamos que $c_1 \neq c_2$, y sea $|c_1 - c_2| = \rho > 0$.

Tomemos un entorno U del punto ζ tan pequeño, que en el mismo se cumplan las desigualdades:

$$|F(z)| = |f(z) - c_1| \, |f(z) - c_2| < \frac{\rho^2}{4} \quad (z \in \bar{g}) \qquad (3.2:1)$$

(esto es posible debido a la parte demostrada del lema),

$$|f(z) - c_1| < \frac{\rho}{2} \ (z \in \gamma_1), \qquad |f(z) - c_2| < \frac{\rho}{2} \ (z \in \gamma_2). \qquad (3.2:2)$$

La parte del recinto g que cae en U consta de recintos, de los cuales uno, g_0, contiene en la frontera al punto ζ. Sean ζ_1 y ζ_2 dos puntos frontera del recinto g_0 situados en el interior de U, en γ_1 y γ_2, respectivamente. Como en ellos se cumplen las desigualdades (3.2:2) (la primera para $z = \zeta_1$ y la segunda para $z = \zeta_2$), y como la función $f(z)$ es continua, se pueden señalar unos puntos z_1 y z_2 del recinto g_0 que están suficientemente próximos a ζ_1 y ζ_2, respectivamente, y tales que se tiene:

$$|f(z_1) - c_1| < \frac{\rho}{2}, \qquad f(z_2) - c_2| < \frac{\rho}{2},$$

de donde

$$|f(z_2) - c_1| \geqslant |c_2 - c_1| - |f(z_2) - c_2| > \frac{\rho}{2}.$$

Unamos z_1 y z_2 por el interior de g_0 mediante una curva γ. La imagen $f(\gamma)$ de esta curva unirá los puntos $f(z_1)$ y $f(z_2)$, y como el primero de estos puntos está situado en el interior del círculo $|w - c_1| < \frac{\rho}{2}$, y el segundo fuera del mismo, en γ tiene que existir un punto z_0, en el cual

$$|f(z_0) - c_1| = \frac{\rho}{2}$$

y, por consiguiente,

$$|f(z_0) - c_2| \geqslant |c_2 - c_1| - |f(z_0) - c_1| = \frac{\rho}{2}$$

Así, pues, hemos hallado un punto $z_0 \in g_0$ tal que

$$|f(z_0) - c_1| \, |f(z_0) - c_2| \geqslant \frac{\rho^2}{4}.$$

Pero esto contradice a la desigualdad (3.2:1). De aquí se deduce que la suposición hecha no es válida, y el lema queda completamente demostrado.

3.3. Apliquemos lo expuesto anteriormente al estudio de la estructura de la frontera Γ de un recinto acotado G simplemente conexo y al problema de la correspondencia de las fronteras en las transformaciones conformes.

Vamos a examinar el conjunto E de todos los semiintervalos de Jordan γ que están contenidos en un recinto dado G y tales que sus extremos están situados en Γ. En el caso general no cualquier punto puede servir de extremo para los semiintervalos de E. En la fig. 10 está representado un recinto G_1 obtenido del cuadrado $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, excluyendo un conjunto infinito de semiintervalos rectilíneos de la forma $x = \frac{1}{2n}$, $0 < y \leqslant \frac{3}{4}$, y $x = \frac{1}{2n+1}$, $\frac{1}{4} \leqslant y < 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Evidentemente, ninguno de los puntos frontera ζ situados en el eje imaginario puede ser extremo de un semiintervalo de Jordan situado en el recinto G_1.

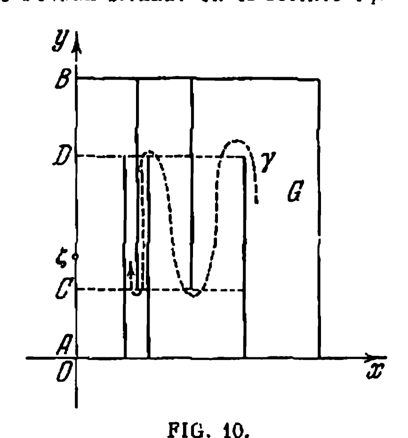


FIG. 10.

No obstante, es fácil observar que, para cualquier recinto G, el conjunto de aquellos puntos que son extremos de los semiintervalos $\gamma \in E$, es denso en todo sobre Γ. En efecto, supongamos que $\zeta_0 \in \Gamma$ y sea U_0 un entorno arbitrario del punto ζ_0; unamos el punto ζ_0 mediante un segmento rectilíneo δ con un punto cualquiera z_0 del recinto G, situado en este entorno. Entonces el punto del segmento δ que es punto frontera para G y que está más próximo a z_0 (tal punto puede ser el mismo punto ζ_0), sirve de extremo de un semiintervalo del conjunto E, precisamente del semiintervalo rectilíneo con el punto inicial en z_0.

Respecto de cada semiintervalo γ del conjunto E diremos que él *determina un punto alcanzable de la frontera* Γ (respecto del recinto G). Dos semiintervalos $\gamma_1 \in E$ y $\gamma_2 \in E$ determinarán un mismo punto alcanzable cuando, y sólo cuando, se cumplan las dos condiciones siguientes:

1) γ_1 y γ_2 tienen un extremo común ζ;

2) existe un semiintervalo $\gamma_3 \in E$ con el extremo ζ, que tiene puntos comunes tanto con γ_1 como con γ_2 en cualquier entorno del punto ζ.

En la fig. 11 está representado un recinto G_2, cuya frontera consta de una circunferencia y de uno de sus radios. Los semiintervalos γ_1 y γ_2 representados aquí determinan un mismo punto alcanzable de la frontera, mientras que γ_1 y γ' o γ_2 y γ' determinan distintos puntos alcanzables de la frontera.

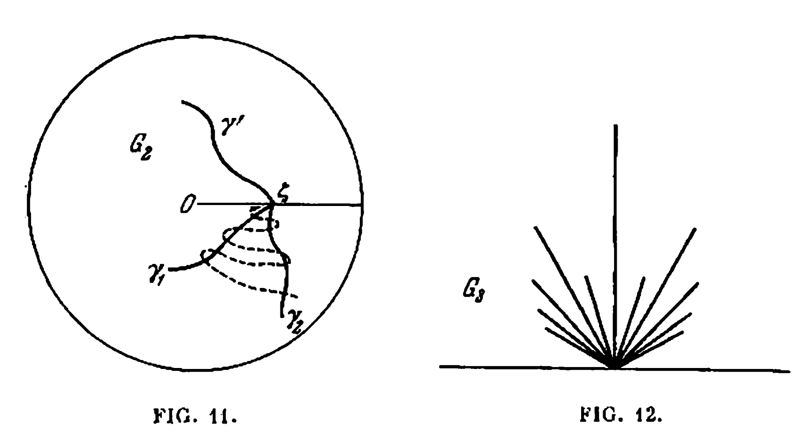


FIG. 11. FIG. 12.

El extremo ζ del semiintervalo γ lo vamos a considerar como *representante* de un punto alcanzable. Es necesario tener en cuenta que un mismo punto ζ puede representar unos cuantos puntos alcanzables distintos de la frontera. Así, en la fig. 11 el punto ζ representa dos puntos alcanzables. En la fig. 12 está representado esquemáticamente un recinto G_3 que se obtiene del semiplano superior excluyendo un conjunto infinito de segmentos rectilíneos que parten del origen de coordenadas bajo todos los ángulos posibles de la forma $\frac{p}{q}\pi$ $\left(\frac{p}{q}\text{ son fracciones propias irreducibles}\right)$, y donde las longitudes de los segmentos son iguales a $\frac{1}{q}$, respectivamente. En este ejemplo, el punto O representa un conjunto infinito no numerable de puntos alcanzables distintos, precisamente, un conjunto de la potencia del continuo.

En efecto, todo semiintervalo rectilíneo: $0 < |z| \leqslant 1$, $\arg z = \alpha\pi$, donde $0 < \alpha < 1$, y α es un número irracional, determina un punto alcanzable, representado por el punto O. A distintos valores de α corresponden, evidentemente, distintos puntos alcanzables.

Veamos cómo se transforman los semiintervalos de Jordan del conjunto E al hacer una transformación conforme del recinto G en un círculo (para precisar, en el círculo unidad).

T e o r e m a 1. *En la transformación conforme $w = f(z)$ de un recinto G en el círculo unidad K, todos los semiintervalos de Jordan del conjunto E que determinan un mismo punto alcanzable de la frontera Γ, se transforman en semiintervalos de Jordan que están contenidos en el círculo unidad K y poseen un extremo común σ situado en la circunferencia unidad.*

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que el semiintervalo $\gamma \in E$ con el extremo en el punto $\zeta \in \Gamma$, determina algún punto alcanzable de la frontera Γ. Según el teorema 2, ap. 3.1, $\delta = f(\gamma)$ es un semiintervalo curvilíneo situado en el círculo unidad, además, todos los puntos de acumulación de este semiintervalo δ están situados en la circunferencia unidad. Si se supone que δ no es un semiintervalo de Jordan, entonces éste tiene que tener al menos dos puntos de acumulación en la circunferencia. Pero entonces a él y a la función $z = f^{-1}(w)$, que es la inversa de la función $w = f(z)$, se les puede aplicar el lema 1, ap. 3.2. Precisando, como

$$\lim_{\delta} f^{-1}(w) = \zeta,$$

según el lema indicado tiene que ser $f^{-1}(w) \equiv \zeta$, lo cual es imposible.

Así, pues, δ es un semiintervalo de Jordan, cuyo extremo σ está situado en la circunferencia unidad.

Supongamos que $\gamma_1 \in E$ y $\gamma_2 \in E$ determinan un mismo punto alcanzable. Designemos los extremos de los semiintervalos $\delta_1 = f(\gamma_1)$ y $\delta_2 = f(\gamma_2)$ mediante σ_1 y σ_2. En virtud de la definición de punto alcanzable, existe un semiintervalo $\gamma_3 \in E$ que tiene un conjunto infinito de puntos comunes con γ_1 y γ_2 en cualquier entorno de su extremo común. Su imagen $\delta_3 = f(\gamma_3)$ tiene que ser un semiintervalo de Jordan con un conjunto infinito de puntos comunes con δ_1 y δ_2; además, los puntos σ_1 y σ_2 serán puntos de acumulación para ellos (véase el teorema 1, ap. 3.1) y, por consiguiente, serán puntos de acumulación del semiintervalo de Jordan δ_3. De aquí se deduce que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, con lo que se termina la demostración.

En virtud de este teorema, en la transformación conforme de un recinto G en un círculo, a cada punto alcanzable de la frontera del recinto G le corresponde un punto σ de la circunferencia.

T e o r e m a 2. *En la transformación conforme $w = f(z)$ de un recinto G en un círculo, a distintos puntos alcanzables de la frontera Γ del recinto G les corresponden distintos puntos de la circunferencia.*

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que $\gamma_1 \in E$ y $\gamma_2 \in E$, con los extremos ζ_1 y ζ_2, determinan dos puntos alcanzables distintos de la

frontera Γ. Designemos con σ_1 y σ_2 los extremos de los semiintervalos $\delta_1 = f(\gamma_1)$ y $\delta_2 = f(\gamma_2)$. Supongamos, en contra de la tesis del teorema, que $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$. Entonces son posibles dos casos:

a) δ_1 y δ_2 tienen un conjunto infinito de puntos comunes en cualquier entorno del punto σ. Entonces γ_1 y γ_2 tienen que tener un conjunto infinito de puntos comunes con los puntos de acumulación en Γ (véase el teorema 1, ap. 3.1). De aquí se deduce que ellos tienen un extremo común y que determinan un mismo punto alcanzable de la frontera Γ. Pero esto contradice a la hipótesis del teorema.

b) δ_1 y δ_2 tienen solamente un número finito de puntos comunes en cierto entorno del punto σ. Despreciando algunas partes iniciales de los semiintervalos δ_1 y δ_2, obtendremos unos semiintervalos de Jordan δ_1' y δ_2' sin puntos comunes y con el mismo extremo común σ. Las preimágenes de los semiintervalos δ_1' y δ_2' en el recinto G serán los semiintervalos de Jordan γ_1' y γ_2' que se obtienen de γ_1 y γ_2 despreciando algunas de sus partes iniciales.

Evidentemente, γ_1' y γ_2' determinan los mismos puntos alcanzables de la frontera Γ que γ_1 y γ_2. Teniendo presente la aplicación del lema 2, ap. 3.2, unamos los puntos $w_1' \in \delta_1'$ y $w_2' \in \delta_2'$ con un arco de Jordan δ_0' perteneciente al círculo. Recorriendo δ_0' desde w_1' hasta w_2, despreciemos su parte inicial desde w_1' hasta el último punto w_1 de intersección con δ_1' y la parte final desde el primer punto w_2 de intersección con δ_2' hasta w_2'; se obtiene un arco de Jordan $\tilde{\delta}_0$ que une $w_1 \in \delta_1'$ con $w_2 \in \delta_2'$ y que no tiene otros puntos comunes con δ_1' y δ_2'. Despreciemos también las partes iniciales de los semiintervalos δ_1' y δ_2' hasta los puntos w_1 y w, respectivamente. Resultan unos semiintervalos de Jordan $\tilde{\delta}_1$ y $\tilde{\delta}_2$, los cuales junto con su extremo común σ y el arco $\tilde{\delta}_0$ forman una curva cerrada de Jordan que encierra un subrecinto g del círculo unidad. Debido a la construcción, las preimágenes de los semiintervalos de Jordan $\tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1$ y $\tilde{\delta}_2$ en el recinto G son también semiintervalos de Jordan $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ con los extremos ζ_1 y ζ_2, los cuales determinan los mismos puntos alcanzables que los semiintervalos iniciales γ_1 y γ_2. Para la función $z = f^{-1}(w)$ se tiene:

$$\lim_{\tilde{\delta}_0+\tilde{\delta}_1} f^{-1}(w) = \zeta_1 \quad \text{y} \quad \lim_{\tilde{\delta}_2} f^{-1}(w) = \zeta_2.$$

Según el lema 2, ap. 3.2, de aquí se deduce que $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, o sea, $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ tienen un extremo común.

Construyamos en el dominio $\bar{g}$ un arco de Jordan $\tilde{\delta}_3$ con el extremo en σ y que tenga en cualquier entorno del punto σ un conjunto infinito de puntos comunes con $\tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1$ y $\tilde{\delta}_2$. Este puede formarse con arcos de circunferencias concéntricas con el centro en σ y de

radios ε_n, $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ y con arcos, pertenecientes alternativamente a $\tilde{\delta}_1$ y $\tilde{\delta}_2$, que unen puntos de dos circunferencias vecinas. (Los detalles de la construcción los dejamos a cuenta del lector; véase la fig. 13, donde las partes del semiintervalo $\tilde{\delta}_3$ están representadas por líneas de trazos.) La función $z = f^{-1}(w)$ transforma $\tilde{\delta}_3$ en un semiintervalo curvilíneo $\tilde{\gamma}_3$, situado en el recinto G, con los

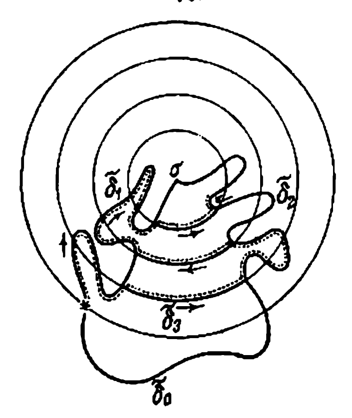


FIG. 13.

puntos de acumulación en Γ (teorema 2, ap. 3.1). En virtud del lema 2, ap. 3.2, el punto z que describe $\tilde{\gamma}_3$ tiene que tender hacia el límite $\zeta \in \Gamma$. Por ello $\tilde{\gamma}_3$ es un semiintervalo de Jordan con el extremo ζ. Además, $\tilde{\gamma}_3$ tiene que tener un conjunto infinito de puntos comunes con $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ en cualquier entorno del punto ζ. De aquí se deduce que $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ determinan un mismo punto alcanzable de la frontera Γ, lo cual contradice a la condición. Con esto se termina la demostración.

Así, pues, en la transformación conforme de un recinto G en un círculo, el conjunto de los puntos alcanzables de la frontera de este recinto se transforma en un conjunto e de puntos de la circunferencia unidad; además, la correspondencia entre los puntos alcanzables y los puntos del conjunto e es biunívoca. En particular, en el caso representado en la fig. 11, a los dos puntos alcanzables representados por ζ en la transformación conforme del recinto G_2 en un círculo les tienen que corresponder dos puntos distintos de la circunferencia, y en el caso representado en la fig. 12, a los puntos alcanzables representados por O les tienen que corresponder un conjunto infi-

nito de puntos distintos de la circunferencia (que posee la potencia del continuo).

Teorema 3. *El conjunto e de las imágenes de los puntos alcanzables es denso en todo sobre la circunferencia.*

Demostración. Sea $\{w_n\}$ una sucesión de puntos de la circunferencia unidad, convergente hacia un punto w_0, $|w_0|=1$, y sea $z_n = f^{-1}(w_n)$ la sucesión de los puntos que les corresponden en el recinto G. Según el teorema 1, ap. 3.1, todos los puntos de acumulación de la sucesión $\{z_n\}$ pertenecen a Γ. Elijamos en $\{z_n\}$

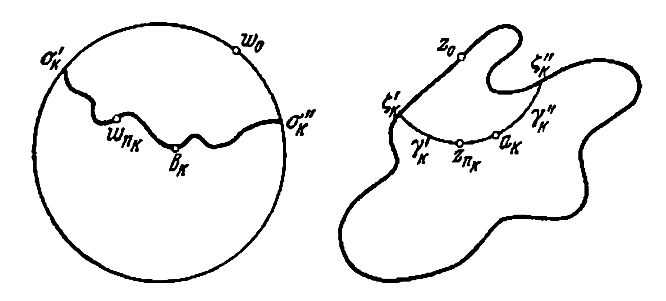


FIG. 14.

una sucesión parcial $\{z_{n_k}\}$ que converja hacia un punto $z_0 \in \Gamma$. Además, exigiremos que las distancias $|z_{n_k} - z_0|$ sean decrecientes. La sucesión $\{w_{n_k}\}$ de las imágenes de los puntos $\{z_{n_k}\}$ converge como anteriormente hacia el punto w_0. Tracemos por los puntos z_{n_k} unos arcos de circunferencias con centro en z_0 y prolonguemos cada uno de ellos a ambos lados hasta los primeros puntos ζ_k' y ζ_k'' de encuentro con Γ. Tal arco consta de un par de semiintervalos de Jordan γ_k' y γ_k'' con origen común z_{k_n} y con los extremos ζ_k' y ζ_k'' (fig. 14). Según el teorema 1, las imágenes de estos semiintervalos son también unos semiintervalos de Jordan δ_k' y δ_k'' con el origen común w_{n_k} y con los extremos σ_k' y σ_k'' situados en la circunferencia unidad.

Evidentemente, σ_k' y σ_k'' son imágenes de puntos alcanzables, determinados por los semiintervalos γ_k' y γ_k''. Como el punto de acumulación de cualquier sucesión $\{a_k\}$, $a_k \in \gamma_k' + \gamma_k''$ es $z_0 \in \Gamma$, los puntos de acumulación de cualquier sucesión $\{b_k\}$, $b_k \in \delta_k' + \delta_k''$ están situados en la circunferencia unidad. Pero la sucesión $\{w_{n_k}\}$, $w_{n_k} \in \delta_k' + \delta_k''$ converge hacia el punto w_0; por ello, cualquier sucesión $\{b_k\}$, $b_k \in \delta_k' + \delta_k''$ tiene que converger hacia el mismo punto. En caso contrario, en virtud de la observación al lema 1, ap. 3.2,

deduciríamos de la relación $\lim_{k\to\infty} f(b_k) = z_0$, que $f^{-1}(w) \equiv z_0$. De aquí que las sucesiones $\{\sigma'_k\}$ y $\{\sigma''_k\}$ de los extremos de los semiintervalos δ'_k y δ''_k también convergen hacia w_0, o sea, w_0 — que es un punto arbitrario de la circunferencia unidad— es un punto de acumulación para las imágenes de los puntos alcanzables de la frontera Γ. Con esto se termina la demostración.

3.4. En este apartado introduciremos el concepto de elementos frontera de un recinto simplemente conexo (o extremos simples, según la terminología de Carathéodory). Sean γ_1 y γ_2 dos semiintervalos de Jordan que determinan dos puntos alcanzables distintos de la frontera Γ de un recinto (acotado) G simplemente conexo. Es evidente que el conjunto de los puntos que son comunes a γ_1 y γ_2 no puede tener puntos de acumulación en Γ. Suponiendo lo contrario, obtendríamos: 1) que γ_1 y γ_2 tienen un extremo común ζ, y 2) que en cualquier entorno del punto ζ tiene que haber puntos de intersección de γ_1 y γ_2. Pero entonces, mediante arcos, tomados alternativamente en γ_1 y γ_2, se podría construir un semiintervalo de Jordan γ_3, perteneciente a G y con puntos comunes con γ_1 y γ_2 en cualquier entorno del punto ζ, lo cual es imposible (debido a que γ_1 y γ_2 determinan puntos alcanzables distintos). Por esta razón, despreciando en caso de necesidad algunos arcos iniciales de los semiintervalos γ_1 y γ_2, podemos suponer a continuación que estos semiintervalos no tienen puntos comunes (a excepción, posiblemente, del punto final común). Unamos sus puntos iniciales z_1 y z_2 por el interior de G mediante un arco de Jordan γ. Si z'_1 es el último punto del semiintervalo γ_1 que es común con γ, entonces despreciamos las partes de los arcos de γ_1 y γ que preceden al punto z'_1. Del mismo modo, si z'_2 es el primer punto del semiintervalo γ_2 que es común con γ_1, entonces despreciamos la parte del semiintervalo γ_2 que precede a z'_2 y la parte del arco γ que sigue después de z'_2. Como resultado, obtendremos dos semiintervalos de Jordan γ'_1 y γ'_2 que determinan los mismos puntos alcanzables que γ_1 y γ_2, y también un arco de Jordan γ' que une el punto inicial del semiintervalo γ'_1 con el punto inicial del semiintervalo γ'_2; además, $\gamma'_1 + \gamma' + \gamma'_2$ representará un intervalo de Jordan $\tilde{\gamma}$ perteneciente al recinto G. Uniéndole los extremos, resulta un arco de Jordan con los extremos en Γ. Como resultado de la transformación conforme del recinto G en un círculo, γ'_1 y γ'_2 se transformarán en semiintervalos de Jordan δ'_1 y δ'_2 con extremos distintos en la circunferencia (estos extremos serán imágenes de los puntos alcanzables correspondientes), y el arco γ' en cierto arco δ'. De esto se deduce que la imagen del intervalo de Jordan $\tilde{\gamma}$ será también un intervalo de Jordan $\tilde{\delta}$ con extremos distintos en la circunferencia unidad. Evidentemente, sus extremos dividen a la circunferencia en dos

arcos: Σ_1 y Σ_2; junto con $\tilde{\delta}$ éstos forman dos curvas cerradas de Jordan, cuyas partes interiores Δ_1 y Δ_2 pertenecen al círculo unidad y representan aquel par de recintos en los cuales $\tilde{\delta}$ divide el círculo unidad.

Las preimágenes de los recintos Δ_1 y Δ_2 en el recinto G son dos recintos simplemente conexos g_1 y g_2, en los cuales $\tilde{\gamma}$ divide a G. Si γ_3 es un semiintervalo de Jordan del recinto G, que determina un punto alcanzable de la frontera Γ, distinto de los puntos determinados por los semiintervalos γ_1 y γ_2, entonces, despreciando su parte inicial, se puede suponer que él no tiene puntos comunes con $\tilde{\gamma}$, por lo cual está situado en g_1 o en g_2 y determina un punto alcanzable de la frontera de uno de estos recintos.

Por consiguiente, todos los puntos alcanzables de la frontera Γ del recinto G, a excepción de dos, determinados por los semiintervalos γ_1 y γ_2, se dividen en dos clases, los cuales se pueden considerar como los *puntos alcanzables de las fronteras de los recintos* g_1 y g_2, respectivamente. En la transformación conforme del recinto G en un círculo, a los puntos alcanzables de la primera clase les corresponden puntos del arco Σ_1, y a los de la segunda clase, puntos del arco Σ_2. Los últimos arcos se determinan completamente por sus extremos y, por lo tanto, por dos puntos alcanzables dados de la frontera Γ; por esta razón, la división de todo el conjunto de puntos alcanzables en clases, caracterizada anteriormente, se determina completamente por dos puntos distintos dados de este conjunto y no depende de los semiintervalos de Jordan γ_1 y γ_2 que se utilicen para esto ni del arco de Jordan γ con que se unan sus puntos iniciales.

A las clases H_1 y H_2 que se determinan por los puntos alcanzables η_1 y η_2, las llamaremos *intervalos complementarios entre sí del conjunto de todos los puntos alcanzables de la frontera* Γ, a los puntos η_1 y η_2 los llamaremos *extremos* de los intervalos H_1 y H_2, y a los recintos g_1 y g_2, a cuyas fronteras pertenecen H_1 y H_2, respectivamente, los llamaremos *recintos adyacentes* a H_1 y H_2. De lo expuesto se deduce que en la transformación conforme $w = f(z)$, a cada par de intervalos complementarios entre sí H_1 y H_2 les corresponden un par de arcos complementarios entre sí Σ_1 y Σ_2 de la circunferencia, y a los recintos g_1 y g_2 adyacentes y H_1 y H_2 les corresponden los recintos Δ_1 y Δ_2 adyacentes a Σ_1 y Σ_2. Consideremos ahora un *sistema de intervalos encajados de puntos alcanzables* $\{H^{(n)}\}$. Supondremos que $H^{(n+1)} \subset H^{(n)}$, que los extremos del intervalo $H^{(n+1)}$ son distintos de los extremos del intervalo $H^{(n)}$ y que no existen dos puntos alcanzables distintos pertenecientes a todos los inter-

valos del sistema. En la circunferencia unidad al sistema $\{H^{(n)}\}$ le va a corresponder en la transformación conforme un sistema de arcos encajados $\{\Sigma^{(n)}\}$.

Debido a las hipótesis hechas, este sistema va a ceñirse en el sentido ordinario de la palabra hacia un punto w_0 de la circunferencia (si existiese un arco entero que estuviese contenido en cada uno de los $\Sigma^{(n)}$, entonces existiría también un conjunto infinito de puntos alcanzables que serían comunes a todos los $H^{(n)}$). Si w_0 es la imagen de algún punto alcanzable de la frontera Γ, entonces los intervalos $\{H^{(n)}\}$ tienen un punto alcanzable común único. Pero w_0 puede no ser la imagen de un punto alcanzable; en este caso no existe ningún punto alcanzable que sea común para todos los $H^{(n)}$.

Respecto de cada sistema de intervalos encajados $\{H^{(n)}\}$ diremos que éste determina un e l e m e n t o f r o n t e r a del recinto G. El punto w_0 se considerará como la i m a g e n d e l e l e m e n t o f r o n t e r a en la transformación $w = f(z)$. Dos sistemas $\{H_1^{(n)}\}$ y $\{H_2^{(n)}\}$ determinan un mismo elemento frontera cuando, y sólo cuando, cada intervalo $H_1^{(m)}$ contiene todos los intervalos $H_2^{(n)}$, comenzando desde uno de ellos en adelante, y cada intervalo $H_2^{(n)}$ contiene todos los intervalos $H_1^{(m)}$, comenzando desde uno de ellos en adelante. Es obvio que en estas condiciones se puede conservar solamente una parte, exigiendo, por ejemplo, que $H_2^{(n)} \subset H_1^{(m)}$ para $n > N(m)$ $(m = 1, 2, \ldots)$. En efecto, en este caso cada uno de los arcos $\Sigma_1^{(m)}$ de la circunferencia unidad, correspondiente al intervalo $H_1^{(m)}$, contendrá todos los arcos $\Sigma_2^{(n)}$, correspondientes a $H_2^{(n)}$ para $n > N(m)$. Por consiguiente, los sistemas de arcos $\{\Sigma_1^{(m)}\}$ y $\{\Sigma_2^{(n)}\}$ van a ceñirse hacia un mismo punto w_0 de la circunferencia unidad, situado dentro de cualquiera de estos arcos. Por ello, $\Sigma_2^{(n)}$ va a contener a $\Sigma_1^{(m)}$ para todos $m > M(n)$, y, por consiguiente, $H_2^{(n)}$ va a contener a $H_1^{(m)}$ para todos $m > M(n)$.

De este razonamiento se ve que la condición de identidad de dos elementos frontera, determinados por los sistemas de intervalos $\{H_1^{(m)}\}$ y $\{H_2^{(n)}\}$, es equivalente a la condición de la coincidencia de los puntos de la circunferencia hacia los que se ciñen los sistemas de arcos $\{\Sigma_1^{(m)}\}$ y $\{\Sigma_2^{(n)}\}$ que representan a estos intervalos.

Sea η un elemento frontera del recinto G, dado por un sistema de intervalos $\{H^{(n)}\}$. Construyamos para cada $H^{(n)}$ un recinto $g^{(n)}$ que esté contenido en G y sea adyacente a $H^{(n)}$. Exijamos que se cumplan las dos condiciones siguientes: 1) $g^{(n+1)} \subset g^{(n)}$ y 2) no existe ningún punto del recinto G que sea común para todos los recintos cerrados $\bar{g}^{(n)}$. A una sucesión tal la llamaremos c a d e n a

de recintos que conduce hacia η. Para convencerse de la posibilidad de esta construcción, lo más fácil es pasar al círculo unidad mediante una transformación conforme $w = f(z)$.

Sea $\{\Sigma^{(n)}\}$ un sistema de arcos de la circunferencia unidad, correspondiente a los intervalos $\{H^{(n)}\}$, y sean $\delta_1^{(n)}$ y $\delta_2^{(n)}$ los semiintervalos de Jordan que son imágenes de los semiintervalos $\gamma_1^{(n)}$ y $\gamma_2^{(n)}$ que determinan los extremos de los intervalos $H^{(n)}$. Construyamos un recinto $\Delta^{(n)}$ que sea adyacente al arco $\Sigma^{(n)}$ y que esté limitado por el arco $\Sigma^{(n)}$, por un arco de una circunferencia

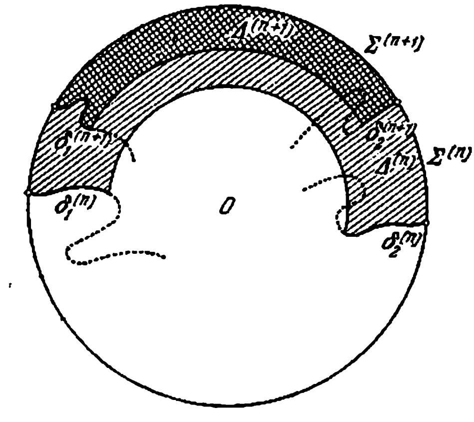


FIG. 15.

concéntrica $|w| = r_n < 1$ y por las dos partes de los semiintervalos $\delta_1^{(n)}$ y $\delta_2^{(n)}$ que se obtienen al despreciar algunos arcos iniciales de estos semiintervalos (fig. 15). Al valor r_n lo someteremos a la condición $r_n > 1 - \frac{1}{n}$. Como el arco $\Sigma^{(n+1)}$ está situado en el arco $\Sigma^{(n)}$ y los extremos de los arcos $\Sigma^{(n+1)}$ son distintos de los extremos de los arcos $\Sigma^{(n)}$, los semiintervalos $\delta_1^{(n+1)}$ y $\delta_2^{(n+1)}$ estarán contenidos en el recinto $\Delta^{(n)}$, por lo menos si se desprecian algunas de sus partes iniciales. Eligiendo $r_{n+1} > r_n$ y $r_{n+1} > 1 - \frac{1}{n+1}$ de modo que la circunferencia $|w| = r_{n+1}$ tenga puntos comunes con $\delta_1^{(n+1)}$ y $\delta_2^{(n+1)}$, construyamos un recinto $\Delta^{(n+1)}$ de un modo semejante al que se empleó al construir el recinto $\Delta^{(n)}$. Evidentemente, tendremos: $\Delta^{(n+1)} \subset \Delta^{(n)}$. Comenzando desde el recinto $\Delta^{(1)}$ se puede construir de esta manera una sucesión de recintos $\{\Delta^{(n)}\}$, adyacentes

a $\Sigma^{(n)}$, y tales que $\Delta^{(n+1)}$ esté contenido en el anillo $1 - \frac{1}{n} < |w| < 1$ y en el recinto $\Delta^{(n)}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Las preimágenes de $\Delta^{(n)}$ en el recinto G serán los recintos $g^{(n)}$, adyacentes a los intervalos $H^{(n)}$, y tales que $g^{(n+1)} \subset g^{(n)}$. En este caso, los dominios $\overline{g}^{(n)}$ no tienen ningún punto común que esté situado en el recinto G; esto se deduce de que sus imágenes $\overline{\Delta}^{(n)} = f(\overline{g}^{(n)})$ no tienen ningún punto común que esté situado en el círculo unidad. Así, pues, queda demostrada la existencia de una cadena de recintos $\{g^{(n)}\}$ que conduce a un elemento frontera η dado.

Como los dominios $\overline{g}^{(n)}$ son continuos, y $\overline{g}^{(n+1)} \subset \overline{g}^{(n)}$, la intersección de todos los $\overline{g}^{(n)}$ también es un continuo K (véase el t. I, ap. 4.1, cap. primero). Es obvio que éste consta solamente de puntos frontera del recinto G. Respecto de los puntos del continuo K, diremos que todos ellos pertenecen al elemento frontera considerado, y también que K representa al elemento frontera η*). Para justificar esta definición es necesario convencerse de que el conjunto K no depende de la elección de la cadena de los recintos que conducen a η.

Sean $\{H^{(n)}\}$ y $\{H'^{(n)}\}$ dos sistemas de intervalos que determinan a η, y sean $\{g^{(n)}\}$ y $\{g'^{(n)}\}$ las cadenas que les corresponden. En el círculo unidad a ellos les van a corresponder dos sistemas de arcos $\{\Sigma^{(n)}\}$ y $\{\Sigma'^{(n)}\}$ que se ciñen hacia un mismo punto w_0, y dos cadenas de recintos $\{\Delta^{(n)}\}$ y $\{\Delta'^{(n)}\}$ adyacentes a estos arcos. Cerciorémonos de que $\{\Delta^{(n)}\}$ y $\{\Delta'^{(n)}\}$ se ciñen hacia el punto w_0. En efecto, la intersección de los dominios $\overline{\Delta}^{(n)}$ es un continuo que no contiene puntos interiores del círculo unidad. Por ello, éste coincide con la intersección de los arcos frontera $\Sigma^{(n)}$, es decir, con el punto w_0. De aquí se deduce también que cada recinto $\Delta^{(m)}$ contiene todos los recintos $\Delta'^{(n)}$, comenzando desde uno de ellos en adelante, y, por consiguiente, $g^{(m)}$ contiene todos los $g'^{(n)}$, comenzando desde uno de ellos en adelante. Por esta razón, la intersección K' de todos los $\overline{g}'^{(n)}$ está contenida en la intersección K de todos los $\overline{g}^{(n)}$. Como K y K' pueden cambiarse de sitio, K coincide con K', que es lo que se afirmaba.

3.5. Ocupémonos del estudio de la estructura de los elementos frontera y de su clasificación. Para ello tendremos que estudiar las propiedades del continuo K que representa al elemento frontera dado η. Son posibles los casos siguientes: a) K consta de un solo punto; b) K contiene más de un punto.

---

*) Aquí no identificamos el elemento frontera con el conjunto de puntos que le representa, puesto que un mismo conjunto puede representar distintos elementos frontera.

Sea $\{g^{(n)}\}$ una cadena cualquiera de recintos que conduce a η, sean $\{\Delta^{(n)}\}$ las imágenes de estos recintos en el círculo unidad, y supongamos que w_0 es el punto de la circunferencia unidad que es la imagen del elemento η. Entonces la intersección de los dominios $\{\overline{g}^{(n)}\}$ coincide con K, y la intersección de los dominios $\{\overline{\Delta}^{(n)}\}$ con w_0. Como los puntos de cualquier sucesión $\{w_n\}$ ($| w_n | < 1$) que converja hacia w_0 pertenecen al recinto $\Delta^{(m)}$ para $n > N(m)$, sus imágenes $\{z_n\}$ tienen que pertenecer al recinto $g^{(m)}$, de donde se deduce que todos los puntos de acumulación de la sucesión $\{z_n\}$ pertenecen al continuo K.

En el caso a), o sea, cuando K consta de un solo punto z_0, se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Así, pues, en este caso existe el límite $\lim\limits_{w\to w_0} f^{-1}(w)$ y éste es igual a z_0. Consideremos, en particular, la preimagen γ de cualquier semiintervalo de Jordan δ situado en el círculo unidad y que termine en el punto w_0. Como γ es un semiintervalo curvilíneo y $\lim\limits_{w\to w_0} f^{-1}(w) = \lim\limits_{w\to w_0} z(w) = z_0$, éste es un semiintervalo de Jordan que termina en el punto z_0. Vemos, pues, que en el caso a), la imagen w_0 del elemento frontera η es a la vez la imagen de un punto alcanzable de la frontera Γ, representado por el punto z_0. A este punto alcanzable lo identificaremos con el elemento frontera. El elemento frontera correspondiente se llama e l e m e n t o (extremo simple) de p r i m e r a e s p e c i e.

Consideremos ahora el caso b), o sea, cuando el continuo K contiene más de un punto y, por consiguiente, contiene un conjunto infinito de puntos; entonces no existe el límite $\lim\limits_{w\to w_0} f^{-1}(w)$. Sin embargo, puede ocurrir que w_0, siendo la imagen del elemento frontera η, sea a la vez la imagen de un punto alcanzable de la frontera Γ. Entonces existe un semiintervalo de Jordan δ que termina en el punto w_0 y es la imagen de un semiintervalo de Jordan γ que termina en el punto $z_0 \in K$. Es obvio que $\lim\limits_{\substack{w\to w_0\\ w\in\delta}} f^{-1}(w) = z_0$ determina un punto alcanzable de la frontera Γ, representado por el punto z_0. En este caso diremos que el punto alcanzable correspondiente está contenido en el elemento frontera y z_0 se llamará punto alcanzable del elemento η. Entonces, todos los puntos del continuo K, distintos de z_0, serán puntos no alcanzables del elemento frontera. En este caso η se llama e l e m e n t o f r o n t e r a d e s e g u n d a e s p e c i e. En la figura 16 el elemento de segunda especie está representado por el segmento de recta AB. En la misma están representados también dos recintos $g^{(n)}$ y $g^{(n+1)}$ de la cadena que conduce a este elemento. A es un punto alcanzable del elemento; todos los puntos del segmento AB distintos de A son sus puntos no alcanzables. Obsérvese que estos mismos puntos representan, además, elementos frontera

de primera especie. Así, el punto C representa uno de tales elementos.

Supongamos, finalmente, que w_0 no es la imagen de ningún punto alcanzable. En este caso no existe ningún punto alcanzable de la frontera Γ que pertenezca al elemento frontera dado. Cualquiera que sea el semiintervalo de Jordan δ que termine en el punto w_0, su preimagen γ no será semiintervalo de Jordan, es decir, el $\lim f^{-1}(w)$, $w \in \delta$, no existirá. A su vez, todos los puntos de acumulación del semiintervalo curvilíneo γ pertenecerán al continuo K. Se distinguen dos casos: Uno es cuando el conjunto de todos los

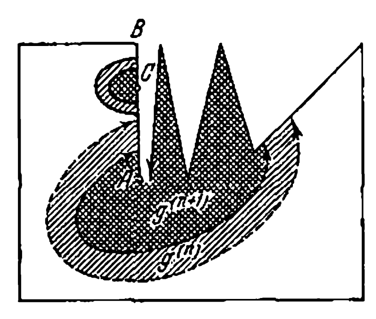


FIG. 16.

puntos de acumulación de $\gamma = f^{-1}(\delta)$ coincide con K. En este caso η se llama *elemento frontera de tercera especie*. Otro es cuando para algunos δ el conjunto de los puntos de acumulación de la preimagen $\gamma = f^{-1}(\delta)$ forma solamente una parte propia del continuo K. En este caso se tiene un *elemento frontera de cuarta especie*. Para reconocer a los elementos de tercera y cuarta especie no hay necesidad de recurrir a la transformación conforme f^{-1}. Es suficiente fijar alguna cadena de recintos $\{g^{(n)}\}$ que conduzca a η y considerar todos los semiintervalos curvilíneos posibles γ, con los puntos de acumulación en Γ, que están contenidos en cada uno de los recintos $g^{(n)}$, comenzando desde uno de sus puntos. Precisamente estos semiintervalos serán las preimágenes de todos los δ posibles que terminan en el punto w_0, que es la imagen del elemento η. Todo se reduce luego a comparar los conjuntos de los puntos de acumulación del semiintervalo γ con el continuo K.

En la fig. 17 el segmento AB representa un elemento frontera de tercera especie. La curva de trazos representa uno de los semiintervalos curvilíneos γ. Evidentemente, el conjunto de sus puntos de acumulación coincide con AB. El segmento AB de la fig. 10

puede servir de ejemplo de elemento frontera de cuarta especie. En esa misma figura está representado por trazos el semiintervalo curvilíneo γ para el cual el conjunto de sus puntos de acumulación es una parte propia del segmento AB (el segmento CD).

3.6. Una sucesión de puntos $\{z_n\}$ de un recinto G se llama convergente hacia el elemento frontera η de este recinto, si para alguna cadena de recintos $\{g^{(n)}\}$ que conduzca hacia η se cumple la condición: el recinto $g^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ contiene todos los puntos z_n para $n > N(m)$. Es obvio que si se cumple esta condición para

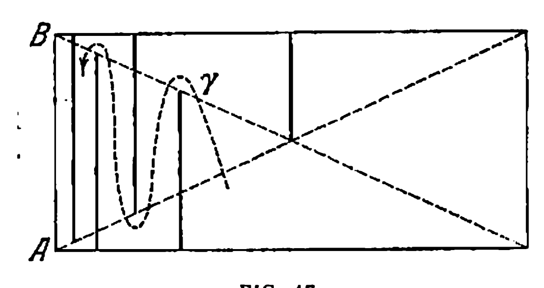


FIG. 17.

una cadena de recintos, entonces también se cumple para cualquiera otra cadena que conduzca hacia el mismo elemento, con lo cual se justifica la definición hecha.

Sean $\{\Delta^{(n)}\}$ las imágenes de los recintos $\{g^{(n)}\}$ en el círculo unidad; ya sabemos que ellos se ciñen hacia el punto w_0 de la circunferencia unidad que es la imagen del elemento η en la transformación conforme. Si $w_n = f(z_n)$ y $\{z_n\}$ converge hacia η, entonces los puntos $\{w_n\}$ están contenidos en $\Delta^{(m)}$ para $n > N(m)$, de donde se deduce que la sucesión $\{w_n\}$ converge hacia el punto w_0. Como también es cierto lo recíproco (si $\lim_{n\to\infty} w_n = w_0$, entonces la sucesión $\{z_n = f^{-1}(w_n)\}$ converge hacia η), resulta la siguiente proposición, que resuelve el problema de la correspondencia de las fronteras en la transformación conforme:

Teorema 1. *En la transformación conforme $w = f(z)$ de un recinto simplemente conexo G en el círculo $|w| < 1$, entre el conjunto de todos los elementos frontera y el conjunto de los puntos de la circunferencia unidad se establece una correspondencia biunívoca. Esta correspondencia posee la propiedad de «continuidad», que consiste en que cada sucesión de puntos del recinto G que converja a un elemento frontera η, se transforma en una sucesión de puntos del círculo unidad que converge hacia el punto w_0 que es la imagen del elemento η.*

Al aplicar este teorema, se debe tener presente que la convergencia de la sucesión de puntos a un elemento frontera del recinto no significa, ni mucho menos, la convergencia en el sentido ordinario. El conjunto de los puntos de acumulación de la sucesión $\{z_n\}$ que converge hacia el elemento frontera η puede coincidir con cualquier subconjunto cerrado (no vacío) F del continuo K que representa a η. Solamente cuando η es un elemento frontera de primera especie y, por consiguiente, K contiene solamente un punto z_0, de la convergencia de $\{z_n\}$ hacia η se deduce la convergencia de $\{z_n\}$ hacia el punto z_0. Sin embargo, lo recíproco no es justo. Una sucesión de puntos $\{z_n\}$ que converge hacia el punto z_0, puede no converger hacia el elemento frontera que representa este punto. Como ejemplo, consideremos la sucesión de puntos pertenecientes alternativamente a los semiintervalos γ_1 y γ', representados en la fig. 11. Aunque tal sucesión converja hacia el punto ζ, que representa en el caso dado dos elementos frontera distintos de primera especie, ella no converge hacia ninguno de estos elementos. Conservando en la misma solamente los puntos que están situados en γ_1, resulta una sucesión que converge hacia uno de los elementos frontera indicados; los puntos que están situados en γ' forman una sucesión que converge hacia el otro elemento.

Supongamos que cada elemento frontera del recinto G es un elemento de primera especie (en las figuras 11 y 12 están representados ejemplos de tales recintos). Entonces, en la transformación conforme $z = f^{-1}(w)$ del círculo $|w| < 1$ en tal recinto, a cada sucesión de puntos $\{w_n\}$ del círculo unidad que converja hacia un punto arbitrario w_0 de la circunferencia unidad le corresponderá una sucesión de puntos $\{z_n\}$ del recinto G, convergente hacia un punto frontera z_0 (y a la vez, hacia uno de los elementos frontera que representa este punto). Haciendo $f^{-1}(w_0) = z_0$, se define la función $f^{-1}(w)$ en el círculo unidad cerrado. Demostremos que esta función es continua en el círculo cerrado. Suponiendo lo contrario, tendríamos que para alguna sucesión de puntos $\{w'_n\}$, $|w'_n| \leqslant 1$, convergente hacia un punto w_0, $|w_0| = 1$, el límite $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(w'_n)$ o no existe, o existe pero es diferente de $f^{-1}(w_0)$. Para cada uno de los puntos w'_n que no son interiores al círculo, se puede señalar un punto interior w''_n tal, que $|f^{-1}(w'_n) - f^{-1}(w''_n)| < \frac{1}{n}$ y $|w'_n - w''_n| < \frac{1}{n}$.

Haciendo $w''_n = w'_n$ cuando w'_n está situado en el interior del círculo unidad, hallaremos una sucesión de puntos $\{w''_n\}$ tal, que $|w''_n| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} w''_n = w_0$, y, sin embargo, el límite $\lim\limits_{n\to\infty} f^{-1}(w''_n)$ o no existe, o es diferente de $f^{-1}(w_0)$. Pero esto con-

tradice a que: $f^{-1}(w_0) = \lim\limits_{\substack{w \to w_0 \\ |w| < 1}} f^{-1}(w)$. Así, pues, $f^{-1}(w)$ es continua en el círculo cerrado.

Fácilmente se observa que, cuando al menos uno de los elementos frontera del recinto G no es un elemento de primera especie, la función $f^{-1}(w)$ no puede ser continua para $|w| \leqslant 1$. En efecto, si K es el continuo que representa el elemento frontera η y que contiene más de un punto, entonces en el círculo se puede indicar una sucesión $\{w_n\}$, convergente hacia algún punto w_0 ($|w_0| = 1$), tal que la sucesión correspondiente $\{z_n = f^{-1}(w_n)\}$ tiene, no obstante, más de un punto de acumulación (estos últimos pertenecen a K), es decir, es divergente.

En resumen, queda demostrada la siguiente proposición:

T e o r e m a 2. *Para que una función $z = f^{-1}(w)$, que transforma conformemente el círculo unidad en un recinto G, sea continua en el círculo cerrado* $|w| \leqslant 1$ (o, lo que se reduce a lo mismo, sea uniformemente continua para $|w| < 1$), *es necesario y suficiente que todos los elementos frontera del recinto G sean elementos de primera especie.*

Cuando se cumple esta condición, la frontera Γ del recinto G se puede expresar por la ecuación

$$z = f^{-1}(w) = f^{-1}(e^{it}), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

donde $f^{-1}(e^{it})$ es una función continua del parámetro t. Por consiguiente, *la frontera* Γ, *cuyos elementos son todos de primera especie, es una curva continua.*

Consideremos ahora las condiciones, según las cuales la función $w = f(z)$ que transforma conformemente un recinto simplemente conexo G en el círculo unidad es continua en el dominio $\overline{G}$ (es decir, puede definirse en todos los puntos de la frontera Γ, de modo que sea continua en $\overline{G}$). La condición necesaria para esto consiste en que cada punto de la frontera Γ tiene que pertenecer solamente a un elemento frontera o, como suele decirse, sea un p u n t o s i m p l e de la frontera Γ. En efecto, si $z_0 \in \Gamma$ pertenece al menos a dos elementos frontera distintos η' y η'', entonces a la sucesión $\{z_n'\}$ que converge hacia η' y a la vez hacia el punto z_0 le corresponde una sucesión $\{w_n' = f(z_n')\}$ que converge hacia un punto w_0' de la circunferencia unidad, y a la sucesión $\{z_n''\}$ que converge hacia η'' y hacia z_0, le corresponde una sucesión $\{w_n'' = f(z_n'')\}$ que converge hacia otro punto w_0'' de la circunferencia unidad. De aquí se deduce que el límite $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in G}} f(z)$ no existe.

Demostremos que esta condición necesaria también es suficiente para que la función $w = f(z)$ sea continua en $\overline{G}$. Sea z_0 un punto

arbitrario de la frontera Γ y sea $\{z_n\}$ una sucesión cualquiera de puntos del recinto G que converja hacia z_0. Si se supone que la sucesión $\{w_n = f(z_n)\}$ es divergente, entonces tienen que existir al menos dos puntos de acumulación w' y w'' situados en la circunferencia unidad. Sean $\{w_n'\}$ y $\{w_n''\}$ dos sucesiones parciales de $\{w_n\}$, convergentes hacia w' y w'', respectivamente. Sean $\{z_n'\}$ y $\{z_n''\}$ sus preimágenes en el recinto G; éstas convergen hacia el punto z_0 y a la vez convergen hacia los elementos frontera η' y η'', cuyas imágenes son w' y w''. De aquí que z_0 pertenece a η' y a η'', lo cual contradice a la hipótesis. Así, pues, para cualquier punto $z_0 \in \Gamma$ existe el límite $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$; haciendo $f(z_0) = w_0$, se obtiene una función continua en el dominio $\bar{G}$. Los resultados demostrados pueden expresarse en la forma siguiente:

Teorema 3. *Para que una función $w = f(z)$, que transforma conformemente un recinto G en el círculo $|w| < 1$, sea continua en el dominio $\bar{G}$* (es decir, uniformemente continua en G), *es necesario y suficiente que todos los puntos frontera del recinto G sean simples.*

De los teoremas 2 y 3 se obtiene luego el importante

Corolario. *Para que una función $w = f(z)$, que transforma conformemente un recinto simplemente conexo G en el círculo $|w| < 1$, realice una transformación homeomorfa de $\bar{G}$ en $|w| \leqslant 1$, es necesario y suficiente que todos los elementos frontera de G sean de primera especie y que todos los puntos de la frontera Γ sean simples.*

En efecto, en éste, y sólo en este caso, la función $w = f(z)$ y su inversa $z = f^{-1}(w)$ son simultáneamente continuas en $\bar{G}$ y $|w| \leqslant 1$, respectivamente.

Antes al recinto simplemente conexo G se le habían impuesto las condiciones siguientes: a) todos sus elementos frontera son de primera especie, y b) todos los puntos de su frontera son simples. Estas se pueden sustituir por una sola que es equivalente: el recinto G está limitado por una curva cerrada de Jordan. En efecto, si se cumplen a) y b), entonces, según lo anterior, la frontera del recinto G es la imagen homeomorfa de la circunferencia unidad ($z = f^{-1}(e^{it})$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$), por lo cual Γ es una curva de Jordan. Pero también es cierto lo recíproco.

Supongamos que Γ es una curva cerrada de Jordan.

Sea η un elemento frontera del recinto G y sea $\{g^{(n)}\}$ una cadena de recintos que conduce hacia η. La frontera del recinto $g^{(n)}$ representa una curva cerrada de Jordan, compuesta de un arco de Jordan $\Gamma^{(n)} \subset \Gamma$ (nos basamos en que Γ es una curva de Jordan) y de un intervalo de Jordan $\gamma^{(n)} \subset G$ que tiene los extremos comunes con $\Gamma^{(n)}$. De aquí se deduce que el continuo K que representa η coincide con la intersección del sistema de arcos de Jordan encajados

$\{\Gamma^{(n)}\}$ $(\Gamma^{(n+1)} \subset \Gamma^{(n)})$, es decir, representa o un punto de la frontera Γ, o un arco de Jordan $\Gamma' \subset \Gamma$. Pero esto último es imposible. En efecto, si z_0 es un punto del arco Γ', distinto de los extremos de este arco, entonces la distancia $\rho = \rho(z_0, \Gamma'')$, donde $\Gamma'' = \Gamma \setminus \Gamma'$, es un número positivo (de nuevo empleamos el hecho de que Γ es una curva de Jordan). Consideremos un punto $z' \in G$ tal, que $|z' - z_0| < \varepsilon \leqslant \rho$. Es obvio que el punto $\zeta \in \Gamma$ más próximo a z' y situado en el segmento rectilíneo que une z' con z_0, no puede pertenecer a Γ''; por ello, $\zeta \in \Gamma'$. A la vez, obtenemos un punto alcanzable del recinto G, determinado por el segmento con los extremos z' y ζ y representado por el punto $\zeta \in \Gamma'$. Como la parte del segmento contigua a su extremo, pertenece a cualquiera de los recintos $g^{(n)}$, resulta que cada uno de éstos también contiene a este punto alcanzable. Pero se puede hallar un conjunto infinito de tales puntos alcanzables (debido a la arbitrariedad del punto $z_0 \in \Gamma'$ y del número ε, $0 < \varepsilon \leqslant \rho$). Por consiguiente, existe un conjunto infinito de puntos alcanzables distintos, pertenecientes al elemento frontera η, lo cual es imposible.

Así, pues $K = \Gamma'$ consta solamente de un punto, es decir, η es un elemento de primera especie.

Sean ahora η' y η'' dos elementos frontera distintos del recinto G, y sean $\{g'^{(n)}\}$ y $\{g''^{(n)}\}$ las cadenas de recintos que conducen a ellos. Como sus imágenes en el círculo tienen que ceñirse hacia dos puntos distintos w' y w'' y, por consiguiente, para valores suficientemente grandes de n no tienen puntos comunes, $g'^{(n)}$ tampoco tiene puntos comunes con $g''^{(n)}$ para todos los valores suficientemente grandes de n. Pero la frontera del recinto $g'^{(n)}$ consta de dos arcos de Jordan con extremos comunes, uno de los cuales $\Gamma'^{(n)}$ está situado en Γ y el otro $\gamma'^{(n)}$ pertenece a G (a excepción de los extremos); además, el punto z_0', que representa a η', está situado en $\Gamma'^{(n)}$ y es distinto de los extremos de este arco.

El recinto $g''^{(n)}$ tiene que estar situado en el exterior del recinto $g'^{(n)}$, por consiguiente, pertenece al subrecinto del recinto G que está limitado por el arco $\gamma'^{(n)}$ y el arco $\Gamma \setminus \Gamma'^{(n)}$, que no tiene otros puntos comunes con $\Gamma'^{(n)}$ más que los extremos. Por ello, la frontera del recinto $g''^{(n)}$ consta de un arco $\Gamma''^{(n)} \subset \Gamma \setminus \Gamma'^{(n)}$ y de un arco $\gamma''^{(n)}$ perteneciente a G (a excepción de los extremos). De aquí se deduce que el punto z_0' que representa a η', no está situado en la frontera de $g''^{(n)}$ y, por consiguiente, no puede representar a η''. En resumen, cada punto de la frontera Γ pertenece solamente a un elemento frontera. Hemos obtenido la siguiente proposición:

T e o r e m a 4. *Todos los elementos frontera de un recinto simplemente conexo G son elementos de primera especie y todos los puntos de la frontera son simples cuando, y sólo cuando, la frontera del recinto G es una curva cerrada de Jordan.*

En otras palabras, la propiedad característica de una curva cerrada de Jordan Γ es que, cada punto de ella representa un punto frontera alcanzable y sólo uno (del recinto G, limitado por la curva Γ). Esta propiedad se expresa abreviadamente diciendo, que *todos los puntos de una curva de Jordan son alcanzables por el interior y son simples*. El teorema 4 permite formular el corolario anteriormente indicado de los teoremas 2 y 3 de la forma siguiente:

T e o r e m a 5. *Una función $w = f(z)$ que transforma conformemente un recinto G en el círculo $|w| < 1$, establece una correspondencia homeomorfa entre $\bar{G}$ y $|w| \leqslant 1$ y, por consiguiente, también entre Γ y $|w| = 1$ cuando, y sólo cuando, Γ es una curva cerrada de Jordan.*

C o r o l a r i o. *En la transformación conforme uno en otro de recintos simplemente conexos G_1 y G_2, limitados por curvas cerradas de Jordan Γ_1 y Γ_2, entre los puntos de estas curvas se establece una correspondencia homeomorfa.*

Para observar esto, es suficiente sustituir la transformación conforme del recinto G_1 en G_2 por las transformaciones conformes de G_1 en el círculo $|w| < 1$ y del círculo $|w| < 1$ en el recinto G_2, realizadas sucesivamente.

Como una aplicación importante del teorema 5, establezcamos el principio del argumento en su forma general:

P r i n c i p i o g e n e r a l i z a d o d e l a r g u m e n t o. *Sea $f(z)$ una función continua en el sentido generalizado en el dominio $\bar{g}$, donde g es la parte interior de una curva cerrada de Jordan γ, y analítica en el recinto g, a excepción, posiblemente, de polos. Si $f(z)$ no toma los valores 0 y ∞ en γ, entonces la diferencia entre las cantidades de ceros y polos de $f(z)$, pertenecientes al recinto g, es igual a la variación del $\operatorname{Arg} f(z)$ al hacer un recorrido simple (de una vuelta) por la curva γ en sentido positivo, dividida por 2π, es decir, es igual al número de vueltas que da la curva continua $\Gamma = f(\gamma)$ alrededor del punto $w = 0$, tomado con el signo correspondiente.*

En comparación con el enunciado del principio del argumento examinado en el ap. 3.5, cap. cuarto, t. I, lo nuevo es: en primer lugar, que no se exige que la curva γ sea rectificable y, en segundo lugar, que no se supone que la función $f(z)$ sea analítica en los puntos de γ.

Para la demostración, obsérvese primero que las cantidades de ceros (N) y polos (P) en el recinto g son finitas. Suponiendo lo contrario, hallaríamos en γ un punto de acumulación de ceros o polos, en el cual $f(t)$, debido a la continuidad, tomaría el valor 0 o ∞, respectivamente.

Transformemos conformemente el recinto g en el círculo unidad $|t| < 1$ mediante una función $z = \varphi(t)$. Como la transformación

es biunívoca, la función $f(z)$ se convertirá entonces en la función $f^*(t) = f\varphi(t)$, la cual tiene en el círculo $|t| < 1$ la misma cantidad de ceros N y polos P que la función $f(z)$ en el recinto g. En virtud del teorema 5, la función $f^*(t)$ es continua (en el sentido generalizado) en el círculo cerrado $|t| \leqslant 1$ y, al hacer un recorrido simple de la circunferencia $|t| = 1$ en el sentido positivo, el punto $w = f^*(t)$ describe la curva precendente Γ en el sentido de antes. Por esta razón, la demostración del teorema se reduce al caso en que γ es la circunferencia unidad y g es el círculo unidad.

Supongamos que el círculo $|t| < r_0 < 1$ contiene todos los ceros y polos de la función $f^*(t)$. Entonces, en virtud del principio del argumento, en su forma establecida anteriormente, el vector $f^*(t)$ dará $N - P$ vueltas completas alrededor del punto $w = 0$, cuando t describa una vez la circunferencia $|t| = r > r_0$ en sentido positivo; esto significa que

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \operatorname*{Var\,Arg}_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} f^*(re^{i\alpha}).$$

Si $\rho > 0$ es la distancia desde $w = 0$ hasta la curva Γ, o sea,

$$\rho = \min_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} |f^*(e^{i\alpha})|,$$

entonces, como $f^*(t)$ es uniformemente continua en el anillo circular cerrado $r_0 \leqslant |t| \leqslant 1$, existe r_1, $0 < r_1 < 1$, tal que

$$|f^*(re^{i\alpha}) - f^*(e^{i\alpha})| < \rho, \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi, \quad r_1 < r < 1.$$

Representemos $f^*(re^{i\alpha})$ en la forma:

$$f^*(re^{i\alpha}) = f^*(e^{i\alpha}) \left[1 + \frac{f^*(re^{i\alpha}) - f^*(e^{i\alpha})}{f^*(e^{i\alpha})}\right] = f^*(e^{i\alpha}) [1 + \lambda_r(\alpha)].$$

Para $r > r_1$

$$|\lambda_r(\alpha)| = \frac{|f^*(re^{i\alpha}) - f^*(e^{i\alpha})|}{|f^*(e^{i\alpha})|} < 1,$$

por lo cual

$$\operatorname*{Var\,Arg}_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} [1 + \lambda_r(\alpha)] = 0.$$

Por consiguiente, para $r > \max(r_0, r_1)$

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \operatorname*{Var\,Arg}_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} f^*(re^{i\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \operatorname*{Var\,Arg}_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} \{f^*(e^{i\alpha}) [1 + \lambda_r(\alpha)]\} = \frac{1}{2\pi} \operatorname*{Var\,Arg}_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} f^*(e^{i\alpha}).$$

El teorema queda demostrado.

El principio generalizado del argumento permite obtener inmediatamente el teorema fundamental del ap. 1.2 en su forma completa

(pág. 13). En este caso, en los razonamientos que se hicieron al comienzo del ap. 1.2 no hay que cambiar nada.

Demostremos, finalmente, un teorema referente al comportamiento de la transformación conforme en la parte de la frontera del recinto G que representa un arco de Jordan.

Llamemos a un arco de Jordan Γ', perteneciente a la frontera Γ de un recinto arbitrario G, **arco alcanzable de la frontera** Γ o **arco de Jordan libre**, si existe un arco de Jordan γ' que tiene los extremos comunes con Γ' y pertenece al recinto G (a excepción de sus extremos); además la parte interior g de la curva de Jordan formada por γ' y Γ' pertenece al recinto G. Para elucidar este concepto, es suficiente comparar los segmentos rectilíneos AB en las figuras 16 y 17. En la primera de ellas AB es un arco alcanzable de la frontera, mientras que en el segundo caso no es alcanzable.

Teorema 6. *Si Γ' es un arco alcanzable de Jordan de la frontera Γ de un recinto simplemente conexo G* (posiblemente, no acotado), *entonces en la transformación conforme $w = f(z)$ del recinto G en el círculo $|w| < 1$ se establece una correspondencia homeomorfa entre los puntos del arco Γ' y los puntos de un arco de la circunferencia unidad, con la condición complementaria de que los valores de $w = f(z)$ se consideren solamente en el recinto $g \subset G$ que es adyacente a Γ'.*

Demostración. En la transformación conforme del recinto G en el círculo, el arco γ' que figuraba anteriormente en la definición de punto alcanzable de la frontera, se transformará en un arco de Jordán no cerrado δ' con los extremos en la circunferencia unidad (esto se deduce de que γ' determina dos puntos alcanzables distintos de la frontera Γ). El recinto g que está limitado por la curva de Jordan $\gamma' + \Gamma'$, se transforma en un recinto Δ limitado por una curva de Jordan, compuesta de δ' y de uno de los dos arcos de la circunferencia con los extremos comunes con δ'. Debido al corolario del teorema 5, la función $w = f(z)$ que transforma conformemente el recinto g en el recinto Δ establece una correspondencia homeomorfa entre las fronteras de estos recintos, y como la imagen del arco γ' es δ', la imagen del arco Γ' será un arco de la circunferencia, como se quería demostrar.

Como ilustración a los teoremas demostrados en este apartado, consideremos la transformación conforme del recinto G representado en la fig. 18, en el círculo unidad. La frontera de este recinto consta de dos circunferencias: $|z| = 1$ y $|z| = 3$ y de la espiral comprendida entre ellas (por ejemplo, $r = 2 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \theta$), la cual se aproxima indefinidamente a las circunferencias indicadas en dos direcciones. Cada punto de la espiral representa dos elementos fron-

tera de primera especie: dos puntos frontera alcanzables. Las circunferencias $|z| = 1$ y $|z| = 3$ representan cada una un elemento frontera de tercera especie. Para convencerse de esto, consideremos los segmentos rectilíneos representados en la figura y situados en la parte positiva del eje real. Cada uno de ellos pertenece al recinto y divide el conjunto de los puntos alcanzables del recinto G en dos intervalos complementarios entre sí, a los cuales son adyacentes dos subrecintos del recinto G, respectivamente: uno de ellos—llamémosle inferior—se enrolla desde el segmento considerado,

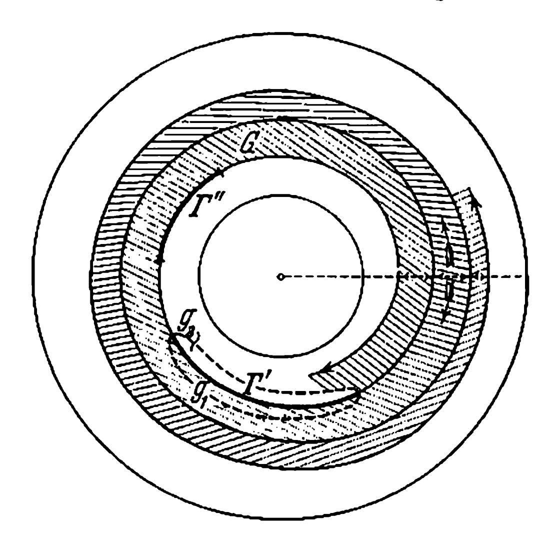


FIG. 18.

en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, y se dirige hacia la circunferencia menor, mientras que el otro—llamémosle superior—se desenrolla, en sentido contrario, hacia la circunferencia mayor.

Si se considera, por ejemplo, la sucesión de segmentos que se aproximan a la circunferencia menor, y se toman cada vez aquellos intervalos de puntos alcanzables a los cuales son adyacentes los subrecintos inferiores correspondientes, entonces se obtiene una sucesión de intervalos encajados de puntos alcanzables, que determina un elemento frontera del recinto G. Como la intersección de los subrecintos inferiores cerrados es la circunferencia $|z| = 1$, ésta representa a este elemento frontera. De un modo análogo halla-

remos que la otra circunferencia representa a otro elemento frontera. Es obvio, inmediatamente, que ambos elementos son de tercera especie (véase la definición).

En virtud de lo expuesto anteriormente, en la transformación conforme del recinto G en un círculo, cada punto de la espiral se representará por dos puntos distintos, y cada una de las circunferencias, por un punto. Cualquier arco Γ' de la espiral es un arco de Jordan libre; como a éste son adyacentes dos recintos $g_1 \subset G$ y $g_2 \subset G$, los cuales no tienen puntos comunes, resulta que, *en la transformación conforme,* Γ' *se transformará en dos arcos de la circunferencia sin puntos comunos* (de acuerdo con el hecho de que cada punto del arco Γ' representa un par de elementos frontera distintos). Obsérvese también que a dos arcos cualesquiera Γ' y Γ'' de la espiral les corresponden sendos pares de arcos de la circunferencia, los cuales tendrán puntos comunes cuando, y sólo cuando, Γ' y Γ'' tengan puntos comunes. De lo dicho se deduce que toda la espiral se representa en la transformación conforme por un par de arcos (intervalos) complementarios entre sí de la circunferencia unidad con extremos comunes A y B; además, uno de estos extremos representará a toda la circunferencia $|z| = 1$ y el otro, a toda la circunferencia $|z| = 3$. Como no todos los puntos de la frontera Γ son simples en este ejemplo (son simples solamente los puntos de las dos circunferencias) y no todos los elementos son de primera especie, la función $w = f(z)$, así como la función $z = f^{-1}(w)$, no serán continuas en los dominios correspondientes. La primera tiene puntos de discontinuidad en cada punto de la espiral y la segunda solamente tiene dos puntos de discontinuidad: A y B.

§ 4. TEOREMA DE S. MERGUELIAN. POLINOMIOS DE FABER Y TEOREMA DE S. BERNSTEIN. POLINOMIOS ORTOGONALES SOBRE LA SUPERFICIE DE UN RECINTO

4.1. Los primeros cuatro apartados del presente párrafo están dedicados al estudio de las condiciones para la aproximación uniforme de las funciones de variable compleja mediante polinomios. A S. Merguelián le pertenece un resultado terminante sobre este tema. El ap. 4.4, el cual puede consultar el lector directamente, dejando de un lado los ap. 4.1-4.3, está dedicado a su exposición. En estos últimos apartados se demuestran unos resultados de un carácter más particular, que precedían históricamente al teorema de Merguelián. En este libro se conservan estos resultados, puesto que representan un ejemplo de aplicación del teorema sobre los recintos de fronteras variables, perteneciente a R. Courant, el cual tiene un interés particular.

Teorema. *Sea* $\{G_n\}$ *una sucesión de recintos encajados simplemente conexos* $(\overline{G}_{n+1} \subset G_n)$, *convergente hacia su núcleo* G; *se supone que el recinto* G *está limitado por una curva cerrada de Jordan* Γ. *Entonces la sucesión de funciones* $\{f_n(z)\}$, *que transforman conformemente los recintos* $\{G_n\}$ *en el círculo* $|w| < 1$ *y satisfacen a las condiciones* $f_n(z_0) = 0$, $f'_n(z_0) > 0$ $(z_0 \in G)$, *converge uniformemente en el dominio* $\overline{G}$ *hacia una función* $f(z)$, *la cual transforma conformemente* G *en el mismo círculo* (evidentemente, $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$).

Demostración. En virtud del teorema de Carathéodory (ap. 2.3), la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente hacia $f(z)$ en el interior de G. Demostremos, por reducción a lo absurdo, que las funciones $f_n(z)$, siendo uniformemente continuas en $\overline{G}$ $(\overline{G} \subset G_n)$, son equicontinuas en $\overline{G}$, es decir, que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|f_n(z') - f_n(z'')| < \varepsilon$$

para cualquier par de puntos z' y z'' del recinto G, tales que $|z' - z''| < \delta(\varepsilon)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Supongamos que esto no es cierto. Entonces tienen que existir: $\varepsilon_0 > 0$, una sucesión de números naturales crecientes $\{n_k\}$ y dos sucesiones de puntos $\{z'_k\}$, $\{z''_k\}$, pertenecientes al recinto G, tales que $\lim\limits_{k\to\infty} (z'_k - z''_k) = 0$ y, no obstante

$$|f_{n_k}(z'_k) - f_{n_k}(z''_k)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Pasando a sucesiones parciales, se puede suponer que existen los límites para $\{z'_k\}$ y $\{z''_k\}$ (necesariamente iguales entre sí):

$$\lim_{k\to\infty} z'_k = \lim_{k\to\infty} z''_k = \zeta.$$

Vamos a exigir desde el principio que se cumpla esta condición. Obsérvese que el punto $\zeta \in \overline{G}$ tiene que estar situado en Γ. En efecto, si éste fuese interior a G, entonces de la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n(z)\}$ en un entorno de este punto se deduciría que

$$|f_{n_k}(z'_k) - f_{n_k}(z''_k)| \leqslant$$
$$\leqslant |f_{n_k}(z'_k) - f(z'_k)| + |f(z'_k) - f(z''_k)| + |f(z''_k) - f_{n_k}(z''_k)| < \varepsilon_0$$

para todos los valores suficientemente grandes de k.

Pasando a sucesiones parciales, si esto fuese necesario, pero sin cambiar las notaciones admitidas anteriormente, exijamos también

que todos los puntos z'_k y z''_k ($k = 1, 2, \ldots$) estén contenidos en un círculo $|z - \zeta| < R$, donde $R < |\zeta - z_0|$, y que sea convergente cada una de las sucesiones $\{w'_k = f_{n_k}(z'_n)\}$ y $\{w''_k = f_{n_k}(z''_k)\}$. Sus límites w' y w'' distan uno del otro no menos que ε_0 y están situados en la circunferencia unidad. En efecto, si se supone, por ejemplo, que $|w'| < 1$, entonces cierto entorno del punto w' se transforma en un entorno arbitrariamente pequeño del punto $z' = f^{-1}(w') \in G$. Pero, como la sucesión $\{f_n^{-1}(w')\}$ es uniformemente convergente en un entorno del punto w' (véase el ap. 2.3), los puntos $z'_k = f_{n_k}^{-1}(w'_k)$, comenzando desde cierto subíndice en adelante, también pertenecen a un entorno arbitrariamente pequeño del punto z', es decir, $\lim\limits_{k\to\infty} z'_k = z' \neq \zeta$, lo cual es imposible.

Describamos una circunferencia σ: $|w| = r < 1$ con el centro en el punto $w = 0$. Si r es suficientemente pequeño, entonces $f^{-1}(\sigma)$ está contenido en el interior de un entorno arbitrariamente pequeño del punto z_0. Por consiguiente, para cierto r y todos los valores de n suficientemente grandes, las curvas $f_n^{-1}(\sigma)$ estarán situadas en el interior de una circunferencia s con el centro en el punto z_0. Respecto de s, exijamos que ésta pertenezca al recinto G y esté situado fuera de la circunferencia $|z - \zeta| < R$.

Los puntos $w'_k = f_{n_k}(z'_{n_k})$ y $w''_k = f_{n_k}(z''_{n_k})$, para valores suficientemente grandes de k, están situados en entornos arbitrariamente pequeños de los puntos w' y w'' fuera de σ. Por ello, existe un $\alpha > 0$ tal, que la distancia entre los dos segmentos de radios δ'_k y δ''_k comprendidos entre o y los puntos w'_k y w''_k (fig. 19), será mayor que α para todos los $k > K$. A los segmentos δ'_k y δ''_k en la transformación $z = f_{n_k}^{-1}(w)$ les corresponden en el recinto G_{n_k} unos arcos de Jordan γ'_k y γ''_k que no tienen puntos comunes; los puntos iniciales de los arcos γ'_k y γ''_k están situados en el interior de s, y los puntos finales son z'_k y z''_k.

Obsérvese ahora que existe una sucesión de números positivos $\{\rho_k\}$, $\rho_k < R$, convergente hacia cero, tal que los puntos z'_k y z''_k están situados en el círculo $|z - \zeta| < \rho_k$ y éstos pueden unirse en el interior del mismo círculo por un arco de Jordan λ_k, contenido en el recinto G. En efecto, como $z'_k \in G$, $z''_k \in G$ y $\lim\limits_{k\to\infty} z'_k = \lim\limits_{k\to\infty} z''_k = \zeta$, resulta: $\lim\limits_{k\to\infty} f(z'_k) = \lim\limits_{k\to\infty} f(z''_k) = w_0$. Pero los puntos $f(z'_k)$ y $f(z''_k)$ pueden unirse en el interior del círculo unidad por un segmento rectilíneo μ_k; su preimagen $f^{-1}(\mu_k) = \lambda_k$ unirá los puntos z'_k y z''_k en el recinto G, y como la función $f^{-1}(w)$ es continua en el círculo cerrado $|w| \leqslant 1$ (véase el teorema 2, ap. 3.6; la frontera del recinto G es una curva de Jordan), resulta que para valores suficientemente grandes de k el arco λ_k estará contenido en un entorno arbi-

trariamente pequeño del punto ζ. De aquí se deduce la existencia de la sucesión $\{\rho_k\}$ que se necesita.

Conservemos en λ_k solamente el arco $\tilde{\lambda}_k$, desde el último punto ζ'_k de intersección de λ_k con γ'_k hasta el primer punto ζ''_k de intersección con γ''_k (en la figura, $\zeta'_k = z'_k$ y $\zeta''_k = z''_k$) y en γ'_k y γ''_k, los arcos $\tilde{\gamma}'_k$ y $\tilde{\gamma}''_k$ desde los últimos puntos de intersección con s hasta ζ'_k y ζ''_k,

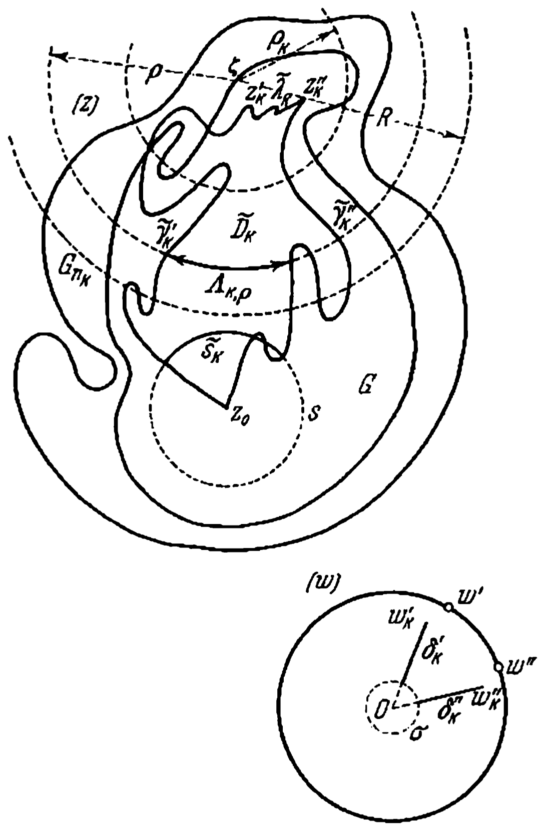


FIG. 19.

respectivamente. Entonces el arco $\tilde{s}_k$ de la circunferencia s y los arcos $\tilde{\gamma}'_k$, $\tilde{\lambda}_k$, $\tilde{\gamma}''_k$ formarán conjuntamente una curva cerrada de Jor-

dan perteneciente al recinto G_{n_k}. De aquí que la parte interior $\tilde{D}_k$ a esta curva pertenece a G_{n_k}. Cada circunferencia $| z - \zeta | = \rho$, donde $\rho_k < \rho < R$, se corta con $\tilde{D}_k$ por un conjunto de arcos, entre los cuales al menos uno $\Lambda_{k,\rho}$ une los puntos $z'_{k,\rho} \in \tilde{\gamma}'_k$ y $z''_{k,\rho} \in \tilde{\gamma}''_k$.

Para convencerse de la existencia de los arcos $\Lambda_{k,\rho}$, unamos algún punto de $\tilde{s}_k$ con algún punto de $\tilde{\lambda}_k$ mediante un arco de Jordan $\tilde{\tau}_k$ perteneciente al recinto $\tilde{D}_k$, a excepción de sus extremos (esto es posible, puesto que la frontera del recinto $\tilde{D}_k$ es una curva de Jordan y todos los puntos de una curva de Jordan son alcanzables). Como el punto inicial del arco $\tilde{\tau}_k$ está situado fuera de la circunferencia $| z - \zeta | = \rho$ y el punto final está situado en el interior de la misma, el arco $\tilde{\tau}_k$ se cortará con esta circunferencia; precisamente, se cortará con sus arcos situados en el recinto $\tilde{D}_k$. Entre ellos pueden haber arcos cuyos extremos ambos pertenezcan a γ'_k o a γ''_k. Llamemos a éstos, arcos con extremos homónimos. Cada uno de ellos, junto con el arco con los mismos extremos y situado en γ'_k o en γ''_k, respectivamente, forma una curva cerrada de Jordan, la cual limita un subrecinto del recinto $\tilde{D}_k$. Evidentemente, ζ no pertenece a la clausura de tal subrecinto, por lo cual el arco τ_k no puede mantenerse en el mismo, pero entrando, éste tiene que salir de él para continuar luego hacia su fin. Señalemos en τ_k su primero y último puntos de intersección con cada arco de la circunferencia con extremos homónimos. Los puntos del arco $\tilde{\tau}_k$ que preceden directamente al primero o siguen directamente después del último, pertenecen simultáneamente a la parte exterior a la circunferencia $| z - \zeta | = \rho$ o a su parte interior. Si se supone que todos los arcos situados en $| z - \zeta | = \rho$, pertenecientes a $\tilde{D}_k$, tienen extremos homónimos, entonces $\tilde{\tau}_k$, aproximándose hacia el primer punto de intersección con esta circunferencia por fuera de la circunferencia $| z - \zeta | = \rho$, se alejará del último punto de intersección con la misma, manteniéndose también fuera de $| z - \zeta | = \rho$. Pero entonces su punto final tiene que estar situado fuera de $| z - \zeta | = \rho$, lo cual es imposible. De aquí se deduce que en $| z - \zeta | = \rho$ tiene que existir al menos un arco con extremos no homónimos $\Lambda_{k,\rho}$ que se corta con el arco $\tilde{\tau}_k$.

Designemos con τ_k la parte del arco $\tilde{\tau}_k$ desde el último punto de su intersección con $| z - \zeta | = R$ hasta el primer punto de intersección con $| z - \zeta | = \rho_k$; entre los subrecintos del recinto $\tilde{D}_k$ que forman la intersección del recinto $\tilde{D}_k$ con el anillo circular $\rho_k < | z - \zeta | < R$, designemos con D_k aquel que contiene el arco τ_k (a excepción de sus extremos). Evidentemente, los arcos $\Lambda_{k,\rho}$ que se cortan con el arco $\tilde{\tau}_k$ se cortan también con el arco τ_k y, por

consiguiente, pertenecen a D_k. Observando que

$$f_{n_k}(z'_{k,\rho}) = w'_{k,\rho} \in \delta'_k \quad \text{y} \quad f_{n_k}(z''_{k,\rho}) = w''_{k,\rho} \in \delta''_k,$$

obtenemos:

$$0 < \alpha < |w''_{k,\rho} - w'_{k,\rho}| = \left| \int_{z'_{k,\rho}}^{z''_{k,\rho}} f'_{n_k}(z')\, dz \right| \leqslant \int_{\Delta_{k,\rho}} |f'_{n_k}(\zeta + \rho e^{i\theta})| \rho\, d\theta,$$

de donde, en virtud de la desigualdad de Buniakovski-Schwarz

$$\alpha^2 < \int_{\Delta_{k,\rho}} |f'_{n_k}(\zeta + \rho e^{i\theta})|^2 \rho^2\, d\theta \int_{\Delta_{k,\rho}} d\theta < 2\pi \int_{\Delta_{k,\rho}} |f'_{n_k}(\zeta + \rho e^{i\theta})|^2 \rho^2\, d\theta.$$

Multiplicando ambos miembros de la última desigualdad por $\frac{d\rho}{\rho}$ e integrando desde ρ_k hasta R, obtendremos:

$$\alpha^2 \cdot \ln \frac{R}{\rho^k} < 2\pi \int_{\rho_k}^{R} \rho\, d\rho \int_{\Delta_{k,\rho}} |f'_{n_k}(\zeta + \rho e^{i\theta})|^2\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \iint_{D_k} |f'_{n_k}(\zeta + \rho e^{i\theta})|^2 \rho\, d\rho\, d\theta.$$

Pero

$$\iint_{D_k} |f'_{n_k}(\zeta + \rho e^{i\theta})|^2 \rho\, d\rho\, d\theta$$

es el área de la imagen del recinto D_k en la transformación $w = f_{n_k}(z)$ y, por consiguiente, no es superior a π. Resulta la desigualdad

$$\alpha^2 \ln \frac{R}{\rho^k} < 2\pi^2,$$

lo cual es imposible, debido a que $\rho_k \to 0$ para $k \to \infty$. De aquí se deduce que es justa la afirmación de la equicontinuidad de las funciones $f_n(z)$ en el dominio $\overline{G}$.

Elijamos para un $\varepsilon > 0$ arbitrario un número $\delta(\varepsilon) > 0$ de modo que se cumplan las desigualdades

$$|f_n(z') - f_n(z'')| < \frac{\varepsilon}{3} \; (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{y} \quad |f(z') = f(z'')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para cualquier par de puntos z' y z'' del dominio $\overline{G}$ que satisfagan a la condición $|z' - z''| < \delta(\varepsilon)$. Supongamos ahora que el dominio $\overline{g} \subset G$ es tal que cada punto de $\overline{G}$ dista de $\overline{g}$ no más que $\delta(\varepsilon)$. Para construir $\overline{g}$, hallemos un $\eta(\varepsilon)$ tal que para $|w' - w''| <$

$< \eta(\varepsilon)$ ($|w'| \leqslant 1$, $|w''| \leqslant 1$) se cumpla la desigualdad

$$|f^{-1}(w') - f^{-1}(w'')| < \delta(\varepsilon),$$

y tomemos por g la preimagen del círculo $|w| < 1 - \eta(\varepsilon)$ en la transformación $w = f(z)$. Si a es un punto de $\overline{G} \setminus \overline{g}$ y $b = f(a)$, entonces el punto

$$\beta = \frac{b}{|b|}[1 - \eta(\varepsilon)]$$

está situado en la circunferencia $|w| = 1 - \eta(\varepsilon)$ y además $|b - \beta| < \eta(\varepsilon)$. Observando que $\alpha = f^{-1}(\beta) \in \overline{g}$, obtenemos: $|a - \alpha| = |f^{-1}(b) - f^{-1}(\beta)| < \delta(\varepsilon)$, o sea, la distancia desde el punto a hasta el conjunto $\overline{g}$ es menor que $\delta(\varepsilon)$. En virtud de la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n(z)\}$ en el conjunto cerrado $\overline{g}$, se tiene:

$$|f(\zeta) - f_n(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \zeta \in \overline{g}, \quad n > N(\varepsilon).$$

Si z es cualquier punto de $\overline{G}$ y ζ es un punto de $\overline{g}$ que diste de z menos que $\delta(\varepsilon)$, entonces

$$|f_n(z) - f_n(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f(z) - f(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

y, por consiguiente,

$$|f(z) - f_n(z)| \leqslant |f(z) - f(\zeta)| + |f(\zeta) - f_n(\zeta)| + |f_n(\zeta) - f_n(z)| < \varepsilon$$

para $n > N(\varepsilon)$, con lo cual se termina la demostración del teorema.

4.2. Teorema. *Sea G la parte interior de una curva cerrada de Jordan Γ y sea $F(z)$ una función continua en $\overline{G}$ y analítica en el recinto G. Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede señalar un polinomio $P(z)$ tal, que*

$$|F(z) - P(z)| < \varepsilon, \qquad z \in \overline{G}.$$

Demostración. Transformemos conformemente el recinto G en el círculo $|w| < 1$ mediante una función $w = f(z)$ que satisfaga a las condiciones: $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$. Como la función $z = f^{-1}(w)$ es continua en el círculo cerrado $|w| \leqslant 1$ (definiéndola de un modo adecuado en los puntos de la cicunferencia unidad), la función $F^*(w) = F[f^{-1}(w)]$ también lo es en el mismo círculo cerrado. Además, ésta es analítica en el círculo unidad. Sea ε un número positivo arbitrario, entonces, como la función $F^*(z)$ es continua uniformemente, se tiene:

$$|F^*(e^{i\theta}) - F^*(re^{i\theta})| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{si} \quad r \geqslant \rho(\varepsilon).$$

Por otra parte, debido a la convergencia uniforme de la serie de Taylor de la función $F^*(w)$ en el interior del círculo unidad, resulta:

$$\left| F^* [\rho(\varepsilon) e^{i\theta}] - \sum_{0}^{n} \frac{F^{*(k)}(0)}{k!} [\rho(\varepsilon)]^k e^{ki\theta} \right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

para $n \geqslant N(\varepsilon)$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Haciendo $e^{i\theta} = w$ y $\frac{F^{*(k)}(0)}{k!} [\rho(\varepsilon)]^k = a_k$, tendremos:

$$\left| F^*(w) - \sum_{0}^{N(\varepsilon)} a_k w^k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

para todos los puntos w situados en la circunferencia unidad.

Volviendo al recinto G mediante la transformación conforme $z = f^{-1}(w)$, obtenemos:

$$\left| F(z) - \sum_{0}^{N(\varepsilon)} a_k [f(z)]^k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

en todos los puntos z de la frontera Γ del recinto G.

En virtud del principio del módulo máximo, esta desigualdad también se cumple en el interior de G. No queda más que demostrar que la función $\sum_{0}^{N(\varepsilon)} a_k [f(z)]^k$ puede aproximarse en el dominio $\bar{G}$ mediante polinomios con una exactitud arbitraria. Aquí nos basaremos en el teorema del ap. 4.1 y en el teorema de Runge (t. I, ap. 2.3, cap. cuarto). Ante todo, construyamos una sucesión decreciente de recintos

$$\{G_n\}: \bar{G} \subset G_{n+1} \subset \bar{G}_{n+1} \subset G_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

convergente hacia G como a su núcleo. Consideremos para cualquier número natural n el conjunto G'_n de todos los puntos del plano cuyas distancias hasta $\bar{G}$ son menores que $\frac{1}{n}$. Evidentemente, éste es un conjunto abierto y conexo, es decir, es un recinto, y además, $\bar{G} \subset G'_n$.

Entre los recintos que son complementarios a $\bar{G}'_n$, uno de ellos $G'_{n,\infty}$ contiene al punto del infinito, y los demás son acotados; sus fronteras forman una parte de la frontera del recinto G'_n. Agreguemos a G'_n todos los puntos de los recintos complementarios acotados y todos los puntos frontera del recinto G'_n, a excepción de los puntos frontera del recinto $G'_{n,\infty}$.

El recinto obtenido $G_n \subset G'_n$ será simplemente conexo, pues su frontera coincide con la frontera de $G'_{n,\infty}$ la cual es un continuo. Evidentemente, la sucesión de recintos $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ satisface a las condiciones:

$$\overline{G} \subset G_{n+1} \subset \overline{G}_{n+1} \subset G_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Como $\overline{G} \subset G_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, el recinto G está contenido en el núcleo de la sucesión $\{G_n\}$. Pero ningún punto z' que sea exterior a G puede pertenecer al núcleo indicado. En efecto, unamos z' con el punto ∞ mediante un arco γ situado en el exterior del recinto G. Si $\rho > 0$ es la distancia entre γ y $\overline{G}$, entonces para $n > \frac{1}{\rho}$ este arco estará contenido en el recinto $G'_{n,\infty}$ y, por consiguiente, no pertenecerá a G_n. Por ello, el punto z' no pertenece al núcleo de la sucesión $\{G_n\}$. Por lo tanto, G coincide con este núcleo. Como un razonamiento análogo es aplicable a cualquier sucesión parcial $\{G_{n_k}\}$, resulta que $\{G_n\}$ converge hacia G como hacia el núcleo.

Designemos con $w = f_n(z)$ la función que transforma conformemente G_n en un círculo y satisface a las condiciones: $f_n(z_0) = 0$, $f'_n(z_0) > 0$. En virtud del ap. 4.1, la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente hacia $f(z)$ en el dominio $\overline{G}$. Aplicando el teorema de Runge, construyamos para cada n un polinomio $p_n(z)$ que satisfaga a la condición:

$$|f_n(z) - p_n(z)| < \frac{1}{n}, \qquad z \in \overline{G}$$

(aquí nos basamos en el hecho de que $f_n(z)$ es una función analítica en el recinto simplemente conexo G_n, el cual contiene a $\overline{G}$). Evidentemente, la sucesión $\{p_n(z)\}$ también converge uniformemente hacia $f(z)$ en el dominio $\overline{G}$ y, por consiguiente, también la sucesión $\sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} a_k [p_k(z)]^k$ converge uniformemente hacia $\sum_{0}^{N(\varepsilon)} a_k [f(z)]^k$. Tomemos $\nu(\varepsilon)$ de modo que para $n \geqslant \nu(\varepsilon)$ y todos los $z \in \overline{G}$ se cumpla la relación

$$\left| \sum_{0}^{N(\varepsilon)} a_k [f(z)]^k - \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} a_k [p_n(z)]^k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, designando con $P(z)$ el polinomio $\sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} a_k [p_{\nu(\varepsilon)}(z)]^k$ tendremos:

$$|F(z) - P(z)| < \varepsilon, \qquad z \in \overline{G},$$

con lo cual se termina la demostración

Como aplicación del teorema obtenido, deduzcamos el teorema integral de Cauchy en la siguiente forma generalizada:

Teorema integral generalizado. *Sea G la parte interior de una curva cerrada rectificable de Jordan Γ y sea $F(z)$ una función continua en $\bar{G}$ y analítica en G. Entonces*

$$\int_\Gamma F(z)\,dz = 0.$$

Demostración. Sea ε un número positivo arbitrario y sea L la longitud de la curva Γ. Según el teorema anterior, existe un polinomio $P(z)$ tal, que

$$|F(z) - P(z)| < \frac{\varepsilon}{L}, \quad z \in \bar{G}.$$

Por lo tanto,

$$\left|\int_\Gamma F(z)\,dz\right| = \left|\int_\Gamma [F(z) - P(z)]\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{L}\cdot L = \varepsilon,$$

y como ε es arbitrariamente pequeño, resulta:

$$\int_\Gamma F(z)\,dz = 0,$$

como se quería demostrar.

Corolario. *En las mismas condiciones, se verifica la fórmula integral de Cauchy*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_\Gamma \frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \qquad z \in G.$$

La demostración es igual que en el ap. 3.1, cap. tercero (t. I).

El teorema fundamental de este apartado es solamente un caso particular del siguiente teorema general:

Teorema de M. V. Kéldish. *Para que toda función continua en un dominio $\bar{G}$ y analítica en el interior de G, pueda aproximarse en $\bar{G}$ mediante polinomios con una exactitud arbitraria, es necesario y suficiente que el complemento de $\bar{G}$ esté compuesto de un solo recinto G_∞ que contenga al punto ∞* *).

Claro, a este enunciado satisfacen todos los recintos que están limitados por curvas de Jordan, pero no sólo ellos. En la fig. 16 está representado un recinto cuya frontera no es una curva de Jor-

---

*) M. V. Kéldish, Determinación de las funciones de variable compleja por series de polinomios en los dominios (М. В. Келдыш, Определение функций комплексного переменного рядами полиномов в замкнутых областях, Математический сборник, т. 16 (58), стр. 249—258 (1945).

dan y para el cual, sin embargo, se cumplen las condiciones del teorema.

La necesidad de la condición del teorema es casi evidente. En efecto, si ésta no se cumple, entonces existe un recinto G_1 contiguo con $\overline{G}$ y distinto de G_∞. Sea $z_0 \in G_1$, entonces $\frac{1}{z-z_0}$ es continua en $\overline{G}$ y analítica en el interior de $\overline{G}$. Si existe una sucesión de polinomios $\{P_n(z)\}$ que converge uniformemente hacia $\frac{1}{z-z_0}$ en $\overline{G}$, entonces ésta converge uniformemente en la frontera del recinto G_∞ (la cual pertenece a la frontera del recinto $\overline{G}$) y, por consiguiente, converge uniformemente en todo el complemento de G_∞ —el cual representa un conjunto abierto que contiene a G y G_1— hacia una función localmente analítica $\Phi(z)$. Como esta función coincide con $\frac{1}{z-z_0}$ en los puntos del recinto G, ella tiene que coincidir también con esta última función en los puntos del recinto G_1, lo cual, sin embargo, contradice a la analiticidad de $\Phi(z)$. La demostración de que la condición del teorema es suficiente se basa en un teorema de M. A. Lavréntiev, cuyo enunciado se expone en el siguiente apartado.

4.3. Sea Γ una curva cerrada de Jordan y sea $\varphi(z)$ una función continua, definida en Γ. Transformemos conformemente el interior de Γ en el interior del círculo unidad mediante una función $w = f(z)$. Como $z = f^{-1}(w)$ es una función continua para $|w| \leqslant 1$, $\varphi(z)$ se transforma en la función $\varphi^*(w) = \varphi[f^{-1}(w)]$, la cual es uniforme y continua en la circunferencia unidad. Escribamos $\varphi^*(w)$ en la forma

$$\varphi^*(w) = \varphi^*(e^{i\theta}) = \psi(\theta) + i\chi(\theta),$$

donde $\psi(\theta)$ y $\chi(\theta)$ son funciones continuas de θ de período 2π que toman valores reales. Según el conocido teorema *) del análisis, para cualquier $\varepsilon > 0$ se pueden indicar unos polinomios trigonométricos $\tau(\theta)$ y $\sigma(\theta)$ tales, que para todos los valores de θ se cumplen las desigualdades:

$$|\psi(\theta) - \tau(\theta)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{y} \quad |\chi(\theta) - \sigma(\theta)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Introduciendo, en caso de necesidad, coeficientes nulos, se pueden escribir $\tau(\theta)$ y $\sigma(\theta)$ en forma de polinomios de un mismo grado:

$$\tau(\theta) = a_0 + \sum_{1}^{N} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) = \sum_{-N}^{N} \alpha_n e^{in\theta},$$

$$\sigma(\theta) = c_0 + \sum_{1}^{N} (c_n \cos n\theta + d_n \operatorname{sen} n\theta) = \sum_{-N}^{N} \beta_n e^{in\theta}.$$

---

*) Este mismo teorema se demostrará más adelante (ap. 1.5, cap. sexto) de otro modo, que no depende de los resultados de este capítulo.

Sustituyendo $e^{i\theta}$ por w, obtenemos:

$$|\psi(\theta)+i\chi(\theta)-[\tau(\theta)+i\sigma(\theta)]|=\left|\varphi^*(w)-\sum_{-N}^{N}\gamma_n w^n\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

o bien, volviendo al plano z mediante la transformación $w=f(z)$, resulta:

$$\left|\varphi(z)-\sum_{-N}^{N}\gamma_n[f(z)]^n\right|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad z\in\Gamma.$$

Según el teorema del ap. 4.2, $f(z)$ se puede sustituir en Γ por un polinomio $P(z)$ con una exactitud arbitraria. Como $|f(z)|=1\neq 0$ en Γ, se puede utilizar un polinomio que no se anule en Γ; resulta una función racional $R(z)=\sum_{-N}^{N}\gamma_n[P(z)]^n$ que no tiene polos en Γ y satisface a la desigualdad

$$|\varphi(z)-R(z)|<\frac{3}{4}\varepsilon,\qquad z\in\Gamma.$$

Evidentemente, se puede indicar un recinto biconexo (de forma de anillo) D que contenga a Γ y no contenga ningún polo de la función $R(z)$. Si z_0 es un punto cualquiera del interior a Γ, podemos exigir también que z_0 esté contenido en el recinto limitado por el contorno interior del recinto D. Por ello, según el teorema del ap. 2.3, cap. cuarto (t. I), $R(z)$ puede aproximarse con una exactitud hasta de $\frac{\varepsilon}{4}$ por otra función racional $T(z)$, cuyos polos sean z_0 y ∞; esta función tiene la forma

$$T(z)=\sum_{-\nu}^{\nu}A_n(z-z_0)^n.$$

Resulta:

$$|\varphi(z)-T(z)|<\varepsilon,\qquad z\in\Gamma.$$

Queda demostrado el siguiente teorema:

T e o r e m a 1. *Si* $\varphi(z)$ *es una función continua en una curva cerrada de Jordan* Γ *y* z_0 *es un punto interior a* Γ, *entonces para cualquier* $\varepsilon>0$ *se puede construir una función racional* $T(z)=\sum_{-\nu}^{\nu}A_n(z-z_0)^n$, *que en todos los puntos de la curva* Γ *satisfaga a la relación*

$$|\varphi(z)-T(z)|<\varepsilon.$$

Para cualquier arco $\gamma\subset\Gamma$, cuyo punto inicial no coincida con el final, en virtud del teorema de Runge, se puede construir un poli-

nomio $S(z) = \sum_{0}^{\mu} B_n z^n$ tal, que en todos los puntos del arco γ se cumpla la desigualdad

$$|T(z) - S(z)| < \varepsilon.$$

Resulta la siguiente proposición:

Teorema 2. Si $\varphi(z)$ *es una función continua en una curva cerrada de Jordan* Γ, *entonces para cualquier arco* $\gamma \subset \Gamma$, *cuyo punto inicial no coincida con el final, y para cualquier* $\varepsilon > 0$, *se puede construir un polinomio* $S(z) = \sum_{0}^{\mu} B_n z^n$ *que satisfaga en todos los puntos del arco* γ *a la relación*

$$|\varphi(z) - S(z)| < \varepsilon.$$

En esta proposición es esencial que γ no es una curva cerrada. Precisando, la función $\varphi(z)$, siendo continua en la curva cerrada de Jordan Γ, tiene que satisfacer también a unas condiciones necesarias para que se la pueda aproximar con la exactitud deseada mediante polinomios. Señalemos tales condiciones en el caso en que Γ sea una curva cerrada rectificable de Jordan.

Supongamos que $\varphi(z)$ es una función continua en Γ y que

$$\varphi(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z),$$

donde $\{S_n(z)\}$ es una sucesión de polinomios uniformemente convergente en Γ. Entonces, evidentemente, tendremos:

$$\int_{\Gamma} \varphi(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\Gamma} S_n(z)\, dz = 0.$$

Esta es una condición necesaria. Pero siempre se pueden deducir también otras; fijando un número natural arbitrario m, obtenemos:

$$\varphi(z) z^m = \lim_{n\to\infty} S_n(z) z^m,$$

de donde

$$\int_{\Gamma} \varphi(z) z^m\, dz = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Una función continua arbitraria no satisface a todas estas condiciones.

El teorema 2 de este apartado generaliza el conocido teorema de Weierstrass y, a su vez, representa solamente un caso muy especial del siguiente teorema general:

Teorema de M. A. Lavréntiev. *Para que toda función* $\varphi(z)$, *continua en un continuo* K, *pueda aproximarse en* K *mediante polinomios con una exactitud arbitraria, es necesario y suficiente*

que este continuo esté acotado, carezca de puntos interiores (es decir, sea un continuo lineal) y que su complemento sea conexo (es decir, que el continuo no divida el plano en unos cuantos recintos distintos) *).

Un arco no cerrado de Jordan γ representa el ejemplo más sencillo de continuo que satisface a las condiciones del teorema. La necesidad de estas condiciones es casi evidente. En efecto, si K posee puntos interiores, entonces el límite de una sucesión de polinomios uniformemente convergente en K, tiene que ser una función analítica en un entorno de cada uno de ellos; por consiguiente, una función continua que no sea analítica en ningún punto (por ejemplo, $\varphi(z) = \bar{z}$) no puede ser aproximada mediante polinomios en K con una exactitud arbitraria. Supongamos ahora que el continuo acotado K carece de puntos interiores, pero divide al plano. Esto significa que entre los recintos contiguos con K existe al menos un recinto acotado g. Evidentemente, $\varphi(z) = \frac{1}{z-z_0}$, donde $z_0 \in g$, es una función continua en K. Si existe una sucesión de polinomios que converge uniformemente en K hacia $\frac{1}{z-z_0}$, entonces esta sucesión es uniformemente convergente en la frontera del recinto g (perteneciente a K) y, por consiguiente, es uniformemente convergente en el dominio $\bar{g}$. Por esta razón, el límite de la sucesión es una función $\psi(z)$, que es continua en $\bar{g}$, analítica en el interior de g y coincide con $\frac{1}{z-z_0}$ en la frontera del recinto g. De aquí que $\psi(z) - \frac{1}{z-z_0}$ tiene un polo simple en el punto $z = z_0 \in g$ y se anula en la frontera del recinto g. Por consiguiente,

$$\chi(z) = (z-z_0)\left[\psi(z) - \frac{1}{z-z_0}\right] = (z-z_0)\,\psi(z) - 1$$

es una función continua en $\bar{g}$, analítica en el interior de g, la cual se anula en la frontera del recinto g. En virtud del principio del módulo máximo, tendremos que tener: $\chi(z) \equiv 0$, lo cual es imposible, puesto que $\chi(z_0) = -1$.

De la contradicción obtenida se deduce que las condiciones del teorema de M. A. Lavréntiev son, verdaderamente, necesarias.

4.4. S. N. Merguelián demostró en el año 1951 el teorema más general sobre la aproximación uniforme de las funciones de variable

*) M. Lavréntiev. En relación a la teoría de las transformaciones conformes (М. Лаврентьев, К теории конформных отображений. Труды физико-математического института им. В. А. Стеклова. Отдел математический, V. Издание АН СССР, Ленинград, 1934 г., стр. 159—245). Las páginas 218—245 están dedicadas al teorema enunciado aquí.

compleja mediante polinomios, que contiene los resultados de M. A. Lavréntiev y M. V. Kéldish como casos particulares.

T e o r e m a d e S. N. M e r g u e l i á n. *Sea E un conjunto cerrado y acotado, cuyo complemento G respecto del plano complejo sea conexo, y sea $f(z)$ una función continua en E y localmente analítica en el conjunto O de todos los puntos interiores de E. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $P(z)$ tal, que en todos los puntos de E se verifica la desigualdad:*

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon_0.$$

Es obvio, que si el conjunto O es vacío y E es conexo, resulta el teorema de Lavréntiev, y si O es conexo (O es un recinto) y E coincide con $\overline{O}$, resulta el teorema de Kéldish.

Demostremos primero tres lemas *):

L e m a 1. *Supongamos que un recinto d, limitado por una curva de Jordan γ, está contenido en el círculo $|z| < 4\delta$ y su diámetro es mayor que δ $(0 < \delta < 1)$. Designemos con $z = \lambda(w) = aw + b + a_1 w^{-1} + a_2 w^{-2} + \ldots$ una función que transforme conformemente el recinto $|w| > 4\delta$ en la parte exterior a γ, de modo que $\lambda(\infty) = \infty$, y sea $w = \mu(z)$ la función inversa. Entonces se cumplen las siguientes relaciones:*

a) $|z| < |\mu(z)|$ *en el exterior de* γ;

b) $\frac{1}{16} < |a| < 1$;

c) $|b| < 8\delta$;

d) $\left|\frac{1}{z-b} - \frac{1}{a\mu(z)}\right| < \frac{A\delta^2}{|z^3|}$, si $|z| > 10\delta$;

aquí A es una constante absoluta.

D e m o s t r a c i ó n. Obsérvese que $\frac{\lambda(\omega)}{w} = a + \frac{b}{w} + \frac{a_1}{w^2} + \ldots$ es una función analítica en el recinto $|w| > 4\delta$, y regular en el punto $w = \infty$, donde su valor es igual a a. Además, es continua en la circunferencia $|w| = 4\delta$ (teorema 2, ap. 3.6) y toma en ésta valores que son en valor absoluto menores que 1 ($\lambda(w) \in \gamma$, si $|w| = 4\delta$). Aplicando a ella el principio del módulo máximo, obtenemos: $\frac{|\lambda(w)|}{|w|} < 1$, si $4\delta < |w|$, o sea, $|z| < |\mu(z)|$ en el exterior de γ; además, $|a| < 1$.

---

*) Además del artículo de S. N. M e r g u e l i á n «Aproximaciones uniformes de las funciones de variable compleja» (С. Н. М е р г е л я н, «Равномерные приближения функций комплексного переменного», «Успехи математических наук», т. VII, вып. 2(48), 1952, гл. I, стр. 32—55), utilizamos la exposición contenida en el libro de J. L. Walsh «Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain», Amer. Math. Soc., 1960.

Para hallar una cota inferior de $|a|$, observemos que d tiene que contener un par de puntos z_1 y z_2 tal, que $|z_1-z_2|=\delta$. Mediante una traslación y una rotación del plano z se puede llevar uno de ellos al punto $z=0$ y el otro al punto $z=\delta$. Claro, con esto pueden alterarse los coeficientes de $z=\lambda(w)$, pero el módulo del coeficiente a se conserva. Apliquemos ahora la transformación auxiliar: $t=\frac{4a\delta}{z}$. Como resultado de esto, γ se transformará en una curva de Jordan Γ y el exterior de γ en la parte interior Δ de la curva Γ; además, el punto $t=4a$, que es la imagen del punto $z=\delta$, no pertenecerá a $\overline{\Delta}$. Efectuemos también la transformación $s=\frac{4\delta}{w}$; entonces el recinto $|w|>4\delta$ se transformará en el círculo unidad: $|s|<1$.

Como la función

$$t=\frac{4a\delta}{z}=\frac{4a\delta}{\lambda\left(\frac{4\delta}{s}\right)}=s+b_2s^2+\ldots$$

transforma conformemente el círculo unidad en la parte interior a la curva Γ, según el teorema 3, ap 2.4 del presente capítulo, tiene que ser $4|a|>\frac{1}{4}$, o sea $|a|>\frac{1}{16}$. Así, pues, quedan demostradas las relaciones a) y b). Para demostrar c), obsérvese que para la función

$$\lambda(w)-aw=b+a_1w^{-1}+\ldots,$$

siendo regular en el punto $w=\infty$, se cumple la desigualdad

$$|\lambda(w)-aw|<|\lambda(w)|+|w|<8\delta \quad \text{si} \quad |w|=4\delta.$$

En virtud del principio del módulo máximo, se tiene:

$$|\lambda(w)-aw|<8\delta \quad \text{si} \quad |w|\geqslant 4\delta.$$

Aplicando las desigualdades de Cauchy para los coeficientes de una serie de potencias (con este fin se puede sustituir w^{-1} por s), obtenemos:

$$|b|<8\delta$$

(es decir, la relación c)) y luego:

$$|a_n|\leqslant 8\delta\cdot 4^n\delta^n \qquad (n=1,2,\ldots).$$

De aquí que

$$|\lambda(w)-aw-b|<\frac{8\delta}{|w|}\sum_1^\infty\frac{(4\delta)^n}{(8\delta)^{n-1}}=\frac{64\delta^2}{|w|} \quad \text{si} \quad |w|>8\delta.$$

Haciendo aquí $z = \lambda(w)$, $w = \mu(z)$ y observando que, según lo demostrado, $|z| < |\mu(z)|$, resulta:

$$|z - a\mu(z) - b| < \frac{64\delta^2}{|z|},$$

y, por consiguiente:

$$\left|\frac{1}{z-b} - \frac{1}{a\mu(z)}\right| \leqslant \frac{|z - a\mu(z) - b|}{|a|\,|\mu(z)|\,|z|\left(1 - \frac{|b|}{|z|}\right)} < \frac{A\delta^2}{|z|^3} \quad \text{si} \quad |z| > 10\delta,$$

donde A es una constante absoluta.

L e m a 2. *Sea R_δ un subconjunto de puntos de E, cuyas distancias hasta G (o sea, hasta $\Gamma = E \setminus \bar{O}$) no sean superiores a δ. Para cada punto de $\zeta_0 \in R_\delta$ existe un entorno U_0: $|\zeta - \zeta_0| < \rho_0$ y un polinomio $\Pi_0(z)$ tales que*

a) $\quad |\Pi_0(z-\zeta)| < \frac{B}{\delta}, \quad |\zeta - \zeta_0| \leqslant \rho_0, \qquad z \in E;$

b) $\quad \left|\Pi_0(z-\zeta) - \frac{1}{\zeta - z}\right| < \frac{C\delta^2}{|\zeta - z|^3}, \qquad |\zeta - \zeta_0| \leqslant \rho_0,$
$\quad |z - \zeta| > 10\delta, \qquad z \in E.$

D e m o s t r a c i ó n. Sin restringir generalidad, hagamos $\zeta_0 = 0$. Construyamos el círculo K: $|z| < 4\delta$; su intersección con el

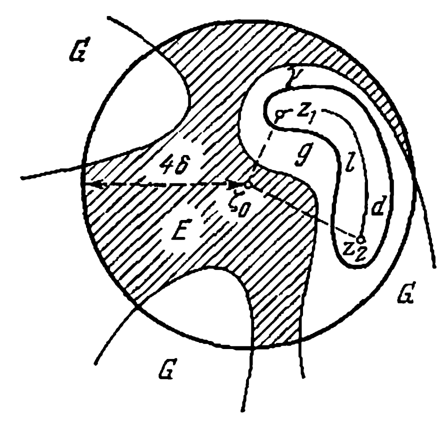


FIG. 20.

complemento de E, o sea, con el recinto G, es un conjunto no vacío. Sea z_1 uno de sus puntos, tal que $|z_1| = 2\delta$. Designemos con g aquella de las componentes conexas $K \cap G$ que contiene a z_1; entonces en el recinto g existe un punto z_2 tal, que $|z_2| = 3\delta$. Unamos

z_1 y z_2 por el interior de g mediante un arco de Jordan l y sea γ una curva cerrada de Jordan, perteneciente a g y que contenga en su interior a l (fig. 20). Aplicaremos el lema 1 a su parte interior d.

Designemos con $2\rho_0$ la distancia entre E y $\bar{d}$ (o sea, entre E y γ). Entonces el conjunto E_0 de todos los puntos del plano cuyas distancias hasta E no son superiores a ρ_0, será un conjunto acotado y cerrado que contiene a E y está situado en la parte exterior a la curva γ. En virtud de la definición, cualquier traslación del conjunto E en el vector c, $|c| < \rho_0$, no nos sacará de los límites del conjunto E_0.

Como $w = \mu(z)$ transforma la parte exterior a γ en el recinto $|w| > 4\delta$ y $|a| > \frac{1}{16}$, en los puntos de E_0 se verifica la desigualdad

$$\left|\frac{1}{a\mu(z)}\right| < \min\left(\frac{4}{\delta}, \frac{16}{|z|}\right). \qquad (4.4:1)$$

A la función $\frac{1}{a\mu(z)}$, siendo analítica en el conjunto acotado y cerrado E_0, se la puede aproximar, según el corolario conocido del teorema de Runge (t. I, cap. cuarto, ap. 2.3), mediante un polinomio con una precisión arbitraria. Sea $Q_0(z)$ un polinomio tal, que en todos los puntos de E_0 se cumpla la desigualdad

$$\left|\frac{1}{a\mu(z)} - Q_0(z)\right| < \min\left(\frac{4}{\delta}, \frac{16}{|z|}, \frac{A\delta^2}{|z|^3}\right), \qquad (4.4:2)$$

donde A es la constante de la relación d) del lema 1. Entonces, en virtud de d) y de las desigualdades (4.4:1), (4.4:2), tendremos:

$$|Q_0(z)| \leq \min\left(\frac{8}{\delta}, \frac{32}{|z|}\right), \qquad z \in E_0, \qquad (4.4:3)$$

$$\left|\frac{1}{z-b} - Q_0(z)\right| < \frac{2A\delta^2}{|z|^3}, \qquad z \in E_0 \text{ y } |z| > 10\delta. \qquad (4.4:4)$$

Empleemos ahora la identidad

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z-b} - \frac{b}{(z-b)^2} + \frac{b^2}{z(z-b)^2}. \qquad (4.4:5)$$

Como $|b| < 8\delta$ (relación c) del lema 1), para $|z| > 10\delta$ se tiene:

$$\left|\frac{b^2}{z(z-b)^2}\right| < \frac{A_1\delta^2}{|z|^3}.$$

En virtud de (4.4:3) y (4.4:4), para $z \in E_0$ y $|z| > 10\delta$:

$$\left|\frac{b}{(z-b)^2} - b[Q_0(z)]^2\right| < 8\delta\left(\frac{1}{|z-b|} + |Q_0(z)|\right)\left|\frac{1}{z-b} - Q_0(z)\right| < \frac{A_2\delta^2}{|z|^3}.$$

Por ello, para $z \in E_0$ y $|z| > 10\delta$ (en virtud de (4.4:5)):

$$\left|\frac{1}{z} - \{Q_0(z) - b[Q_0(z)]^2\}\right| \leqslant \left|\frac{1}{z-b} - Q_0(z)\right| +$$
$$+ \left|\frac{b}{(z-b)^2} - b[Q_0(z)]^2\right| + \left|\frac{b^2}{z(z-b)^2}\right| < \frac{C\delta^2}{|z|^3}.$$

Hagamos, finalmente, $\Pi_0(z) = b[Q_0(z)]^2 - Q_0(z)$, entonces

$$|\Pi_0(z)| < \frac{B}{\delta}, \qquad z \in E_0$$

y

$$\left|\Pi_0(z) + \frac{1}{z}\right| < \frac{C\delta^2}{|z|^3}, \qquad z \in E_0 \text{ y } |z| > 10\delta,$$

o bien, recordando que el punto ζ_0 desempeñaba el papel del origen de coordenadas, sustituyendo z por $z-\zeta$ y limitando los valores de ζ por el entorno U_0, resulta:

$$|\Pi_0(z-\zeta)| < \frac{B_4}{\delta}, \quad z \in E, \quad |\zeta - \zeta_0| \leqslant \rho_0, \tag{4.4:6}$$

$$\left|\Pi_0(z-\zeta) - \frac{1}{\zeta - z}\right| < \frac{C\delta^2}{|z|^3}, \quad z \in E, \quad |z-\zeta| > 10\delta,$$
$$|\zeta - \zeta_0| \leqslant \rho_0. \tag{4.4:7}$$

El lema 2 queda demostrado.

L e m a 3. *Supongamos que la función $f(z)$, satisfaciendo a las condiciones de Merguelián, se ha prolongado como una función continua a todo el plano complejo. Sea $|z| < R_0$ ($R_0 > 1$) un círculo contenido en E, y sea $\omega(\delta)$ el módulo de continuidad de $f(z)$ en este círculo* *).

Hagamos:

$$K(r) = \begin{cases} \left(1 - \frac{r}{\delta}\right)\frac{3}{\pi\delta^2}, & 0 < r \leqslant \delta, \\ 0, & r > \delta; \end{cases}$$

$$\Phi_\delta(z) = \iint\limits_{|\zeta| < 2R_0} f(\zeta)\, K_\delta(|\zeta - z|)\, d\xi\, d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta, \qquad z = x + iy.$$

Entonces se cumplen las relaciones:

---

*) Se llama módulo de continuidad $\omega(\delta)$ de una función $f(z)$ en un conjunto F

$$\omega(\delta) = \sup_{z', z'' \in F, |z'-z''| \leqslant \delta} |f(z') - f(z'')|.$$

Evidentemente, $\omega(\delta) \to 0$ para $\delta \to 0$ cuando, y sólo cuando $f(z)$ es uniformemente continua en F.

a) $\Phi_\delta(z) = f(z)$ *en todos los puntos de* $O_\delta = E \setminus R_\delta$, *o sea, en todos los puntos de* E *que distan de* $\overline{G}$ *más que* δ;

b) $$|\Phi_\delta(z) - f(z)| < \delta, \qquad z \in E;$$

c) $$\left|\frac{\partial \Phi_\delta}{\partial \bar{z}}\right| < \frac{2\omega(\delta)}{\delta}.$$

Demostración. En virtud de la definición de $K(r)$, en cada punto $z \in O_\delta$, se tiene:

$$\Phi_\delta(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\delta}\left(1 - \frac{r}{\delta}\right)\cdot\frac{3}{\pi\delta^2}\cdot f(z + re^{i\theta})\, r\, dr\, d\theta, \text{ donde } \zeta = re^{i\theta}.$$

Escribamos esta fórmula en la forma:

$$\Phi_\delta(z) = \frac{3}{\pi\delta^2}\int_0^{\delta}\left[\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta\right]\left(r - \frac{r^2}{\delta}\right) dr.$$

Debido a la analiticidad local de $f(z)$ en Q_δ, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta = 2\pi f(z)$$

(propiedad de la media aritmética). Por esta razón

$$\Phi_\delta(z) = f(z). \tag{4.4:8}$$

Apliquemos la fórmula (4.4:8), en particular, al caso

$$f(z) \equiv 1;$$

resulta:

$$\iint\limits_{|\zeta| < 2R_0} K(|\zeta - z|)\, d\xi\, d\eta = 1. \tag{4.4:9}$$

De aquí que

$$|f(z) - \Phi_\delta(z)| = \left|\iint\limits_{|\zeta| < 2R_0} [f(z) - f(\zeta)]\, K(|\zeta - z|)\, d\xi\, d\eta\right| \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\delta)\iint\limits_{|\zeta| < 2R_0} K(|\zeta - z|)\, d\xi\, d\eta = \omega(\varepsilon). \tag{4.4:10}$$

De (4.4:9) se deduce ahora que

$$\iint\limits_{|\zeta| < 2R_0} K'_x(|\zeta - z|)\, d\xi\, d\eta = \iint\limits_{|\zeta| < 2R_0} K'_y(|\zeta - z|)\, d\xi\, d\eta = 0$$

y, por consiguiente:

$$\frac{\partial \Phi_\delta(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_\delta}{\partial x} + i\frac{\partial \Phi_\delta}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{|\zeta|<2R_0} f(\zeta)\,[K'_x(|\zeta - z|) + iK'_y(|\zeta - z|)]\,d\xi\,d\eta =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{|\zeta|<2R_0} [f(\zeta) - f(z)]\,[K'_x(|\zeta - z|) + iK'_y(|\zeta - z|)]\,d\xi\,d\eta.$$

Por lo tanto

$$\left|\frac{\partial \Phi_\delta(z)}{\partial \bar{z}}\right| < \frac{1}{2}\iint\limits_{|\zeta|<2R_0} |f(\zeta) - f(z)|\,[|K'_x(|\zeta - z|)| +$$

$$+ |K'_y(|\zeta - z|)|]\,d\xi\,d\eta < \frac{\omega(\delta)}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} [|K'_x(r)| + |K'_y(r)|]\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{3\omega(\delta)}{2\pi\delta^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} (|\cos\theta| + |\operatorname{sen}\theta|)\,r\,dr\,d\theta = \frac{6\omega(\delta)}{\pi\delta} < \frac{2\omega(\delta)}{\delta}. \quad (4.4{:}11)$$

El lema 3 queda demostrado.

Veamos ahora la demostración del teorema de Merguelián.

El primer paso para la demostración consiste en prolongar $f(z)$ conservando la continuidad en todo el plano*) y en aproximarla mediante las funciones $\Phi_\delta(z)$ del lema 3.

La ventaja que tiene $\Phi_\delta(z)$ ante $f(z)$ consiste en que ella es una función con derivadas parciales continuas de primer orden, cuya derivada formal se acota según la fórmula (4.4:11). Además $\Phi_\delta(z)$ coincide con $f(z)$ en el conjunto O_δ, donde $f(z)$ es localmente analítica. Por lo tanto, el problema queda reducido a la aproximación de la función $\Phi_\delta(z)$ mediante polinomios. El siguiente paso va a consistir en representar $\Phi_\delta(z)$ por la fórmula que generaliza la fórmula integral de Cauchy al caso de funciones no analíticas (t. I, cap. tercero, ap. 3.5). Recordemos que esta fórmula se dedujo para un recinto Δ limitado por un número finito de curvas de Jordan lisas a trozos (curvas elementales) Γ (el contorno exterior), $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ (los contornos interiores), y para una función $F(z)$ que sea continua y tenga derivadas parciales continuas de primer orden en $\bar{\Delta}$. Esta

*) Véase, por ejemplo, P. S. Alexándrov, Introducción a la teoría general de los conjuntos y de las funciones (П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, М.—Л., 1948, стр. 284—287).

tiene la forma:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \sum_{1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}\frac{\partial F}{\partial\bar{\zeta}}\cdot\frac{1}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta, \qquad z \in \Delta. \qquad (4.4{:}12)$$

Es obvio que esta fórmula reduce el problema de la aproximación de $F(z)$ mediante polinomios al problema correspondiente para el núcleo de Cauchy: $\frac{1}{\zeta - z}$. Precisamente aquí emplearemos el lema 2. Pero primero se debe construir de un modo racional el recinto Δ. Obsérvese que para la validez de la fórmula (4.4:12) no es esencial la conexión de Δ. La fórmula sigue siendo válida también cuando Δ representa la unión de unos cuantos recintos sin puntos comunes dos a dos.

Para obtener el conjunto abierto, al cual aplicaremos la fórmula (4.4:12), examinemos el lema 2. En este último, para cada punto $\zeta_0 \in R_\delta = E \setminus O_\delta$ se había construido un entorno U_0: $|\zeta - \zeta_0| < \rho_0$, que figura en la tesis del lema. Elijamos un sistema finito de tales entornos U_j: $|z - z_j| < \rho_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, que cubran todo el conjunto $E \setminus O_\delta$, y formemos el conjunto cerrado $E \cup \bar{U}_1 \cup \ldots \cup \bar{U}_m$. Evidentemente, éste es la clausura de cierto conjunto abierto D_δ que contiene a E; su frontera L_δ está formada por un número finito de arcos de circunferencias. Al conjunto D_δ y a la función $\Phi_\delta(z)$ aplicaremos la fórmula (4.4:12). Pero la suma de todas las integrales de tipo Cauchy que figuran en el segundo miembro de la fórmula la escribiremos convencionalmente en forma de una integral, extendida a L_δ. Obtendremos:

$$\Phi_\delta(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\delta}\frac{\Phi_\delta(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\iint_{D_\delta}\frac{\partial\Phi_\delta(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\cdot\frac{1}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta.$$

Obsérvese ahora que en los puntos de O_δ la función $\Phi_\delta(\zeta) = f(\zeta)$ es analítica y, por consiguiente, en estos puntos se anula la derivada formal $\frac{\partial\Phi_\delta(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}$ (t. I, cap. 2, ap. 1.3). Por esta razón,

$$\Phi_\delta(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\delta}\frac{\Phi_\delta(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\iint_{D_\delta\setminus O_\delta}\frac{\partial\Phi_\delta(\zeta)}{\partial\bar{\zeta}}\cdot\frac{1}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta.$$

La suma de las integrales de tipo Cauchy $I_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\delta}\frac{\Phi_\delta(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ es una función localmente analítica en el conjunto cerrado y acotado E, cuyo complemento es conexo. Por consiguiente, existe un poli-

nomio $P_1(z)$ tal que

$$|f_1(z) - P_1(z)| < \omega(\delta), \qquad z \in E. \qquad (4.4:13)$$

Para la aproximación de la integral

$$I_1(z) = -\iint\limits_{D_\delta \setminus O_\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta$$

mediante un polinomio, apliquemos el lema 2. Según la construcción, el conjunto $D_\delta \setminus O_\delta$ está contenido en $\bigcup\limits_{j=1}^{m} U_j$. Según el lema 2, a cada entorno U_j: $|\zeta - \zeta_j| < \rho_j$ le corresponde su polinomio $\Pi_j(z)$ que satisface a las condiciones a) y b) de este lema. Evidentemente, para un punto $\zeta \in D_\delta \setminus O_\delta$, perteneciente a unos cuantos entornos $U_{j_1}, \ldots, U_{j_k}$, en las relaciones a) y b) se puede utilizar cualquiera de los polinomios $\Pi_{j_1}(z), \ldots, \Pi_{j_k}(z)$. Para que la elección sea unívoca, a tal punto pondremos en correspondencia el polinomio de menor subíndice $j(\zeta)$, el cual designaremos con la notación $\Pi_\zeta(z)$. Así, pues,

$$\Pi_\zeta(z) = \Pi_{j(\zeta)}(z) \ \text{ y } \ \Pi_\zeta(z-\zeta) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \Pi_{j(\zeta)}^{n}(-\zeta)\, z^n = \sum_{n=0}^{N} C_n(\zeta)\, z^n.$$

Los coeficientes $C_n(\zeta)$ son funciones continuas a trozos (o incluso analíticas a trozos) en $D_\delta \setminus O_\delta$.

Definamos el polinomio

$$P_2(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{D_\delta \setminus O_\delta} \frac{\partial \Phi_\delta}{\partial \bar{\zeta}} \Pi_\zeta(z-\zeta)\, d\xi\, d\eta.$$

En virtud de la relación c) del lema 3, en el conjunto E se tiene

$$I_2(z) - P_2(z) = \left| \frac{1}{\pi} \iint\limits_{D_\delta \setminus O_\delta} \left[\Pi_\zeta(z-\zeta) - \frac{1}{\zeta - z} \right] \frac{\partial \Phi_\delta}{\partial \bar{\zeta}}\, d\xi\, d\eta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \frac{\omega(\delta)}{\delta} \iint\limits_{D_\delta \setminus O_\delta} \left| \Pi_\zeta(z-\zeta) - \frac{1}{\zeta - z} \right| d\xi\, d\eta.$$

En la parte M_1 del conjunto $D_\delta \setminus O_\delta$, perteneciente al círculo $K: |\zeta - z| \leqslant 10\delta$, untilizamos para $\Pi_\zeta(z-\zeta) = \Pi_{j(\zeta)}(z-\zeta)$ la acotación a) del lema 2. Obtenemos:

$$\frac{1}{\pi} \frac{\omega(\delta)}{\delta} \iint\limits_{M_1} \left| \Pi_\zeta(z-\zeta) - \frac{1}{\zeta - z} \right| d\xi\, d\eta <$$

$$< \frac{1}{\pi} \frac{\omega(\delta)}{\delta} \left[\frac{B}{\delta} \pi (10\delta)^2 + 2\pi \cdot 10\delta \right] = B_1 \omega(\delta).$$

En la parte M_2 del conjunto $D_\delta \setminus O_\delta$, situada fuera del círculo K, utilizamos la acotación b) del mismo lema. Resulta:

$$\frac{1}{\pi}\frac{\omega(\delta)}{\delta}\iint_{M_2}\left|\Pi_\zeta(z-\zeta)-\frac{1}{\zeta-z}\right|d\xi\,d\eta<\frac{C}{\pi}\delta\omega(\delta)\iint_{M_2}\frac{1}{|\zeta-z|^3}d\xi\,d\eta<$$

$$<\frac{C}{\pi}\delta\omega(\delta)\int_0^{2\pi}\int_{10\delta}^{2R_0}\frac{1}{r^2}\,dr\,d\theta<C_1\omega(\delta).$$

Así, pues, en el conjunto E:

$$|I_2(z)-P_2(z)|<(B_1+C_1)\,\omega(\delta). \qquad (4.4:14)$$

Haciendo $P_1(z)+P_2(z)=P(z)$ y confrontando las relaciones (4.4:10), (4.4:13) y (4.4:14), obtenemos:

$$|f(z)-P(z)|<(B_1+C_1+2)\,\omega(\delta)=A_0\omega(\delta), \qquad z\in E, \quad (4.4:15)$$

donde A_0 es una constante absoluta. No queda más que elegir δ tan pequeño para que $A_0\omega(\delta)$ se haga menor que el número ε dado.

4.5. Sea K un continuo acotado que contenga más de un punto, y sea G_∞ aquel recinto, entre los contiguos con él, que contiene al punto $z=\infty$. Este es un recinto simplemente conexo del plano ampliado cuya frontera Γ_∞ es una parte del continuo K. Transformemos conformemente G_∞ en la parte exterior de un círculo con el centro en el punto $w=0$ mediante una función $w=\Phi(z)$. Exigiremos que se cumplan las dos condiciones siguientes:

$$\Phi(\infty)=\infty \quad \text{y} \quad \lim_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z}=1,$$

las cuales determinan a $\Phi(z)$ de un modo unívoco.

Las condiciones señaladas verdaderamente pueden ser satisfechas. Con este fin, efectuemos primero la transformación del recinto G_∞ en un recinto G_1 mediante la función $z_1=\dfrac{1}{z-z_0}$, $z_0\in K$, según la cual el punto ∞ irá al origen de coordenadas; hagamos luego la transformación $w_1=\varphi(z_1)$ del recinto G_1 en un círculo con el centro en el origen de coordenadas, de modo que sea $\varphi(0)=0$ y $\varphi'(0)=1$, es decir, $\lim\limits_{z_1\to 0}\dfrac{w_1}{z_1}=1$, y, finalmente, hagamos la transformación $w=\dfrac{1}{w_1}$, según la cual la parte interior del círculo se transformará en la parte exterior de cierto círculo: $|w|>\rho>0$. Fácilmente se observa que la transformación resultante

$$w=\Phi(z)=\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{z-z_0}\right)}$$

satisface a las condiciones impuestas. En efecto,

$$\Phi(\infty)=\infty \quad y \quad \lim_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z}=\lim_{z_1\to 0}\frac{1}{z_0 z_1+1}\,\frac{z_1}{w_1}=1.$$

De aquí se deduce que, en un entorno del punto del infinito, la función $\Phi(z)$ admite el siguiente desarrollo de Laurent:

$$\Phi(z)=z+\alpha_0+\frac{\alpha_{-1}}{z}+\ldots,$$

y la función $[\Phi(z)]^n$ (n es un número entero no negativo) un desarrollo de la forma:

$$[\Phi(z)]^n=z^n+\alpha_{n-1}^{(n)}z^{n-1}+\ldots+\alpha_0^{(n)}+\frac{\alpha_{-1}^{(n)}}{z}+\ldots.$$

Los polinomios

$$\Phi_n(z)=z^n+\alpha_{n-1}^{(n)}z^{n-1}+\ldots+\alpha_0^{(n)},$$

que representan el conjunto de los términos con potencias no negativas de z en los desarrollos de Laurent de las funciones $[\Phi(z)]^n$, se llaman **polinomios de Faber**, engendrados por el continuo K (abreviadamente, polinomios de Faber para K). Evidentemente,

$$\Phi_0(z)=1,\qquad \Phi_1(z)=z+\alpha_0,\qquad \Phi_2(z)=z^2+2\alpha_0 z+\alpha_0^2+2\alpha_{-1},\ \ldots$$

Ejemplos:

1) K es un círculo $|z-z_0|\leqslant r_0$. En este caso $w=\Phi(z)=z-z_0$, y, por consiguiente, $\Phi_n(z)=(z-z_0)^n$.

2) K es la parte interior cerrada de una lemniscata de k focos:

$$|z^k+A_{k-1}z^{k-1}+\ldots+A_0|\leqslant\mu_0.$$

Como fácilmente puede convencerse el lector, aquí

$$\Phi(z)=z\left(1+\frac{A_{k-1}}{z}+\ldots+\frac{A_0}{z^k}\right)^{\frac{1}{k}}$$

(para la función multiforme $\left(1+\frac{A_{k-1}}{z}+\ldots+\frac{A_0}{z^k}\right)^{\frac{1}{k}}$ se toma la rama que es igual a 1 en el punto $z=\infty$). Por lo tanto,

$$[\Phi(z)]^{mk}=(z^k+A_{k-1}z^{k-1}+\ldots+A_0)^m\qquad(m=0,1,\ldots),$$

y, por consiguiente,

$$\Phi_{mk}(z)=(z^k+A_{k-1}z^{k-1}+\ldots+A_0)^m.$$

En particular, para la lemniscata de dos focos $|z^2-1|\leqslant 1$, se tiene:

$$\Phi(z)=z(1-z^{-2})^{\frac{1}{2}}.$$

Aquí

$$\Phi_0(z)=1,\ \Phi_1(z)=z,\ \Phi_2(z)=z^2-1,\ \Phi_3(z)=z^3-\frac{3}{2}z,$$

$$\Phi_4(z)=z^4-2z^2+1,\ \Phi_5(z)=z^5-\frac{5}{2}z^3+\frac{15}{8}z,\ \ldots$$

3) K es el segmento del eje real: $-1\leqslant x\leqslant+1$. Aquí $w=$ $=\Phi(z)=\frac{1}{2}(z+\sqrt{z^2-1})$ transforma K en el recinto $|w|>\frac{1}{2}$ (se toma la rama de $\sqrt{z^2-1}$ que satisface a la condición $\frac{\sqrt{z^2-1}}{z}\to 1$ para $z\to\infty$). Evidentemente, el desarrollo de Laurent de la función $\frac{1}{4}[\Phi(z)]^{-1}=\frac{1}{2}(z-\sqrt{z^2-1})$ en un entorno del punto $z=\infty$ no contiene potencias no negativas de z. Por ello, los conjuntos de potencias no negativas de z en los desarrollos de

$$[\Phi(z)]^n \text{ y } [\Phi(z)]^n+\frac{1}{4^n}[\Phi(z)]^{-n}=$$
$$=\left[\frac{1}{2}(z+\sqrt{z^2-1})\right]^n+\left[\frac{1}{2}(z-\sqrt{z^2-1})\right]^n$$

son iguales. Pero la última función es un polinomio de grado n, de donde

$$\Phi_n(z)=\frac{1}{2^n}[(z+\sqrt{z^2}-1)^n+(z-\sqrt{z^2-1})^n]\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Haciendo aquí $z=\cos t$, obtenemos:

$$\Phi_n(\cos t)=\frac{1}{2^n}[(\cos t+i\operatorname{sen} t)^n+(\cos t-i\operatorname{sen} t)^n]=\frac{1}{2^{n-1}}\cos nt.$$

Por lo tanto,

$$\Phi_n(z)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\operatorname{Arc}\cos z)=T_n(z).$$

Vemos, pues, que cuando K es el segmento $[-1,+1]$, los polinomios de Faber coinciden con los p o l i n o m i o s clásicos d e C h é b i s h e v de separación mínima del cero en este segmento.

Volvamos a examinar el caso general. Si $|\zeta|=R$ es una circunferencia cualquiera, dentro de la cual está situado K, entonces para cualquier punto z, $|z|<R$, se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R}\frac{[\Phi(\zeta)]^n-\Phi_n(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0\qquad(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).\quad(4.5:1)$$

En efecto, la función que figura bajo el signo integral es analítica para $|\zeta|\geqslant R$ y posee en el punto del infinito un cero de orde

no inferior al segundo (puesto que $[\Phi(\zeta)]^n - \Phi_n(\zeta)$ posee en el punto del infinito un cero de orden no inferior al primero). Por esto, el residuo de la función respecto del punto del infinito es igual a cero y la integral también es igual a cero.

De la fórmula (4.5:1) se deduce que

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta| = R} \frac{[\Phi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta. \qquad (4.5:2)$$

Aquí se puede sustituir la circunferencia $|\zeta| = R$ por cualquier curva cerrada rectificable γ que esté situada en el recinto G_∞ y que contenga en su interior al punto z. Tomemos por γ una imagen circular cualquiera C_R, o sea, la preimagen de la circunferencia $|w| = R > \rho$ en la transformación $w = \Phi(z)$. Tendremos:

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{[\Phi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w| = R} \frac{\Psi'(w)\, w^n}{\Psi(w) - z} dw, \qquad (4.5:3)$$

donde $\Psi(w) = \Phi^{-1}(w)$ y z es cualquier punto del interior de C_R (en particular, cualquier punto del continuo K). De las fórmulas obtenidas se deduce que los polinomios de Faber $\Phi_n(z)$ son los coeficientes de w^{-n-1} en el desarrollo de Laurent de la función

$$\chi(w;\, z) = \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}$$

en un entorno del punto del infinito (z está fijado). Como $z = \Psi(w)$ tiene un polo simple en ∞ y $\lim\limits_{w \to \infty} \frac{\Psi(w)}{w} = \lim\limits_{z \to \infty} \frac{z}{\Phi(z)} = 1$, se tiene:

$$\Psi(w) = w + \beta_0 + \frac{\beta_{-1}}{w} + \ldots, \quad \Psi'(w) = 1 - \frac{\beta_{-1}}{w^2} + \ldots,$$

de donde se deduce que la función $\chi(w,\, z)$ (considerada como función de w) posee un cero simple en el punto del infinito. Así, pues, para $|w| \geqslant R$ obtenemos un desarrollo uniformemente convergente:

$$\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z} = \sum_{0}^{\infty} \frac{\Phi_n(z)}{w^{n+1}}. \qquad (4.5:4)$$

Vemos que $\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}$ es la función engendradora de los polinomios de Faber.

Designemos con $E_{R'}$ el conjunto de los puntos del recinto G_∞ que pertenecen a la parte exterior cerrada de la imagen circular $C_{R'}$, y sea r un número que satisfaga a la desigualdad $\rho < r < R'$. Para cualquier punto $z \in E_{R'}$ $(z \neq \infty)$ y para un R suficientemente

grande, de la fórmula (4.5:3), tendremos:

$$\Phi_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{[\Phi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta = [\Phi(z)]^n + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{[\Phi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta. \quad (4.5:5)$$

Para la integral $I_r = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{[\Phi(\zeta)]^n}{\zeta - z} d\zeta$ obtenemos la cota

$$|I_r| < \frac{L_r}{2\pi\delta_{r,\,R'}} \cdot r^n,$$

donde L_r es la longitud de C_r y $\delta_{r,\,R'}$, es la distancia entre C_r y $C_{R'}$. Por lo tanto,

$$I_r = \frac{L_r}{2\pi\delta_{r,\,R'}} r^n \vartheta_n(z;\, r,\, R'),$$

donde $|\vartheta_n(z;\, r,\, R')| < 1$, y

$$\Phi_n(z) = [\Phi(z)]^n + \frac{L_r \cdot r^n}{2\pi\delta_{r,\,R'}} \cdot \vartheta_n(z;\, r,\, R'), \qquad z \in E_{R'}. \quad (4.5:6)$$

Eligiendo $N(r, R')$ de modo que para todos los valores de $n > N(r, R')$ se cumpla la desigualdad

$$\frac{L_r}{2\pi\delta_{r,\,R'}} \cdot \frac{r^n}{R'^n} < \frac{1}{2},$$

y observando que $|\Phi(z)| \geqslant R'$ en el conjunto $E_{R'}$, obtenemos

$$\frac{1}{2} |\Phi(z)|^n < |\Phi_n(z)| < \frac{3}{2} |\Phi(z)|^n, \qquad z \in E_{R'}, \qquad (4.5:7)$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\Phi_n(z)|} = |\Phi(z)| \qquad (4.5:8)$$

para cualquier $z \in G_\infty$ y uniformemente en el interior del recinto $G_\infty \setminus \infty$.

4.6. En este apartado estudiaremos las series de polinomios de Faber:

$$\sum_0^\infty a_n \Phi_n(z). \qquad (4.6:1)$$

Obsérvese, ante todo, que si

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R_0} < \frac{1}{\rho}, \qquad (4.6:2)$$

entonces la serie (4.6:1) es absoluta y uniformemente convergente en el interior del recinto limitado por la curva C_{R_0}, y es divergente en el exterior de la curva C_{R_0}. En efecto, sea $\rho < R' < R_0$; entonces,

en virtud de la segunda de las desigualdades (4.5:7), tendremos en $C_{R'}$:

$$|\Phi_n(z)| < \frac{3}{2}|\Phi(z)|^n = \frac{3}{2}R'^n \quad \text{para} \quad n > N(R')$$

$\left(r \text{ se puede tomar igual a } \frac{\rho + R'}{2}\right)$. Por otra parte, para cualquier ε, $0 < \varepsilon < R_0 - R'$, obtenemos:

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{R_0 - \frac{\varepsilon}{2}} < \frac{1}{R' + \frac{\varepsilon}{2}}$$

para $n > N'$. Por lo tanto, para $n > \nu = \max(N, N')$ tendremos en C_R (y, por consiguiente, también en el interior de $C_{R'}$):

$$|a_n||\Phi_n(z)| < \frac{3}{2}\left(\frac{R'}{R' + \frac{\varepsilon}{2}}\right)^n,$$

de donde se deduce la convergencia absoluta y uniforme de la serie (4.5:1).

Si z está situado en el exterior a la curva C_{R_0}, entonces $|\Phi(z)| > R_0$ y, por consiguiente (debido a las fórmulas (4.5:8) y (4.6:2)), tendremos:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n\Phi_n(z)|} = \frac{|\Phi(z)|}{R_0} > 1,$$

o sea, la serie es divergente.

De la proposición demostrada se deduce que la suma de la serie (4.6:1) representa una función analítica en el interior de C_{R_0} (con la condición (4.6:2)). Demostremos que es cierta la proposición inversa: toda función $f(z)$ que sea analítica en el interior de C_{R_0} ($R_0 > \rho$) puede expresarse en este recinto en forma de una serie de la forma (4.6:1).

En efecto, para cualquier R, $\rho < R < R_0$, se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \frac{f[\Psi(w)]\cdot\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}\,dw$$

(z está situado en el interior de C_R). Sustituyendo $\frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}$ por su desarrollo (4.5:4), el cual es uniformemente convergente respecto de w en la circunferencia $|w| = R$, obtenemos:

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n\Phi_n(z), \qquad (4.6:1')$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} f[\Psi(w)] \frac{dw}{w^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(z)\, \Phi'(z)\, dz}{[\Phi(z)]^{n+1}} . \qquad (4.6:3)$$

Haciendo la notación $M_R = \max\limits_{C_R} |f(z)|$, hallamos:

$$|a_n| < \frac{M_R}{R^n} , \qquad (4.6:4)$$

de donde

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{R} ,$$

y como R es cualquier número menor que R_0, resulta:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{R_0} .$$

Por esta razón, la serie (4.6:1′) es absoluta y uniformemente convergente en el interior del recinto limitado por la curva C_{R_0}.

Demostremos que los desarrollos en serie de polinomios de Faber poseen la propiedad de unicidad (o identidad). En efecto, supongamos que las sumas de dos series de la forma (4.6:1) coinciden en el interior de C_{R_0}, $R_0 > \rho$. Entonces, formando la diferencia de estas series, obtenemos:

$$\sum_0^\infty a_n \Phi_n(z) = 0, \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{R_0} . \qquad (4.6:5)$$

Pero, para cualquier R', $\rho < R' < R_0$, para $r = \frac{\rho + R'}{2}$ y z perteneciente a $E_{R'}$, tendremos en virtud de la fórmula (4.5:6):

$$|\Phi_n(z) - [\Phi(z)]^n| < \frac{L_r r^n}{2\pi\delta_{r,\,R'}}$$

y, debido a la condición impuesta sobre a_n:

$$|a_n|\,|\Phi_n(z) - [\Phi(z)]^n| < \frac{L_r r^n}{2\pi\delta_{r,\,R'} R'^n}$$

para $n > N'$. De aquí se deduce que la serie

$$\sum_0^\infty a_n \{[\Phi(z)]^n - \Phi_n(z)\}$$

es uniformemente convergente en el conjunto $E_{R'}$ y, por consiguiente, representa una función analítica. Esta se anula en el punto del infinito, puesto que en este punto se anulan todos los términos de la serie. Efectuando la transformación $w = \Phi(z)$, hallaremos

que la función

$$\sum_{0}^{\infty} a_n \{w^n - \Phi_n[\Psi(w)]\} = \varphi(w) \qquad (4.6:6)$$

es analítica para $|w| > R'$ (y, por consiguiente, también para $|w| > \rho$) y se anula en el punto del infinito. Pero $\sum_{0}^{\infty} a_n \Phi_n[\Psi(w)] = 0$ para $\rho < |w| < R_0$, o sea,

$$\varphi(w) = \sum_{0}^{\infty} a_n w^n. \qquad (4.6:7)$$

Observando que la última serie es convergente para $|w| < R_0$ (en virtud de (4.6:5)), sacamos la conclusión de que la función, definida mediante la serie (4.6:6) para $|w| > \rho$ y mediante la serie (4.6:7) para $|w| < R_0$, es uniforme y analítica en todo el plano y se anula en el punto $z = \infty$. De aquí se deduce que $\varphi(w) \equiv 0$, y, por consiguiente, en virtud del desarrollo (4.6:7), se tiene: $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, que es lo que se quería demostrar.

En el caso particular en que K es un círculo $|z - z_0| \leqslant r_0$, los polinomios de Faber tienen la forma $\Phi_n(z) = (z - z_0)^n$ y las imágenes circulares C_r son las circunferencias $|z - z_0| = r$. En este caso las series de polinomios de Faber se convierten en las series de Taylor: $\sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. Cuando K es el segmento del eje real $-1 \leqslant x \leqslant 1$, los polinomios de Faber coinciden con los polinomios de Chébishev:

$$\Phi_n(z) = T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \operatorname{Arc} \cos z),$$

y las imágenes circulares C_r son las elipses

$$\frac{x^2}{\left(r + \frac{1}{4r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r - \frac{1}{4r}\right)^2} = 1$$

con los focos ± 1, siendo $\rho = \frac{1}{2}$.

De las proposiciones demostradas se deduce que toda función analítica $f(z)$ en el interior de la elipse

$$\frac{x^2}{\left(R_0 + \frac{1}{4R_0}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(R_0 - \frac{1}{4R_0}\right)^2} = 1,$$

es desarrollable en serie de polinomios de Chébishev

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n T_n(z),$$

la cual es uniformemente convergente dentro del recinto limitado por esta elipse, y además, este desarrollo es único.

4.7. Aplicando los polinomios de Faber se pueden obtener teoremas referentes al orden de aproximación de las funciones analíticas en cierto continuo K, mediante polinomios. Para el caso en que K es un segmento del eje real, tales teoremas fueron obtenidos por primera vez por S. N. Bernstéin en su conocida tesis*).

Lema de Bernstéin-Walsh. *Sea K un continuo; supongamos que G_∞ es aquel recinto contiguo con K que contiene al punto ∞, y sean C_R las imágenes circulares en la transformación conforme del círculo $|w| > \rho$ en G_∞ mediante la función*

$$\Psi(w) = w + \beta_0 + \frac{\beta_{-1}}{w} + \dots$$

Si $\Pi_n(z)$ es un polinomio de grado no superior a n que satisface en K a la desigualdad

$$|\Pi_n(z)| \leqslant M,$$

entonces en C_R (y en el interior de C_R) este polinomio satisface a la desigualdad

$$|\Pi_n(z)| \leqslant M\left(\frac{R}{\rho}\right)^n.$$

Demostración. Consideremos la función

$$\varphi(z) = \frac{\Pi_n(z)}{[\Phi(z)]^n} \quad (\Phi(z) = \Psi^{-1}(w)).$$

Esta es analítica en el recinto G_∞ y

$$\varphi(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{\Pi_n(z)}{[\Phi(z)]^n} = \lim_{z\to\infty} \left\{\left[\frac{z}{\Phi(z)}\right]^n \frac{\Pi_n(z)}{z^n}\right\} = A_n,$$

donde A_n es el coeficiente de z^n en el polinomio $\Pi_n(z)$. Apliquemos el principio del módulo máximo a la función $\varphi(z)$ en el dominio E_r compuesto de todos los puntos de la parte exterior a la curva C_r, $r > \rho$ y de la misma curva C_r (para pasar del recinto no acotado a uno acotado, para el cual se demostró este principio, es suficiente realizar la transformación $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$, donde z_0 es un punto cualquiera del continuo K). Hallaremos que en cada punto $z \in E_r$ se cumple la

*) S. N. Bernstéin, Sobre la aproximación óptima de las funciones continuas mediante polinomios de un grado dado. (С. Н. Бернштейн, О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщения Харьковского математического общества, вторая серия, XIII, 1912, стр. 49—194).
Las proposiciones que nos interesan se hallan en las págs. 86—87 y 178—179. Véase también S. N. Bernstéin, Obras completas, t. 1. Teoría constructiva de las funciones (С. Н. Бернштейн, Собрание сочинений, т. 1. Конструктивная теория функций, Изд-во АН СССР, 1952, стр. 21, 41 и 93).

desigualdad

$$|\varphi(z)| \leqslant \max_{\zeta \in C_r} |\varphi(\zeta)| = \frac{\max\limits_{C_r} |\Pi_n(\zeta)|}{r^n}.$$

o bien, haciendo $|\Phi(z)| = R > r$:

$$|\Pi_n(z)| \leqslant \max_{C_r} |\Pi_n(\zeta)| \left(\frac{R}{r}\right)^n < \max_{C_r} |\Pi_n(\zeta)| \left(\frac{R}{\rho}\right)^n.$$

Sea $\max\limits_{C_r} |\Pi_n(\zeta)| = |\Pi_n(\zeta_r)|$, $\zeta_r \in C_r$; cuando r, decreciendo, tiende a ρ, el $\max\limits_{C_r} |\Pi_n(\zeta)|$, sin crecer, tiende hacia un límite determinado μ. Es obvio que resulta este mismo límite cuando r recorre una sucesión $\{r_k\}$, convergente hacia ρ. Los puntos de acumulación de la sucesión $\{\zeta_{r_k}\}$ pertenecen todos a la frontera del recinto G_∞ (véase el teorema 1, ap. 3.1) y, por consiguiente, al continuo K; pasando a sucesiones parciales se puede exigir que exista el límite: $\lim\limits_{r_k \to \rho} \zeta_{r_k} = z_0 \in K$.

Entonces tendremos:

$$\mu = \lim_{r_k \to \rho} |\Pi_n(\zeta_{r_k})| = |\Pi_n(z_0)| \leqslant M,$$

y, por consiguiente,

$$|\Pi_n(z)| \leqslant \mu \left(\frac{R}{\rho}\right)^n \leqslant M \left(\frac{R}{\rho}\right)^n,$$

que es lo que se quería demostrar.

T e o r e m a d e S. N. B e r n s t é i n. *Una función $f(z)$ de variable compleja z, definida en un continuo K, admite, para cada $\varepsilon > 0$ y para todos los valores naturales de n, aproximaciones mediante polinomios $\Pi_n(z)$ de grado no superior a n, que satisfacen a las desigualdades*

$$|f(z) - \Pi_n(z)| < C(\varepsilon)(q + \varepsilon)^n \qquad (q < 1), \qquad (4.7{:}1)$$

cuando y sólo cuando, ella es analítica en el recinto limitado por la curva C_{R_0}, donde $R_0 = \frac{\rho}{q}$. En este caso, la sucesión $\{\Pi_n(z)\}$ converge hacia $f(z)$ uniformemente en el interior del recinto indicado.

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos primero que $f(z)$ es una función analítica en el interior de C_{R_0}, donde $R_0 = \frac{\rho}{q}$ y $q < 1$. Entonces, según el apartado precedente, ella se expresa por una serie de polinomios de Faber, uniformemente convergente en el

interior de C_{R_0}:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_k \Phi_k(z).$$

Las sumas parciales de esta serie

$$\sum_0^n a_k \Phi_k(z) = \Pi_n(z)$$

son polinomios de grado no superior a n (puesto que el grado de cada $\Phi_k(z)$ es igual a k). Cerciorémonos de que estos polinomios satisfacen a las condiciones del teorema. Aquí es suficiente demostrar la desigualdad (4.7:1). Sea ε un número positivo arbitrario, menor que $1 - q$. Elijamos los números R' y R: $\rho < R' < R < R_0$, de modo que se cumpla la relación

$$\frac{R'}{R} = q + \varepsilon \left(> \frac{\rho}{R_0}\right),$$

lo cual, evidentemente, siempre es posible. Según la fórmula (4.6:4), se tiene:

$$|a_k| < \frac{M_R}{R^k},$$

donde $M_R = \max_{C_R} |f(z)|$, luego, en virtud de (4.5:7), en todos los puntos de la curva $C_{R'}$ se cumple la desigualdad

$$|\Phi_k(z)| < \frac{3}{2} |\Phi(z)|^k = \frac{3}{2} R'^k \quad \text{para} \quad n > N(\varepsilon)$$

$\left(\text{para precisar, se puede tomar } r \text{ igual a } \frac{R' + \rho}{2}\right)$. Por lo tanto, para $n > N(\varepsilon)$ en todos los puntos de la curva $C_{R'}$ tendremos:

$$|f(z) - \Pi_n(z)| = \left| \sum_{n+1}^{\infty} a_k \Phi_k(z) \right| < \frac{3}{2} M_R \sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{R'}{R}\right)^k =$$

$$= \frac{3}{2} M_R \frac{\left(\frac{R'}{R}\right)^{n+1}}{1 - \frac{R'}{R}} = \frac{3}{2} M_R \frac{q+\varepsilon}{1-(q+\varepsilon)} (q+\varepsilon)^n.$$

Debido al principio del módulo máximo esta desigualdad se cumplirá también en todos los puntos del continuo K. Sustituyendo, en caso de necesidad, el número $\frac{3}{2} M_R \frac{q+\varepsilon}{1-(q+\varepsilon)}$ por uno mayor, podemos conseguir que se cumpla también la desigualdad obtenida para $n \leqslant N(\varepsilon)$.

Así, pues, para cierto $C = C(\varepsilon)$ tendremos:

$$|f(z) - \Pi_n(z)| < C(\varepsilon)(q+\varepsilon)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad z \in K,$$

con lo que queda demostrada la primera parte del teorema.

Demostremos ahora la segunda parte del teorema. Supongamos que para una función $f(z)$, definida en K, existen unos polinomios $\Pi_n(z)$ que satisfacen a las desigualdades (4.7:1). Entonces, evidentemente, tendremos en todos los puntos del continuo K (uniformemente):

$$\lim_{n\to\infty} \Pi_n(z) = f(z).$$

Demostremos que la sucesión $\{\Pi_n(z)\}$ es uniformemente convergente en el interior del recinto limitado por la curva $C_{R_0}\left(R_0 = \frac{\rho}{q}\right)$. En efecto, de (4.7:1) se deduce que

$$|\Pi_n(z) - \Pi_{n-1}(z)| < C(\varepsilon)(q+\varepsilon)^n\left(1 + \frac{1}{q+\varepsilon}\right) = C'(\varepsilon)(q+\varepsilon)^n$$

en todos los puntos del continuo K. Vamos a suponer que $\varepsilon < \frac{1-q}{2}$, y hagamos $R = \frac{\rho}{q+2\varepsilon}$ $(>\rho)$. Entonces, aplicando el lema de Bernstein-Walsh al polinomio $\Pi_n(z) - \Pi_{n-1}(z)$ de grado no superior a n, hallaremos que en todos los puntos de la curva C_R se cumplen las desigualdades:

$$|\Pi_n(z) - \Pi_{n-1}(z)| < C'(\varepsilon)(q+\varepsilon)^n \frac{R^n}{\rho^n} = C'(\varepsilon)\left(\frac{q+\varepsilon}{q+2\varepsilon}\right)^n.$$

De aquí se deduce que la serie

$$\Pi_0(z) + (\Pi_1(z) - \Pi_0(z)) + \ldots + (\Pi_n(z) - \Pi_{n-1}(z)) + \ldots,$$

o la sucesión $\{\Pi_n(z)\}$, es uniformemente convergente en el interior de C_R. Pero $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} R = R_0$, por lo cual la sucesión $\{\Pi_n(z)\}$ es uniformemente convergente en el interior del recinto limitado por la curva C_{R_0}, y, por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} \Pi_n(z)$ es una función analítica en el interior de C_{R_0} que en todos los puntos del continuo K coincide con $f(z)$. Con esto se termina la demostración del teorema.

Aplicando el teorema demostrado al caso en que K es un círculo $|z - z_0| \leqslant r_0$, hallaremos que la existencia, para cualquier $\varepsilon > 0$, de polinomios $\Pi_n(z)$ de grado no superior a n, que satisfagan a las desigualdades

$$|f(z) - \Pi_n(z)| < C(\varepsilon)(q+\varepsilon)^n$$
$$(0 < q < 1), \quad z \in K,$$

es necesaria y suficiente para que $f(z)$ sea analítica en el interior de la circunferencia $|z - z_0| < \frac{r_0}{q}$; y cuando K es el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$, la condición análoga (que debe cumplirse en los puntos de este segmento) es necesaria y suficiente para que la función $f(z)$ sea analítica en el interior de la elipse

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2q}+\frac{q}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2q}-\frac{q}{2}\right)^2}=1$$

$\Big($o sea, la elipse con los focos ± 1 y cuya suma de semiejes es igual a $\frac{1}{q}\Big)$.

4.8. Aquí y hasta el final de este capítulo, nos dedicaremos al estudio de las series de polinomios ortogonales sobre la superficie

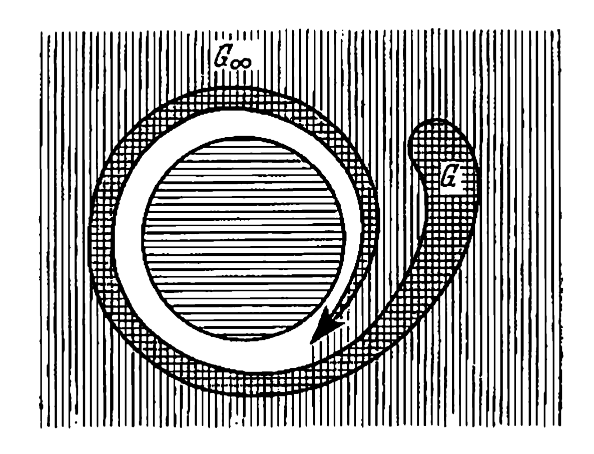


FIG. 21.

de un recinto. Sea G un recinto acotado simplemente conexo que posea la propiedad de que su frontera coincida con la frontera de recinto G_∞, o sea, de aquel recinto contiguo con $\overline{G}$ que contiene al punto ∞. Los recintos de este tipo se llaman **r e c i n t o s d e C a r a t h é o d o r y**. Tales son todos los que están limitados por curvas de Jordan, pero no sólo ellos. En la fig. 21 está representado un recinto de Carathéodory cuya frontera divide el plano en tres recintos distintos. En la fig. 22 están representados dos recintos que no son de Carathéodory.

La propiedad característica de los recintos de Carathéodory consiste en que cada uno de ellos se puede representar en forma del núcleo de una sucesión convergente decreciente de recintos simplemente conexos $\{G_n\}$:

$$\overline{G} \subset G_{n+1} \subset \overline{G}_{n+1} \subset G_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

La construcción de tal sucesión coincide totalmente con la construcción descrita en el apartado 4.2 para el caso en que G está limitado por una curva de Jordan. Pero en lugar de afirmar que ningún punto que sea exterior a G pertenece al núcleo de la sucesión $\{G_n\}$, podemos decir ahora solamente que ninguno de los puntos del recinto

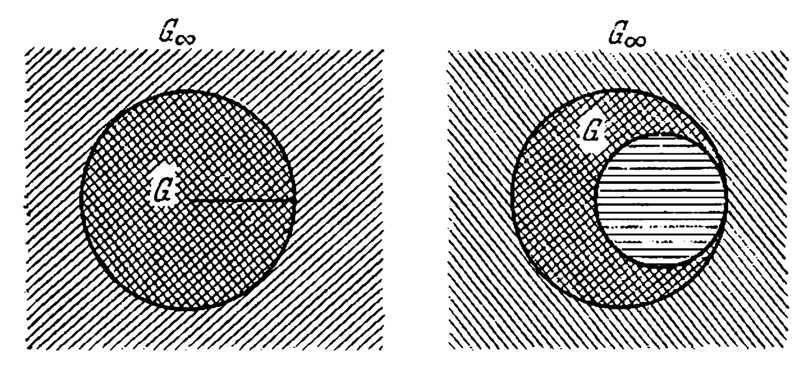


FIG. 22.

G_∞ puede pertenecer a este núcleo. Para obtener el núcleo que coincida con el recinto G, es necesario señalar que se trata del núcleo con respecto a algún punto $z_0 \in G$. Como G contiene a z_0 y pertenece a todos los G_n, el recinto G está contenido en el núcleo correspondiente. Para demostrar que G coincide con el núcleo es suficiente observar que ninguno de los puntos frontera del recinto G puede pertenecer al núcleo. Pero, en efecto, cada uno de tales puntos es también punto frontera para G_∞ (según la definición de recinto de Carathéodory) y, por consiguiente, contiene en cualquier entorno puntos de G_∞. Y como estos últimos no pueden pertenecer al núcleo, los puntos frontera del recinto G no pertenecen al núcleo. Así, pues, queda demostrada la existencia de la sucesión pedida. El lector demostrará sin dificultad que todo recinto G, para el cual exista una sucesión semejante, es un recinto de Carathéodory. Por cierto, aquí no emplearemos esto.

Lema. *Sea G un recinto de Carathéodory y sea $\{G_n\}$ una sucesión decreciente de recintos acotados simplemente conexos, convergente hacia*

G como hacia su núcleo. Entonces, para la sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$ que transforman conformemente G_n en el círculo $|w| < 1$ y satisfacen a las condiciones: $f_n(z_0) = 0$, $f'_n(z_0) > 0$ ($z_0 \in G$), y para cualquier número entero no negativo k, se cumple la relación

$$\lim_{n\to\infty} \iint_G |[f_n(z)]^k f'_n(z) - [f(z)]^k f'(z)|^2 \, dx\, dy = 0,$$

donde $f(z)$ transforma conformemente el recinto G en el mismo círculo y satisface a las condiciones análogas: $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.

D e m o s t r a c i ó n. De la desigualdad elemental

$$\left|\sum_1^m a_k\right|^2 \leqslant m \sum_1^m |a_k|^2 \text{ *)}$$

para $m = 2$, se deduce que

$$\begin{aligned} |[f_n(z)]^k f'_n(z) - [f(z)]^k \cdot f'(z)|^2 &\leqslant 2|f_n(z)|^{2k} |f'_n(z) - f'(z)|^2 + \\ + 2|f'(z)|^2 |[f_n(z)]^k - [f(z)]^k|^2 &< 2|f'_n(z) - f'(z)|^2 + \\ &+ 2k^2 |f'(z)|^2 |f_n(z) - f(z)|^2, \qquad (4.8:1) \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $|f(z)| < 1$ y $|f_n(z)| < 1$.

Designemos con γ_r la imagen circular $f^{-1}(|w| = r)$; cualquiera que sea el conjunto cerrado $F \subset G$, éste quedará contenido dentro de γ_r, si r es suficientemente próximo a la unidad. Sea ε un número positivo arbitrario. Elijamos r_0 y ρ_0 ($< r_0$) de modo que $\pi - \pi\rho_0^2$ sea menor que ε^2. Finalmente, empleando la convergencia uniforme de las sucesiones $\{f_n(z)\}$ y $\{f'_n(z)\}$ en el interior de G hacia las funciones $f(z)$ y $f'(z)$, respectivamente (en virtud del teorema de Carathéodory), elijamos $N_0(\varepsilon)$ de modo que para $n > N_0$ en γ_{r_0} (y, por consiguiente, en el interior de γ_{r_0}) se cumplan las desigualdades:

$$|f_n(z) - f(z)| < r_0 - \rho_0 \quad \text{y} \quad |f'_n(z) - f'(z)| < \varepsilon.$$

Entonces tendremos:

$$\iint_G |f'_n(z) - f'(z)|^2 \, dx\, dy =$$

$$= \iint_{g_{r_0}} |f'_n(z) - f'(z)|^2 \, dx\, dy + \iint_{G \setminus g_{r_0}} |f'_n(z) - f'(z)|^2 \, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 \text{ área } g_{r_0} + 2 \iint_{G\setminus g_{r_0}} |f'_n(z)|^2 \, dx\, dy + 2 \iint_{G\setminus g_{r_0}} |f'(z)|^2 \, dx\, dy.$$

---

*) Esta se obtiene de la desigualdad $\left|\sum_0^m a_k b_k\right|^2 \leqslant \sum_0^m |a_k|^2 \sum_0^m |b_k|^2$ para $b_1 = \ldots = b_m = 1$.

La integral $\iint\limits_{G-g_{r_0}} |f'(z)|^2\,dx\,dy$ representa el área de la imagen de la parte del recinto G que está situada fuera de γ_{r_0}, es decir, el área del anillo circular $r_0 < |w| < 1$, igual a $\pi - \pi r_0^2$; según la hipótesis, ésta es menor que ε^2. La integral $\iint\limits_{G-g_{r_0}} |f_n'(z)|^2\,dx\,dy$ representa el área de la imagen de la misma parte, pero en la transformación $w = f_n(z)$. Como en γ_{r_0} se cumple la desigualdad $|f_n(z) - f(z)| < r_0 - \rho_0$, esta imagen está contenida entre la circunferencia unidad y la circunferencia $|z| = \rho_0$; por lo tanto, el área de la imagen es menor que $\pi - \pi\rho_0^2$, es decir, es menor que ε^2. Observando también que el área de g_{r_0} es menor que S, obtenemos:

$$\iint\limits_G |f_n'(z) - f'(z)|^2\,dx\,dy < \varepsilon^2(S+4). \qquad (4.8{:}2)$$

Examinemos la integral $\iint\limits_G |f'(z)|^2\,|f_n(z) - f(z)|^2\,dx\,dy$; se tiene:

$$\iint\limits_G |f'(z)|^2\,|f_n(z) - f(z)|^2\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{g_{r_0}} |f'(z)|^2\,|f_n(z) - f(z)|^2\,dx\,dy +$$

$$+ \iint\limits_{G\setminus g_{r_0}} |f'(z)|^2\cdot|f_n(z) - f(z)|^2\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon^2 \iint\limits_{g_{r_0}} |f'(z)|^2\,dx\,dy + 4\iint\limits_{G\setminus g_{r_0}} |f'(z)|^2\,dx\,dy < \pi\varepsilon^2 + 4\varepsilon^2 = (\pi+4)\,\varepsilon^2.$$

$$(4.8{:}3)$$

De las desigualdades (4.8:1), (4.8:2), (4.8:3) sacamos la conclusión que

$$\iint\limits_G |[f_n(z)]^k f_n'(z) - [f(z)]^k f'(z)|^2\,dx\,dy <$$

$$< 2\iint\limits_G |f_n'(z) - f'(z)|^2\,dx\,dy + 2k^2\iint\limits_G |f'(z)|^2\,|f_n(z) - f(z)|^2\,dx\,dy <$$

$$< \varepsilon^2\,[2S + 8 + 2k^2(\pi+4)] \quad \text{para} \quad n > N_0(\varepsilon).$$

Como ε es aquí arbitrariamente pequeño, resulta:

$$\lim_{n\to\infty} \iint_G |[f_n(z)]^k f_n'(z) - [f(z)]^k f'(z)|^2 \, dx\, dy = 0,$$

que es lo que se quería demostrar.

Teorema. *Supongamos que G es un recinto de Carathéodory y que $F(z)$ es una función analítica en el recinto G que satisface a la condición*

$$\iint_G |F(z)|^2 \, dx\, dy < \infty \text{ *)}.$$

Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $\Pi(z)$ tal que

$$\iint_G |F(z) - \Pi(z)|^2 \, dx\, dy < \varepsilon^2.$$

Demostración. Sustituyendo z en la función $F(z)$ mediante $f^{-1}(w)$, obtenemos una función $F^*(w)$ para la cual se cumple la condición

$$\iint_{|w|<1} |F^*(w)\, f^{-1\prime}(w)|^2 \, du\, dv = \iint_G |F(z)|^2 \, dx\, dy = C < \infty.$$

Sea

$$\varphi(w) = F^*(w)\, f^{-1\prime}(w) = \sum_0^\infty a_n w^n;$$

entonces

$$\iint_{|w|\leq r<1} |\varphi(w)|^2 \, du\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^r \left|\sum_0^\infty a_n w^n\right|^2 r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^r dr \left[\int_0^{2\pi} \sum_0^\infty \sum_0^\infty a_n \bar{a}_m r^{n+m+1} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta\right] =$$

$$= 2\pi \int_0^r \sum_0^\infty |a_k|^2 r^{2k+1}\, dr = \pi \sum_0^\infty |a_k|^2 \frac{r^{2k+2}}{k+1} < C.$$

De aquí que $\pi \sum_0^N |a_k|^2 \frac{r^{2k+2}}{k+1} < C$ para cualquier N y $r<1$, por lo cual $\pi \sum_0^N \frac{|a_k|^2}{k+1} \leqslant C$, y luego $\pi \sum_0^\infty \frac{|a_k|^2}{k+1} \leqslant C$ es decir, la serie $\sum_0^\infty \frac{a_k^2}{k+1}$ es convergente.

*) La integral se entiende como impropia.

Examinemos la integral

$$\iint_{|w|\leq r<1} \left|\varphi(w) - \sum_0^N a_k w^k\right|^2 du\,dv =$$

$$= \iint_{|w|\leq r<1} \left|\sum_{N+1}^{\infty} a_k w^k\right|^2 du\,dv = \pi \sum_{N+1}^{\infty} |a_k|^2 \frac{r^{2k+2}}{k+1} < \pi \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{k+1}.$$

Pasando aquí al límite para $r \to 1$, tendremos:

$$\iint_{|w|<1} \left|\varphi(w) - \sum_0^N a_k w^k\right|^2 du\,dv < \pi \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{k+1}$$

y, finalmente,

$$\lim_{N\to\infty} \iint_{|w|<1} \left|\varphi(w) - \sum_0^N a_k w^k\right|^2 du\,dv = 0.$$

Volviendo a la variable inicial mediante la transformación $w = f(z)$, hallaremos que

$$\iint_{|w|<1} \left|\varphi(w) - \sum_0^N a_k w^k\right|^2 du\,dv = \iint_G \left|\frac{F(z)}{f'(z)} -\right.$$

$$\left. - \sum_0^N a_k [f(z)]^k\right|^2 |f'(z)|^2\,dx\,dy = \iint_G \left|F(z) - \sum_0^N a_k [f(z)]^k f'(z)\right|^2 dx\,dy,$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{N\to\infty} \iint_G \left|F(z) - \sum_0^N a_k [f(z)]^k f'(z)\right|^2 dx\,dy = 0.$$

Basándonos en el lema y en el teorema de Runge, demostremos ahora que las funciones $\sum_0^N a_n [f(z)]^n f'(z)$ se pueden sustituir aquí por polinomios.

Sea ε un número positivo arbitrario. Fijemos $N_0 = N(\varepsilon)$ de modo que se cumpla la desigualdad

$$\iint_G \left|F(z) - \sum_0^{N_0} a_k [f(z)]^k f'(z)\right|^2 dx\,dy < \frac{\varepsilon^2}{16}.$$

Observando que

$$\iint_G \left| \sum_0^{N_0} a_k [f(z)]^k f'(z) - \sum_0^{N_0} a_k [f_n(z)]^k f'_n(z) \right|^2 dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant N_0 \sum_0^{N_0} |a_k|^2 \iint_G |[f(z)]^k f'(z) - [f_n(z)]^k f'_n(z)|^2 dx\,dy,$$

elijamos $n = n_0(\varepsilon)$ basándose en el lema, de modo que el segundo miembro de la desigualdad sea menor que $\frac{\varepsilon^2}{16}$. Entonces tendremos:

$$\iint_G \left| F(z) - \sum_0^{N_0} a_k [f_{n_0}(z)]^k f'_{n_0}(z) \right|^2 dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant 2 \iint_G \left| F(z) - \sum_0^{N_0} a_k [f(z)]^k f'(z) \right|^2 dx\,dy +$$

$$+ 2 \iint_G \left| \sum_0^{N_0} a_k [f(z)]^k f'(z) - \sum_0^{N_0} a_k [f_{n_0}(z)]^k f'_{n_0}(z) \right|^2 dx\,dy < \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{4.8:4}$$

Aplicando el teorema de Runge a la función $\sum_0^{N_0} a_k [f_{n_0}(z)]^k f'_{n_0}(z)$, la cual es analítica en el recinto simplemente conexo G_{n_0}, y al conjunto $\overline{G} \subset G_{n_0}^1$, hallaremos un polinomio $\Pi(z)$ tal que

$$\left| \sum_0^{N_0} a_k [f_{n_0}(z)]^k f'_{n_0}(z) - \Pi(z) \right|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4S}, \qquad z \in \overline{G},$$

donde S denota el área del recinto G. Entonces obtenemos:

$$\iint_G \left| \sum_0^{N_0} a_k [f_{n_0}(z)]^k f'_{n_0}(z) - \Pi(z) \right|^2 dx\,dy < \frac{\varepsilon^2}{4} \tag{4.8:5}$$

y, finalmente, confrontando (4.8:4) y (4.8.5):

$$\iint_G |F(z) - \Pi(z)|^2 dx\,dy < \varepsilon^2,$$

que es lo que se quería demostrar.

Los recintos de Carathéodory no son los recintos más generales a los que se extiende el teorema demostrado. Este es válido para todos los recintos que en un sentido determinado, que admite unas

características cuantitativas completamente exactas, son próximos a los recintos de Carathéodory.

Estas cuestiones, que exigieron la aplicación de métodos muy sutiles del análisis y de la teoría de funciones, fueron estudiadas por M. V. Kéldish, A. L. Shaguinián y M. M. Dzhrbashián.

Para abreviar, designemos con H_2' el conjunto de todas las funciones $\{F(z)\}$ que son analíticas en un recinto de Carathéodory G y satisfacen a la condición

$$\iint_G |F(z)|^2\, dx\, dy < \infty,$$

(funciones de cuadrado del módulo integrable). Según el teorema demostrado, para cada función $F(z) \in H_2'$ existe una sucesión de polinomios $\Pi_n(z)$ que satisface a la condición

$$\lim_{n\to\infty} \iint_G |F(z) - \Pi_n(z)|^2\, dx\, dy = 0,$$

o sea, que converge en media hacia F (sobre la superficie del recinto). Demostremos que para las funciones analíticas de variable compleja, de la convergencia en media se deduce la convergencia uniforme en el interior del recinto. En efecto, supongamos que $z_0 \in G$ y que ρ_0 es la distancia de este punto hasta la frontera del recinto G; entonces el círculo k: $|z - z_0| < \rho_0$ pertenece al recinto G. Si $\{F_n(z)\}$ es una sucesión de funciones analíticas que converge en media hacia $F(z)$ y

$$\iint_G |F(z) - F_n(z)|^2\, dx\, dy = \varepsilon_n^2,$$

con más razón

$$\iint_k |F(z) - F_n(z)|^2\, dx\, dy < \varepsilon_n^2.$$

Desarrollemos $F(z) - F_n(z)$ en serie de Taylor según las potencias de $z - z_0$:

$$F(z) - F_n(z) = \sum_0^\infty a_k (z - z_0)^k.$$

En virtud del cálculo hecho al comienzo de la demostración del teorema del presente apartado, se tiene:

$$\pi \sum_0^\infty |a_k|^2 \frac{\rho_0^{2k+2}}{k+1} \leqslant \iint_k |F(z) - F_n(z)|^2\, dx\, dy < \varepsilon_n^2,$$

de donde

$$\pi\rho_0^2 |a_0|^2 \leqslant \varepsilon_n^2.$$

Pero $a_0 = F(z_0) - F_n(z_0)$, por consiguiente,

$$|F(z_0) - F_n(z_0)|^2 < \frac{\varepsilon_n^2}{\pi\rho_0^2}.$$

Con esta desigualdad queda establecida la convergencia uniforme de $\{F_n(z)\}$ hacia $F(z)$ en el interior del recinto G.

La proposición recíproca no es justa: de la convergencia uniforme de una sucesión de funciones analíticas en el interior de un recinto dado no se deduce ni mucho menos la convergencia en media. Así, por ejemplo, la sucesión $\{\sqrt{n+1}\, z^n\}$ converge uniformemente hacia cero en el interior del círculo unidad, mientras que

$$\iint\limits_{|z|<1} |\sqrt{n+1}\, z^n|^2\, dx\, dy = \pi$$

para cualquier n, es decir, la sucesión no converge en media hacia cero (y, por consiguiente, no puede ser en general convergente en media, puesto que como se vio, el límite en media, si existiese, tendría que coincidir con el límite en el sentido de la convergencia uniforme).

4.9. Construyamos una sucesión de polinomios $\{P_n(z)\}$, de grado n, que sean ortogonales y estén normalizados sobre la superficie de un recinto G, es decir, que satisfagan a las condiciones

$$\iint\limits_G P_n(z)\, \overline{P_m(z)}\, dx\, dy = \delta_{nm},$$

donde $\delta_{nm} = 0$, si $n \neq m$ y $\delta_{nn} = 1$ $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$.

Exijamos también, para precisar, que el coeficiente de la potencia superior de z en la expresión de $P_n(z)$ sea un número real positivo. Entonces los polinomios quedarán determinados unívocamente. Así, pues, para $P_0(z)$ obtenemos: $P_0(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{S}}$, donde S es el área del recinto G. Supongamos que ya se han construido los polinomios $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_n(z)$ y que el grado del polinomio $P_j(z)$ es igual a j $(j = 0, \ldots, n)$. Entonces cualquier polinomio $p(z)$ de grado $n+1$ con el coeficiente positivo μ en z^{n+1}, puede escribirse en la forma

$$p(z) = \mu z^{n+1} + \lambda_n P_n(z) + \ldots + \lambda_0 P_0(z).$$

De aquí resulta que

$$\iint\limits_G p(z)\, \overline{P_m(z)}\, dx\, dy = \mu \iint\limits_G z^{n+1}\overline{P_m(z)}\, dx\, dy + \lambda_m,$$

y, por consiguiente, las condiciones $\lambda_m = -\mu \iint_G z^{n+1}\overline{P_m(z)}\,dx\,dy = -\mu c_m$ $(m = 0, \ldots, n)$ son necesarias y suficientes para que sea $\iint_G p(z)\overline{P_m(z)}\,dx\,dy = 0$ $(m = 0, \ldots, n)$.

En estas condiciones $p(z)$ toma la forma $p(z) = \mu[z^{n+1} - c_n P_n(z) - \ldots - c_0 P_0(z)] = \mu q(z)$, donde $q(z) \not\equiv 0$. y los coeficientes del polinomio $q(z)$ no dependen de μ.

Se tiene:

$$\iint_G |p(z)|^2\,dx\,dy = \mu^2 \iint_G |q(z)|^2\,dx\,dy \neq 0,$$

y, por consiguiente, existe un valor de μ (real y positivo), y solamente uno, para el cual

$$\iint_G |p(z)|^2\,dx\,dy = 1$$

De estos razonamientos se deduce que, si los polinomios ortogonales y normalizados $P_0(z), \ldots, P_n(z)$ ya están construidos, entonces existe un polinomio $P_{n+1}(z)$, y solamente uno (con la condición de que el coeficiente superior sea positivo), que forma con ellos un sistema ortogonal y normal. Por lo tanto, queda demostrada la existencia y unicidad del sistema pedido de polinomios.

Observando que cualquier polinomio $\Pi_n(z)$ de grado no superior a n puede expresarse en la forma

$$\Pi_n(z) = c_0 P_0(z) + \ldots + c_n P_n(z),$$

elegiremos los coeficientes c_j $(j = 0, \ldots, n)$ de modo que la integral

$$\iint_G |F(z) - \Pi_n(z)|^2\,dx\,dy,$$

donde $F(z) \in H'_2$, tenga el valor mínimo posible. Un sencillo cálculo nos lleva al siguiente resultado:

$$\iint_G |F(z) - \Pi_n(z)|^2\,dx\,dy =$$

$$= \iint_G \Big[F(z) - \sum_0^n c_j P_j(z)\Big] \cdot \Big[\overline{F(z)} - \sum_0^n \bar{c}_j \overline{P_j(z)}\Big]\,dx\,dy =$$

$$= \iint_G |F(z)|^2\,dx\,dy - \sum_0^n c_j \iint_G \overline{F(z)}\,P_j(z)\,dx\,dy -$$

$$- \sum_0^n \bar{c}_j \iint_G F(z)\,\overline{P_j(z)}\,dx\,dy + \sum_0^n |c_j|^2.$$

Haciendo la notación $a_j = \iint\limits_G F(z)\,\overline{P_j}(z)\,dx\,dy \quad (j=0, 1, 2, \ldots)$, llamaremos a estos números **c o e f i c i e n t e s d e F o u r i e r** de la función $F(z)$ respecto del sistema $\{P_n(z)\}$. Entonces la última relación se escribirá así

$$\iint\limits_G |F(z)-\Pi_n(z)|^2\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_G |F(z)|^2\,dx\,dy - \sum_0^n c_j\bar{a}_j - \sum_0^n \bar{c}_j a_j + \sum_0^n c_j\bar{c}_j =$$

$$= \iint\limits_G |F(z)|^2\,dx\,dy - \sum_0^n |a_j|^2 + \sum_0^n |c_j - a_j|^2 \geqslant 0.$$

De aquí se deduce que el valor mínimo buscado se alcanza solamente para $c_j = a_j$ $(j = 0, \ldots, n)$ y éste es igual a

$$\iint\limits_G |F(z)|^2\,dx\,dy - \sum_0^n |a_j|^2 \geqslant 0.$$

Resumiendo,

$$\iint\limits_G |F(z)-\Pi_n(z)|^2\,dx\,dy \geqslant \iint\limits_G \left|F(z) - \sum_0^n a_j P_j(z)\right|^2 dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_G |F(z)|^2\,dx\,dy - \sum_0^n |a_j|^2 \geqslant 0, \qquad (4.9{:}1)$$

donde a_j son los coeficientes de Fourier de la función $F(z)$.

En virtud del teorema del apartado anterior, para la función $F(z)$ existe una sucesión de polinomios $\{\Pi_n(z)\}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_G |F(z)-\Pi_n(z)|^2\,dx\,dy = 0.$$

Debido a la desigualdad (4.9:1), posee esta misma propiedad la sucesión de polinomios $\{\sum_0^n a_j P_j(z)\}$. En otras palabras, esta sucesión converge en media hacia $F(z)$:

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_G \left|F(z) - \sum_0^n a_j P_j(z)\right|^2 dx\,dy = 0. \qquad (4.9{:}2)$$

De aquí, según el apartado anterior, sacamos la conclusión de que la misma sucesión converge uniformemente hacia $F(z)$ en el interior de G, es decir, para cualquier función $F(z) \in H_2$ se verifica el desarrollo:

$$F(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n P_n(z), \qquad a_n = \iint_G F(z) \overline{P_n(z)}\, dx\, dy. \tag{4.9:3}$$

Este se llama **desarrollo de Fourier de la función** $F(z)$ (según los polinomios ortogonales sobre la superficie $\{P_n(z)\}$).

Comparando (4.9:2) y (4.9:1), obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\iint_G |F(z)|^2 dx\, dy - \sum_{0}^{n} |a_j|^2 \right] = 0,$$

o sea, la serie $\sum_{0}^{\infty} |a_n|^2$ es convergente y

$$\sum_{0}^{\infty} |a_n|^2 = \iint_G |F(z)|^2 dx\, dy. \tag{4.9:4}$$

Esta relación representa la **igualdad de Parseval** para los desarrollos considerados.

Cerciorémonos de que una serie escrita *a priori*

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha_n P_n(z), \tag{4.9:5}$$

para la cual se cumpla la condición

$$\sum_{0}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty, \tag{4.9:6}$$

representa la serie de Fourier de cierta función $\Phi(z) \in H_2'$. En efecto, según el ap. 4.8, de la igualdad

$$\iint_G \left| \sum_{n+1}^{n+p} \alpha_k P_k(z) \right|^2 dx\, dy = \sum_{n+1}^{n+p} |\alpha_n|^2,$$

se deduce que

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} \alpha_k P_k(z_0) \right|^2 < \frac{\sum_{n+1}^{n+p} |\alpha_k|^2}{\pi \rho_0^2},$$

donde ρ_0 es la distancia desde el punto z_0 hasta la frontera del recinto G, y como la serie (4.9:6) es convergente, la serie (4.9:5) será

uniformemente convergente en el interior del recinto G, y, por consiguiente, su suma es una función analítica $\Phi(z)$. Sea $\bar{g}$ un recinto cerrado (un dominio), contenido en el recinto G. En virtud de la convergencia uniforme de la serie (4.9:5), se tiene:

$$\iint_{\bar{g}} |\Phi(z)|^2\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{\bar{g}} \left|\sum_0^n \alpha_k P_k(z)\right|^2 dx\,dy.$$

Pero

$$\iint_{\bar{g}} \left|\sum_0^n \alpha_k P_k(z)\right|^2 dx\,dy \leqslant \iint_G \left|\sum_0^n \alpha_k P_k(z)\right|^2 dx\,dy =$$

$$= \sum_0^n |\alpha_k|^2 \leqslant \sum_0^\infty |\alpha_k|^2,$$

por lo cual

$$\iint_{\bar{g}} |\Phi(z)|^2\,dx\,dy \leqslant \sum_0^\infty |\alpha_k|^2 < \infty,$$

y como $\bar{g}$ es un dominio cualquiera contenido en el recinto G, la integral $\iint_G |\Phi(z)|^2\,dx\,dy$ existe (es convergente), es decir, $\Phi(z)\in H_2'$. Además

$$\iint_G |\Phi(z)|^2\,dx\,dy \leqslant \sum_0^\infty |\alpha_k|^2.$$

Aplicando el resultado obtenido a la serie $\sum_{n+1}^\infty \alpha_k P_k(z) = \Phi(z) - \sum_0^n \alpha_k P_k(z)$, hallaremos que

$$\iint_G \left|\Phi(z) - \sum_0^n \alpha_k P_k(z)\right|^2 dx\,dy \leqslant \sum_{n+1}^\infty |\alpha_k|^2.$$

Por lo tanto, para $n \geqslant m$, donde m es un número entero no negativo:

$$\left|\iint_G \Phi(z)\,\overline{P_m(z)}\,dx\,dy - \alpha_m\right|^2 =$$

$$= \left|\iint \left[\Phi(z) - \sum_0^n \alpha_k P_k(z)\right] \overline{P_m(z)}\,dx\,dy\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \iint_G \left|\Phi(z) - \sum_0^n \alpha_k P_k(z)\right|^2 dx\,dy \iint |\overline{P_m(z)}|^2\,dx\,dy \leqslant \sum_{n+1}^\infty |\alpha_k|^2,$$

y como el primer miembro no depende de n, mientras que el segundo tiende a cero cuando $n \to \infty$, resulta $\alpha_m = \iint_G \Phi(z) \overline{P_m(z)}\, dx\, dy$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, de donde se deduce que la serie (4.8:5) es la serie de Fourier de la función $\Phi(z) \in H_2'$.

De lo demostrado se deduce que el espacio H_2' es completo. Precisando, demostremos que si una sucesión $\{F_n(z)\} \subset H_2'$ satisface al criterio de Cauchy: para cada $\varepsilon > 0$ se tiene $\iint |F_m(z) - F_n(z)|^2\, dx\, dy < \varepsilon^2$ si $m > N(\varepsilon)$ y $n > N(\varepsilon)$, entonces ella converge en media hacia cierta función $F(z) \in H_2'$.

Hagamos

$$F_n(z) = \sum_0^\infty a_k^{(n)} P_k'(z);$$

entonces

$$\iint_G |F_m(z) - F_n(z)|^2\, dx\, dy = \sum_0^\infty |a_k^{(m)} - a_k^{(n)}|^2 < \varepsilon^2$$

para $m > N(\varepsilon)$ y $n > N(\varepsilon)$.

Por consiguiente,

$$|a_k^{(m)} - a_k^{(n)}| < \varepsilon \quad \text{para} \quad m > N(\varepsilon), \qquad n > N(\varepsilon) \text{ y } k \text{ fijo.}$$

De aquí se deduce la existencia de los límites de los coeficientes:

$$\lim_{m\to\infty} a_k^{(m)} = a_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Sea Q un número natural arbitrario. Entonces, de la desigualdad

$$\sum_{k=0}^{Q} |a_k^{(m)} - a_k^{(n)}|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{(m)} - a_k^{(n)}|^2$$

deducimos que

$$\sum_{k=0}^{Q} |a_k^{(m)} - a_k^{(n)}|^2 < \varepsilon^2,$$

o bien, pasando al límite para $m \to \infty$:

$$\sum_{k=0}^{Q} |a_k - a_k^{(n)}|^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{para} \quad n > N(\varepsilon).$$

De aquí que, en primer lugar:

$$\sum_{k=1}^{Q} |a_k|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{Q} (|a_k^{(n)}| + |a_k - a_k^{(n)}|)^2 < 2\sum_0^\infty |a_k^{(n)}|^2 + 2\varepsilon^2,$$

es decir, la serie $\sum_0^\infty |a_h|^2$ es convergente, y, en segundo lugar,

$$\sum_{h=0}^\infty |a_h - a_h^{(n)}|^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{para} \quad n > N(\varepsilon).$$

Por consiguiente, $\sum_0^\infty a_k P_k(z) = F(z) \in H_2'$ y la sucesión $\{F_n(z)\}$ converge en media hacia $F(z)$. Queda demostrado que el espacio H_2' es completo.

Apliquemos los resultados a la construcción de la serie de Fourier para la derivada $f'(z)$ de la función $f(z)$ que transforma conformemente el recinto G en el círculo unidad ($f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$).

Evidentemente, $f'(z) \in H_2'$, puesto que $\iint_G |f'(z)|^2\, dx\, dy = \pi$.

Demostremos que para cualquier función $F(z) \in H_2'$, que satisfaga a la condición $F(z_0) \neq 0$, se cumple la relación

$$\iint_G \left|\frac{F(z)}{F(z_0)}\right|^2 dx\, dy \geqslant \iint_G \left|\frac{f'(z)}{f'(z_0)}\right|^2 dx\, dy = \frac{\pi}{|f'(z_0)|^2}, \qquad (4.9:7)$$

donde vale el signo de igualdad solamente cuando $\frac{F(z)}{F(z_0)} = \frac{f'(z)}{f'(z_0)}$.

En efecto,

$$\iint_G \left|\frac{F(z)}{F(z_0)}\right|^2 dx\, dy = \iint_{|w|<1} \left|\frac{F[f^{-1}(w)]}{F(z_0)}\right|^2 |f^{-1\prime}(w)|^2\, du\, dv;$$

hagamos $\varphi(w) = \frac{F[f^{-1}(w)]}{F(z_0)} f^{-1\prime}(w) = \sum_0^\infty a_n w^n$; entonces hallaremos (véase el cálculo del ap. 4.8):

$$\iint_G \left|\frac{F(z)}{F(z_0)}\right|^2 dx\, dy \geqslant \pi \sum_0^\infty \frac{|a_n|^2}{n+1} \geqslant \pi |a_0|^2. \qquad (4.9:8)$$

Pero $a_0 = \varphi(0) = \frac{F[f^{-1}(0)]}{F(z_0)} f^{-1\prime}(0) = \frac{1}{f'(z_0)}$ (pues $f^{-1}(0) = z_0$), por lo cual

$$\iint_G \left|\frac{F(z)}{F(z_0)}\right|^2 dx\, dy \geqslant \frac{\pi}{|f'(z_0)|^2}.$$

El signo de igualdad supone aquí la igualdad en (4.9:8), es decir, la igualdad

$$\pi |a_0|^2 = \pi \sum_0^\infty \frac{|a_n|^2}{n+1},$$

de donde $a_1 = a_2 = \ldots = 0$ y $\varphi(w) = a_0 = \frac{1}{f'(z_0)}$, es decir, $\frac{F[f^{-1}(w)]}{F(z_0)} = \frac{1}{f^{-1\prime}(w)\cdot f(z_0)}$ y, finalmente, $\frac{F(z)}{F(z_0)} = \frac{f'(z)}{f'(z_0)}$, que es lo que se quería demostrar.

Consideremos el polinomio $K_n(z, z_0) = \sum_0^n P_k(z)\overline{P_k(z_0)}$. Evidentemente, $K_n(z_0, z_0) = \sum_0^\infty |P_n(z_0)|^2 \neq 0$ (puesto que $P_0(z_0) \neq 0$) y, por consiguiente, en virtud de (4.9:7):

$$\int\int_G \left| \frac{K_n(z, z_0)}{K_n(z_0, z_0)} \right|^2 dx\,dy = \frac{\sum_0^n |\overline{P_k(z_0)}|^2}{\left(\sum_0^n |P_k(z_0)|^2\right)^2} = \frac{1}{\sum_0^n |P_k(z_0)|^2} \geqslant \frac{\pi}{|f'(z_0)|^2}.$$

Como la desigualdad hallada se verifica para cualquier n, la serie $\sum_0^\infty |P_k(z_0)|^2$ es convergente y

$$\frac{1}{\sum_0^\infty |P_k(z_0)|^2} \geqslant \frac{\pi}{|f'(z_0)|^2}.$$

De la convergencia de la serie $\sum_0^\infty |\overline{P_k(z_0)}|^2$ se deduce que $\sum_0^\infty \overline{P_k(z_0)}\, P_k(z)$ es la serie de Fourier de cierta función $K(z, z_0) \in H_2'$. Para ella $\int\int_G |K(z, z_0)|^2 dx\,dy = \sum_0^\infty |P_k(z_0)|^2$, de donde

$$\int\int_G \left| \frac{K(z, z_0)}{K(z_0, z_0)} \right|^2 dx\,dy = \frac{1}{\sum_0^\infty |P_k(z_0)|^2} \geqslant \frac{\pi}{|f'(z_0)|^2}. \qquad (4.9:9)$$

Sea $\sum_0^\infty c_k P_k(z)$ la serie de Fourier de $f'(z)$. Entonces

$$\frac{\pi}{|f'(z_0)|^2} = \int\int \left| \frac{f'(z)}{f'(z_0)} \right|^2 dx\,dy = \frac{\sum_0^\infty |c_k|^2}{\left|\sum_0^\infty c_k P_k(z_0)\right|^2}$$

y como $\left|\sum_{0}^{\infty} c_k P_k(z_0)\right|^2 \leqslant \sum_{0}^{\infty} |c_k|^2 \cdot \sum_{0}^{\infty} |P_k(z_0)|^2$, resulta

$$\frac{\pi}{|f'(z_0)|^2} = \frac{\sum_{0}^{\infty} |c_k|^2}{\left|\sum_{0}^{\infty} c_k P_k(z_0)\right|^2} \geqslant \frac{1}{\sum_{0}^{\infty} |P_k(z_0)|^2}. \qquad (4.9:10)$$

Comparando (4.9:9) y (4.9:10), sacamos la conclusión de que $\frac{\pi}{|f'(z_0)|^2} = \frac{1}{\sum_{0}^{\infty} |P_k(z_0)|^2}$, es decir,

$$f'(z_0) = \sqrt{+\pi \sum_{0}^{\infty} |P_k(z_0)|^2}, \qquad (4.9:11)$$

y luego de que, para la función $F(z) = K(z, z_0)$, en la relación (4.9:7) se alcanza la igualdad.

Por lo tanto, $\frac{K(z, z_0)}{K(z_0, z_0)} = \frac{f'(z)}{f'(z_0)}$, es decir,

$$f'(z) = \frac{f'(z_0)}{K(z_0, z_0)} K(z, z_0) = \sqrt{\frac{\pi}{\sum_{0}^{\infty} |P_k(z_0)|^2}} \sum_{0}^{\infty} \overline{P_k(z_0)} P_k(z) \qquad (4.9:12)$$

Esta es la fórmula buscada, que permite hallar $f'(z)$ y, por consiguiente, también la función $f(z)$ que transforma conformemente el recinto dado en un círculo. El desarrollo de la última función en una serie uniformemente convergente de polinomios (que, por cierto, no son ortogonales) resulta de la forma:

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz = \sqrt{\frac{\pi}{\sum_{0}^{\infty} |P_k(z_0)|^2}} \sum_{0}^{\infty} \overline{P_k(z_0)} \int_{z_0}^{z} P_k(z)\,dz. \qquad (4.9:13)$$

Para la función $\frac{f(z)}{f'(z_0)}$ la derivada en el punto z_0 es igual a 1, por lo cual, $w = \frac{f(z)}{f'(z_0)}$ transforma conformemente el recinto G en un círculo cuyo radio $R_{z_0} = \frac{1}{f'(z_0)}$ es el radio conforme del recinto

respecto del punto z_0 (véase el ap. 2.2). De la fórmula (4.9:11) obtenemos:

$$R_{z0}=\frac{1}{\sqrt{\pi\sum_{0}^{\infty}|P_k(z_0)|^2}}. \qquad (4.9:14)$$

Finalmente, obsérvese que para el caso de un recinto limitado por una curva cerrada rectificable de Jordan Γ, se pueden construir unos polinomios $\{p_n(z)\}$, ortogonales y normalizados en el contorno: $\int_\Gamma p_n(z)\cdot\overline{p_m(z)}\,dz=\delta_{nm}$, y estudiar los desarrollos en serie de estos polinomios. La teoría correspondiente ha sido desarrollada en las obras de V. I. Smirnov, M. V. Kéldish, M. A. Lavréntiev y P. P. Korovkin.

CAPITULO

SEXTO

FUNCIONES ARMONICAS Y SUBARMONICAS. EL SIGNIFICADO DE LAS FUNCIONES ANALITICAS EN LA HIDROMECANICA. FUNCIONES DE FORMA ACOTADA

§ 1. FUNCIONES ARMONICAS. EL PROBLEMA DE DIRICHLET Y LA FUNCION DE GREEN PARA UN RECINTO SIMPLEMENTE CONEXO

1.1. Sea $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ una función analítica en cierto recinto. Como ella es diferenciable en este recinto, también $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ son funciones diferenciables de dos variables reales y satisfacen a las ecuaciones diferenciales de D'Alembert-Euler

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

La derivada $\frac{df}{dz}$ de una función analítica es una función analítica que puede expresarse en la forma

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Por consiguiente, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ y $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ también son funciones de dos variables reales diferenciables en el recinto y satisfacen a las ecuaciones de D'Alembert-Euler. Escribiendo la primera ecuación de D'Alembert-Euler para el par de funciones $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $-\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ y la segunda ecuación para el par $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ obtendremos:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)}{\partial y} = -\frac{\partial\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)}{\partial x},$$

de donde

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0.$$

Obsérvese que todas las derivadas de segundo orden de las funciones $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ son continuas en el recinto. Esto es debido a que la derivada segunda $\frac{d^2 f(z)}{dz^2}$ de una función analítica $f(z)$ es también una función analítica y puede expresarse en una de las formas siguientes:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - i\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} - i\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y}.$$

La ecuación deferencial en derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se llama ecuación de Laplace, y las funciones que poseen derivadas parciales continuas de primero y segundo órdenes en un recinto y son soluciones de dicha ecuación, se llaman funciones armónicas en este recinto.

Dos funciones armónicas en un recinto, que están ligadas por las ecuaciones de D'Alembert-Euler se llaman funciones armónicas conjugadas. Aplicando esta terminología, se puede afirmar que *las partes real e imaginaria de una función analítica en un recinto, son funciones armónicas conjugadas en este recinto.*

Supongamos que $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ son dos funciones armónicas conjugadas cualesquiera en un recinto G. Como ellas satisfacen a las ecuaciones de D'Alembert-Euler y son diferenciables en el recinto, resulta que la función de variable compleja $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ es diferenciable y, por consiguiente, analítica, en el mismo recinto. Confrontando los dos resultados obtenidos llegamos al teorema:

Para que una función $f(z)$ sea analítica en un recinto, es necesario y suficiente que sus partes real e imaginaria sean funciones armónicas conjugadas en este recinto.

Aclaremos con ejemplos la relación entre las funciones analíticas y armónicas.

1) La función $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ es analítica en todo el plano. Por esta razón, sus partes real e imaginaria $\varphi(x, y) = e^x \cos y$ y $\psi(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$ son funciones armónicas en todo el plano. El lector puede comprobar fácilmente mediante un cálculo que estas funciones satisfacen a la ecuación de Laplace.

2) La función $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ es analítica y multiforme en el recinto cuya frontera es el origen de coordenadas. Por consiguiente, $\ln|z|$ y $\operatorname{Arg} z$ son funciones armónicas en este recinto (la primera de ellas es uniforme, la segunda es multiforme). La primera puede escirbirse en la forma $\ln\sqrt{x^2+y^2}$; para la segunda, en el recinto cuya frontera es la semirrecta $y = 0$, $x \leqslant 0$, se tiene un

conjunto infinito de ramas uniformes armónicas: $\arg z + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Resulta un ejemplo más general al considerar la función analítica $\operatorname{Ln} \frac{z-z_1}{z-z_2}$, donde z_1 y z_2 son dos puntos distintos del plano complejo. Como

$$\operatorname{Ln} \frac{z-z_1}{z-z_2} = \ln \frac{|z-z_1|}{|z-z_2|} + i \operatorname{Arg} \frac{z-z_1}{z-z_2},$$

obtenemos dos funciones armónicas: la función uniforme $\ln \left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right|$ y la función multiforme $\operatorname{Arg} \frac{z-z_1}{z-z^2}$. Cada una de ellas es armónica en el recinto que resulta al excluir del plano los puntos z_1 y z_2. Poseen el sencillo significado geométrico: la primera representa el logaritmo de la razón de las distancias del punto z hasta dos puntos fijos z_1 y z_2, la segunda proporciona la magnitud del ángulo bajo el cual se ve el segmento $[z_1, z_2]$ desde el punto z.

3) Sea $f(z)$ una función uniforme y analítica en un anillo $r < |z-a| < R$. Entonces en este anillo se verifica el desarrollo de Laurent $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n (z-a)^n$, y separando en esta serie las partes real e imaginaria obtenemos dos funciones armónicas en el anillo. Haciendo $A_n = \rho_n e^{i\alpha_n}$ y $z - a = re^{i\varphi}$, tendremos:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \rho_n r^n e^{i(n\varphi+\alpha_n)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \rho_n r^n [\cos(n\varphi + \alpha_n) + i \operatorname{sen}(n\varphi + \alpha_n)],$$

de donde

$$\operatorname{Re}[f(z)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \rho_n r^n \cos(n\varphi + \alpha_n)$$

y

$$\operatorname{Im}[f(z)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \rho_n r^n \operatorname{sen}(n\varphi + \alpha_n).$$

Hemos obtenido las expresiones en coordenadas polares r y φ de estas funciones, que son armónicas respecto de las coordenadas cartesianas x e y. Al pasar a las coordenadas cartesianas cada término de la serie adquiere una forma más complicada (precisamente, se expresa en forma de un polinomio homogéneo respecto de x e y; éste es un **polinomio armónico de grado** n).

4) A continuación desempeñarán un papel importante las partes real e imaginaria de la función $f(z) = \frac{\rho e^{i\alpha} + (z-z_0)}{\rho e^{i\alpha} - (z-z_0)}$, la cual es analítica en el círculo $|z - z_0| < \rho$. Haciendo $z = z_0 + re^{i\theta}$ y designando con $u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$ las partes real e imaginaria de

la función $f(z)$, obtenemos:

$$u(r, \theta)+iv(r, \theta)=\frac{\rho e^{i\alpha}+re^{i\theta}}{\rho e^{i\alpha}-re^{i\theta}}=\frac{(\rho e^{i\alpha}+re^{i\theta})(\rho e^{-i\alpha}-re^{-i\theta})}{(\rho e^{i\alpha}-re^{i\theta})(\rho e^{-i\alpha}-re^{-i\theta})}=$$

$$=\frac{\rho^2-r^2+i2r\rho\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)},$$

de donde

$$u(r, \theta)=\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)}, \quad v(r, \theta)=\frac{2r\rho\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)}.$$

Han resultado dos funciones uniformes, las cuales son armónicas conjugadas en el círculo $|z-z_0|<\rho$. El denominador de las fracciones que representan estas funciones, igual a

$$(\rho e^{i\alpha}-re^{i\theta})(\rho e^{-i\alpha}-re^{-i\theta})=|\rho e^{i\alpha}-re^{i\theta}|^2=|\rho e^{i\alpha}-(z-z_0)|^2,$$

representa el cuadrado de la distancia entre el punto z y el punto $\rho e^{i\alpha}+z_0$, situado en la circunferencia $|z-z_0|=\rho$.

¿Se puede considerar cada función armónica en un recinto $\varphi(x, y)$ como la parte real (o imaginaria) de una función analítica en el recinto? Responder a esta pregunta afirmativamente significa lo siguiente: dada la función $\varphi(x, y)$, hay que hallar otra función $\psi(x, y)$, armónica en el recinto, que sea conjugada con la primera, es decir, hay que resolver las ecuaciones:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

respecto de la función $\psi(x, y)$. Escribamos estas ecuaciones del modo siguiente: $\frac{\partial\psi}{\partial x}=P(x, y)$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}=Q(x, y)$, donde $P(x, y)=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ y $Q(x, y)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ son unas funciones dadas y diferenciables (y, por consiguiente, continuas) en el recinto. La ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

a la cual satisface la función $\varphi(x, y)$, puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Como $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ son funciones continuas (como derivadas de segundo orden de la función armónica $\varphi(x, y)$), la expresión $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ es la diferencial total de la integral curvilínea

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy,$$

tomada sobre cualquier curva que una los puntos (x_0, y_0) y (x, y) por el interior del recinto dado, la cual representa una función de x e y. Designando esta función mediante $\psi_0(x, y)$, tendremos:

$$d\psi_0(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

es decir, $\psi_0(x, y)$ posee derivadas parciales continuas: $\frac{\partial\psi_0}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial\psi_0}{\partial y} = Q(x, y)$. Comparando estas ecuaciones con las ecuaciones $\frac{\partial\psi}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial\psi}{\partial y} = Q(x, y)$, propuestas para resolver, hallamos la expresión general para las funciones $\psi(x, y)$ en la forma:

$$\psi(x, y) = \psi_0(x, y) + C = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy + C.$$

Está claro que esta función es armónica y conjugada con $\varphi(x, y)$. En efecto, las partes real e imaginaria de la función de variable compleja $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ poseen derivadas parciales continuas de primer orden, las cuales están ligadas por las relaciones:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = P(x, y) = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = Q(x, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Por ello, $f(z)$ es una función diferenciable y, por consiguiente, analítica en el recinto. De aquí se deduce que las funciones $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ son armónicas conjugadas.

Resumiendo, *dada una función $\varphi(x, y)$ armónica en un recinto, se puede hallar un conjunto infinito de funciones analíticas en el recinto, cuyas partes reales coinciden con $\varphi(x, y)$*. Todas estas funciones están contenidas en la fórmula

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \varphi(x, y) + i\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy + iC$$

y, por lo tanto, se diferencian entre sí en una constante imaginaria pura iC.

Obsérvese que si el recinto dado es simplemente conexo, entonces la integral

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dy,$$

siendo la integral de una diferencial total, representa una función uniforme en este recinto. Por esta razón, también la función $f(z)$, para cuya construcción fue dada su parte real $\varphi(x, y)$, es una fun-

ción uniforme en el recinto G. Si el recinto G es múltiplemente conexo, la integral indicada, por lo general, puede tomar diferentes valores para distintos caminos de integración que unan los puntos (x_0, y_0) y (x, y) (resultarán valores iguales para los caminos que pertenezcan a un mismo subrecinto simplemente conexo del recinto G). Por lo tanto, también la función analítica $f(z)$, para cuya construcción fue dada su parte real uniforme $\varphi(x, y)$, será, por lo general, multiforme. Pero su derivada $f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ es necesariamente uniforme, de donde se deduce que las diferentes ramas uniformes de la función $f(z)$ que se pueden obtener en un subrecinto arbitrario simplemente conexo del recinto G, poseen una misma derivada y, por consiguiente, se diferencian entre sí solamente en sumandos constantes.

1.2. Utilizando la relación entre las funciones armónicas y las analíticas, se pueden deducir las propiedades fundamentales de las funciones armónicas partiendo de las propiedades ya conocidas de las funciones analíticas.

Sea $u(x, y)$ una función uniforme que es armónica en cierto círculo K: $|z - z_0| < R$. Entonces, según el ap. 1.1, en el círculo K existe una función uniforme armónica $v(x, y)$ conjugada con $u(x, y)$. Formemos la función analítica correspondiente $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y desarrollémosla en serie de potencias de $z - z_0$. Obtendremos:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n)(z - z_0)^n, \tag{1.2:1}$$

donde α_n y β_n son números reales. Introduzcamos las coordenadas polares r y θ con el polo en el punto z_0, de modo que $z = z_0 + re^{i\theta}$, y empleemos para $u(x, y)$ y $v(x, y)$ las notaciones $u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$ como equivalentes a $u(x, y)$ y $v(x, y)$. Separando en (1.2:1) las partes real e imaginaria, obtenemos las series:

$$u(r, \theta) = \alpha_0 + \sum_1^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \operatorname{sen} n\theta) r^n, \tag{1.2:2}$$

$$v(r, \theta) = \beta_0 + \sum_1^{\infty} (\beta_n \cos n\theta + \alpha_n \operatorname{sen} n\theta) r^n, \tag{1.2:3}$$

las cuales son uniformemente convergentes en el interior de K.

Por lo tanto, *toda función $u(r, \theta)$, armónica en el interior del círculo $|z - z_0| < R$, admite en el mismo un desarrollo de la forma* (1.2:2), *el cual es uniformemente convergente en el interior de este círculo*. Los coeficientes de la serie son los números α_n y $-\beta_n$. Como la serie de potencias (1.2:1) es convergente en el círculo dado y, posiblemente, tiene un radio de convergencia mayor que R, estos

números tienen que satisfacer a la desigualdad:

$$R \leqslant \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\alpha_n + i\beta_n|}}.$$

Está claro que si α_n y β_n son unos números dados *a priori* que satisfacen a la última desigualdad, entonces la serie (1.2:2) determina una función armónica en el interior del círculo K. Para cerciorarse de esto es suficiente observar que, cumpliéndose la desigualdad indicada, la serie de potencias (1.2:1) es convergente en el círculo K y, por consiguiente, representa en el mismo una función analítica, cuya parte real se representa por la serie dada (1.2:2). En resumen, *la existencia de un desarrollo de la forma* (1.2:2) *o* (1.2:3) *con la desigualdad correspondiente que se impone a los coeficientes de la serie, es el síntoma característico de las funciones armónicas en el interior del círculo dado.* Esta observación se utilizará en el ap. 1.5.

Apliquemos los desarrollos (1.2:2) y (1.2:3) a las funciones armónicas del ejemplo 4 del ap. 1.1. Como para la función $f(z) = \frac{\rho e^{i\alpha} + (z-z_0)}{\rho e^{i\alpha} - (z-z_0)}$ el desarrollo en el círculo $|z - z_0| < \rho$ tiene la forma siguiente:

$$\frac{\rho e^{i\alpha} + (z-z_0)}{\rho e^{i\alpha} - (z-z_0)} = -1 + \frac{2\rho e^{i\alpha}}{\rho e^{i\alpha} (z-z_0)} =$$

$$= -1 + 2\left[1 + \frac{z-z_0}{\rho e^{i\alpha}} + \frac{(z-z_0)^2}{\rho^2 e^{2i\alpha}} + \ldots\right] = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{\rho^n} e^{-in\alpha},$$

se tiene:

$$\operatorname{Re}[f(z)] = \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta-\alpha)} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos n(\theta-\alpha), \tag{1.2:4}$$

$$\operatorname{Im}[f(z)] = \frac{2r\rho \operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta-\alpha)} = 2\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \operatorname{sen} n(\theta-\alpha), \tag{1.2:5}$$

y ambas series son uniformemente convergentes en el interior del círculo $|z - z_0| < \rho$.

Volviendo a las series (1.2:2) y (1.2:3), sustituyamos en la primera de ellas r por un ρ arbitrario ($\rho < R$) y θ por α, multipliquemos después ambos miembros por $\cos m\alpha$ e integremos (para un valor fijo de ρ) respecto de α entre los límites 0 y 2π. Resulta:

$$\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha) \cos m\alpha \, d\alpha = \alpha_m \rho^m \int_0^{2\pi} \cos^2 m\alpha \, d\alpha,$$

de donde

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha)\, d\alpha, \quad \alpha_m = \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha) \cos m\alpha\, d\alpha \qquad (m \geqslant 1). \tag{1.2:6}$$

Análogamente, multiplicando por sen $m\alpha$ e integrando entre los mismos límites, hallaremos:

$$-\beta_m = \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha) \operatorname{sen} m\alpha\, d\alpha \qquad (m \geqslant 1). \tag{1.2:7}$$

Poniendo las expresiones halladas para α_n y β_n en las series (1.2:2) y (1.2:3), tendremos:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha)\, d\alpha + \sum_1^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha) \cos m(\theta - \alpha)\, d\alpha \left(\frac{r}{\rho}\right)^m,$$

$$v(r, \theta) = \beta_0 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha) \operatorname{sen} m(\theta - \alpha)\, d\alpha \left(\frac{r}{\rho}\right)^m.$$

Supongamos que ρ satisface a la condición $r < \rho < R$. Evidentemente, las últimas fórmulas pueden obtenerse de las fórmulas (1.2:4) y (1.2:5) multiplicando por $\frac{1}{2\pi} u(\rho, \alpha)$ e integrando término a término respecto de α entre los límites 0 y 2π (siendo r y ρ fijos). Todas estas operaciones son legítimas en virtud de la convergencia uniforme de las series (1.2:4) y (1.2:5) en el interior del círculo $|z - z_0| < \rho$.

Así, pues, obtenemos:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha) \left[1 + 2\sum_1^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos n(\theta - \alpha)\right] d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \alpha)}\, d\alpha, \tag{1.2:8}$$

$$v(r, \theta) = \beta_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha) \left[2\sum_1^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \operatorname{sen} n(\theta - \alpha)\right] d\alpha =$$

$$= \beta_0 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha) \frac{2r\rho \operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \alpha)}\, d\alpha. \tag{1.2:9}$$

Hemos hallado para la función $u(r, \theta)$ y para la conjugada de ésta $v(r, \theta)$ las expresiones integrales mediante los valores de $u(\rho, \theta)$ en los puntos de la circunferencia $|z - z_0| = \rho < R$.

La diferencia de la forma de las integrales en las fórmulas (1.2:8) y (1.2:9) se explica en que, en la segunda de ellas, la función armónica $v(r, \theta)$ no se expresa mediante sus valores propios en la circunferencia $|z - z_0| = \rho$, sino que se expresa mediante los valores de la función conjugada. No obstante, la fórmula (1.2:8), habiéndose establecido para cualquier función armónica en el círculo dado, es válida también para $v(x, y)$. Por esta razón, para $v(r, \theta)$ se tiene una fórmula análoga a la obtenida para $u(r, \theta)$:

$$v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\rho, \alpha) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \alpha)} d\alpha. \qquad (1.2:10)$$

La integral que figura en el segundo miembro de la fórmula (1.2:8) ó (1.2:10), se llama **integral de Poisson** correspondiente a la función $u(\rho, \alpha)$ o $v(\rho, \alpha)$, y la función armónica

$$\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \alpha)} = \operatorname{Re}\left[\frac{\rho e^{i\alpha} + (z - z_0)}{\rho e^{i\alpha} - (z - z_0)}\right]$$

se llama **núcleo de la integral de Poisson**.

Haciendo en la fórmula (1.2:8) $u(r, \theta) \equiv 1$, obtenemos:

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \alpha)} d\alpha, \qquad (1.2:11)$$

fórmula que se empleará a continuación.

En general, si $\varphi(\alpha)$ es una función real, definida y continua en el segmento $[0, 2\pi]$, llamaremos integral de Poisson a la expresión de la forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \alpha)} d\alpha, \qquad (1.2:12)$$

sin exigir que la función $\varphi(\alpha)$ coincida con los valores de alguna función armónica $u(\rho, \alpha)$. En el ap. 1.5 se demostrará que (1.2:12) representa una función armónica en el círculo $|z - z_0| < \rho$, la cual tiende al límite $\varphi(\alpha)$ cuando el punto (r, θ) se aproxima a algún punto (ρ, α).

La integral de Poisson es análoga a la integral de Cauchy extendida sobre la circunferencia y puede ser obtenida de la última integral mediante unas transformaciones. Con este fin, junto con la

fórmula de Cauchy

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \qquad (1.2{:}13)$$

donde el punto z está situado en el interior de la circunferencia $|\zeta - z_0| = \rho$, consideremos la integral de Cauchy que se obtiene al sustituir z por el punto $z^* = z_0 + \frac{\rho^2}{\bar z - \bar z_0}$ que es simétrico a z respecto de la circunferencia $|\zeta - z_0| = \rho$. Como el punto z^* está situado fuera de la última circunferencia, esta integral tiene que ser igual a cero:

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z^*}\,d\zeta. \qquad (1.2{:}13')$$

Restemos miembro a miembro (1.2:13') de (1.2:13) y transformemos el resultado teniendo en cuenta que

$$\zeta-z=\zeta-z_0-(z-z_0)=\rho e^{i\alpha}-re^{i\theta},$$

$$\zeta-z^*=\zeta-z_0-(z^*-z_0)=\rho e^{i\alpha}-\frac{\rho^2}{r}e^{i\theta}$$

y $d\zeta = i\rho e^{i\alpha}\,d\alpha$. Resulta:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-z_0|=\rho}f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z^*}\right)d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\zeta)\left[\frac{\rho}{\rho-re^{i(\theta-\alpha)}}+\frac{re^{i(\alpha-\theta)}}{\rho-re^{i(\alpha-\theta)}}\right]d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\zeta)\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha. \qquad (1.2{:}14)$$

Hemos obtenido la fórmula integral de Poisson para la función analítica $f(z)$.

Sustituyendo aquí $f(z)$ por $u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, y $f(\zeta)$ por $u(\rho, \alpha) + iv(\rho, \alpha)$ y separando las partes real o imaginaria, obtenemos de nuevo las fórmulas (1.2:8) y (1.2:10).

De las fórmulas (1.2:8) y (1.2:9) se deduce fácilmente una fórmula importante que expresa la función analítica $f(z)$ mediante los valores de su parte real en la circunferencia. Precisando, multiplicando (1.2:9) por i y sumando con (1.2:8), obtenemos:

$$f(z)=i\beta_0+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)\left[\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)}+\right.$$

$$\left.+i\,\frac{2r\rho\,\mathrm{sen}(\theta-\alpha)}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)}\right]d\alpha.$$

Pero la expresión que figura entre corchetes representa la función analítica de z:

$$\frac{\rho e^{i\alpha}+(z-z_0)}{\rho e^{i\alpha}-(z-z_0)}.$$

Por esta razón,

$$f(z)=i\beta_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\ \alpha)\,\frac{\rho e^{i\alpha}+(z-z_0)}{\rho e^{i\alpha}-(z-z_0)}\,d\alpha. \qquad (1.2:15)$$

Aquí $i\beta_0$ es una constante imaginaria pura, la cual representa la parte imaginaria de $f(z_0)$; claro, esta constante no puede determinarse por la parte real de la función $f(z)$. La fórmula (1.2:15) se llama fórmula de Schwarz.

De la fórmula (1.2:8) obtenemos para $r=0$, o sea, para el centro del círculo K:

$$u(x_0,\ y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\ \alpha)\,d\alpha,$$

donde, como se ha convenido, $u(\rho,\ \alpha)$ denota los valores de la función $u(x,\ y)$ en los puntos de la circunferencia $|z-z_0|=\rho$ con el centro en $z_0=x_0+iy_0$. Escribiendo más detalladamente, tendremos:

$$u(x_0,\ y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+\rho\cos\alpha,\ y_0+\rho\operatorname{sen}\alpha)\,d\alpha. \qquad (1.2:16)$$

Así, pues, *el valor de una función armónica en el centro de una circunferencia es igual a la media aritmética de sus valores en la circunferencia con el centro en este punto.* En el ap. 3.1 se demostrará que esta última propiedad es característica para las funciones armónicas. Más exactamente, se verifica la siguiente proposición:

Sea $u(x,\ y)$ una función real, uniforme y continua en un recinto G. Si para cada punto $z_0=x_0+iy_0\in G$ existe un entorno $|z-z_0|<\delta(z_0)$, en el cual $u(x_0,\ y_0)$ es igual a la media aritmética de sus valores tomados sobre cualquier circunferencia $|z-z_0|=\rho$, $0<\rho<\delta(z_0)$, entonces $u(x,\ y)$ es una función armónica en el recinto G.

1.3. Examinemos los puntos singulares aislados de una función uniforme armónica. Sea z_0 un punto de éstos; sin restringir generalidad, supongamos que $z_0=0$ (siempre se puede pasar a este caso mediante la sustitución $z=z'+z_0$). Sea $u(x,\ y)=u(r,\ \theta)$ una función uniforme armónica en el recinto $0<|z|<\rho$. Designando con $v(x,\ y)$ la función conjugada con ella, construyamos la función analítica $f(z)=u+iv$. Esta, por lo general, será multiforme (pues

la función $v(x, y)$ también lo es). Pero la derivada $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$, evidentemente, es una función analítica uniforme y, por consiguiente, admite un desarrollo en serie de Laurent: $f'(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n z^n$, de donde

$$f(z) = A + A_{-1} \operatorname{Ln} z + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{A_n z^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$$

y, por consiguiente,

$$u(r, \theta) = \operatorname{Re}[f(z)] =$$

$$= \alpha + \alpha_{-1} \ln r - \beta_{-1}\theta + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\alpha_n}{n+1} \cos(n+1)\theta - \right.$$

$$\left. - \frac{\beta_n}{n+1} \operatorname{sen}(n+1)\theta \right] r^{n+1},$$

donde $n \neq -1$.

Esta no puede ser una función uniforme del punto si $\beta_{-1} \neq 0$; por ello $\beta_{-1} = 0$, y, cambiando las notaciones de los coeficientes y del índice de sumación, obtenemos definitivamente:

$$u(r, \theta) = a \ln r + \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) r^n, \qquad (1.3:1)$$

es decir, $u(r, \theta)$ es la parte real de la función analítica

$$a \operatorname{Ln} z + \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_n - ib_n) z^n = a \operatorname{Ln} z + \varphi(z)$$

(a es un número real).

Si el punto $z = 0$ es singular para $u(r, \theta)$, tiene que ser también singular para $a \operatorname{Ln} z + \varphi(z)$; por esta razón, o $\varphi(z)$ tiene un punto singular en el origen de coordenadas (un polo o un punto singular esencial), o bien $\varphi(z)$ es regular en este punto, y entonces, necesariamente, $a \neq 0$.

Examinemos estos casos:

1) $z = 0$ es un punto singular de la función $\varphi(z)$, es decir, al menos uno de los coeficientes $a_{-1}, b_{-1}, \ldots, a_{-n}, b_{-n}, \ldots$ es diferente de cero. Supongamos, para precisar, que $a_{-m} \neq 0$ ($m \geqslant 1$), y demostremos que $u(x, y)$ toma todos los valores reales en cualquier entorno $|z| < \varepsilon$ del origen de coordenadas. Como la función real $u(x, y)$ es continua para $0 < |z| < \varepsilon$ y, por consiguiente, no puede pasar de un valor a otro sin pasar por todos los intermedios, es suficiente demostrar que $u(x, y)$ toma valores positivos y nega-

tivos arbitrariamente grandes en valor absoluto. Supongamos que esto no es cierto; entonces $u(r, \theta)$ no toma, por ejemplo, valores positivos arbitrariamente grandes, es decir, está acotada superiormente:

$$u(x, y) < C$$

(si está acotada inferiormente, entonces se considera la función $-u(x, y)$).

Multiplicando ambos miembros de la fórmula (1.3:1) por $\cos m\theta$ e integrando entre los límites 0 y 2π, hallaremos:

$$\int_0^{2\pi} u(r, \theta) \cos m\theta \, d\theta = \pi (a_m r^m + a_{-m} r^{-m}). \qquad (1.3:2)$$

Además, de (1.3:1) obtenemos:

$$\int_0^{2\pi} u(r, \theta) \, d\theta = 2\pi (\alpha_0 + \ln r), \qquad (1.3:3)$$

y, por consiguiente,

$$\pi [2(a_0 + a \ln r) \pm (a_m r^m + a_{-m} r^{-m})] =$$

$$= \int_0^{2\pi} u(r, \theta)(1 \pm \cos m\theta) \, d\theta < 2\pi C.$$

Elijamos aquí el signo $\pm$ de modo que sea $\pm a_{-m} = |a_{-m}|$; entonces tendremos:

$$(|a_{-m}| r^{-m} + 2a \ln r) + 2a_0 \pm a_m r^m < 2C$$

para todos los valores de r, $0 < r < \varepsilon$, lo cual, evidentemente, es imposible, puesto que $|a_{-m}| r^{-m} + 2a \ln r \to +\infty$, si $r \to 0$.

2) $z = 0$ es un punto regular de la función $\varphi(z)$. En este caso el desarrollo de la función $u(r, \theta)$ es de la forma

$$u(r, \theta) = a \ln r + \sum_0^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} d\theta) r^n, \qquad (1.3:4)$$

de modo que la diferencia $u(r, \theta) - a \ln r$ es una función armónica en un entorno del punto $z = 0$ (incluyendo este punto). Del último desarrollo se deduce que $u(r, \theta) \to \infty$ para $r \to 0$, precisamente tiende hacia $+\infty$ si $a < 0$, y hacia $-\infty$ si $a > 0$. En este caso, el punto $z = 0$ se llama polo logarítmico de la función armónica y el término $a \ln r$ se llama parte principal de la función $u(r, \theta)$ en el entorno del polo logarítmico.

Los resultados del examen realizado se pueden expresar mediante la siguiente proposición.

T e o r e m a. *Una función uniforme y armónica* $u(x, y) = u(r, \theta)$ *cuando* $z = re^{i\theta}$ *tiende hacia el punto singular aislado* $z = 0$, *o tiende hacia el infinito con un signo determinado y entonces admite un desarrollo de la forma*

$$u(r, \theta) = a \ln r + \sum_{0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) r^n, \qquad (a \neq 0),$$

o bien, toma todos los valores reales en cualquier entorno de este punto y entonces toma la forma

$$u(r, \theta) = a \ln r + \sum_{-\infty}^{+\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) r^n,$$

donde al menos uno de los coeficientes $a_{-1}, b_{-1}, \ldots, a_{-n}, b_{-n}, \ldots$ es diferente de cero.

C o r o l a r i o. *Si una función uniforme* $u(r, \theta)$ *es armónica en el recinto* $0 < r < \rho$ *y está acotada en valor absoluto en un entorno del punto* $z = 0$, *entonces esta función admite un desarrollo de la forma*

$$u(r, \theta) = \sum_{0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) r^n,$$

es decir, $z = 0$ *no es un punto singular de* $u(r, \theta)$.

1.4. Aplicando las fórmulas que se establecieron en el ap. 1.2, se pueden demostrar unos cuantos teoremas generales relativos a la convergencia uniforme de las sucesiones de funciones armónicas.

Demostremos que, *si para una sucesión* $\{f_n(z)\}$ *de funciones analíticas en un recinto* G, *la sucesión de sus partes reales* $\{u_n(x, y)\}$ *es uniformemente convergente en el interior de* G *y, además, es convergente la sucesión de los valores de las funciones en algún punto cualquiera* $z_0 \in G$, *entonces* $\{f_n(z)\}$ *es uniformemente convergente en el interior de* G.

Demostremos primero la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n(z)\}$ en el interior del círculo $|z - z_0| < d(z_0)$, cuyo radio es igual a la distancia desde z_0 hasta la frontera del recinto G. Con este fin, expresemos $f_n(z)$ mediante $u_n(x, y)$ según la fórmula (1.2:15); obtendremos:

$$f_n(z) = i\beta_0^{(n)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(\rho, \alpha) \frac{\rho e^{i\alpha} + (z - z_0)}{\rho e^{i\alpha} - (z - z_0)} \, d\alpha.$$

Fijando r, $0 < r < d(z_0)$ y eligiendo ρ de modo que se cumpla la desigualdad $r < \rho < d(z_0)$, hallaremos que para todos los puntos z

pertenecientes al círculo $|z-z_0| \leqslant r$ y para cualesquiera n y p:

$$|f_{n+p}(z)-f_n(z)| =$$

$$= \left| i\left(\beta_0^{(n+p)}-\beta_0^{(n)}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[u_{n+p}(\rho,\alpha)-\right.\right.$$

$$\left.\left. -u_n(\rho,\alpha)\right]\frac{\rho e^{i\alpha}+(z-z_0)}{\rho e^{i\alpha}-(z-z_0)}\,d\alpha\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\beta_0^{(n+p)}-\beta_0^{(n)}\right|+\max_{0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi}|u_{n+p}(\rho,\alpha)-u_n(\rho,\alpha)|\,\frac{\rho+r}{\rho-r}\,.$$

Como $\beta_0^{(n)}=\operatorname{Im}[f_n(z_0)]$ y la sucesión $\{f_n(z_0)\}$ es convergente, y, además, la sucesión $\{u_n(x,y)\}$ es uniformemente convergente en la circunferencia $|z-z_0|=\rho$, para cualquier $\varepsilon>0$, para todos los valores de n suficientemente grandes y para cualesquiera p naturales, tendremos:

$$|f_{n+p}(z)-f_n(z)|<\varepsilon,\quad |z-z_0|\leqslant r<d(z_0),$$

de donde se deduce la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n(z)\}$ en el interior del círculo $d(z_0)$.

Queda establecido que, en las condiciones del teorema en cuestión, de la convergencia de la sucesión $\{f_n(z)\}$ en un punto cualquiera del recinto se deduce la convergencia en un círculo con el centro en este punto, de radio igual a la distancia desde este punto hasta la frontera del recinto. Por consiguiente, el conjunto E de todos los puntos de convergencia de la sucesión $\{f_n(z)\}$ en el recinto G posee las siguientes propiedades: éste no es vacío, y si algún punto z pertenece al mismo, entonces también pertenecen a éste todos los puntos del círculo con el centro en z, de radio igual a la distancia desde z hasta la frontera del recinto G. Pero, entonces, en virtud del lema c) del ap. 4.5 del capítulo primero, este conjunto coincide con todo el recinto G. Por lo tanto, $\{f_n(z)\}$ es convergente en todo el recinto y, debido a lo demostrado antes, es uniformemente convergente en el interior de cada círculo $|\zeta-z|<d(z)$, donde $d(z)$ es la distancia desde el punto $z\in G$ hasta la frontera del recinto G. Pero esto significa que la sucesión $\{f_n(z)\}$ es uniformemente convergente en el interior de G (véase el ap. 4.1 del cap. tercero).

Del teorema demostrado se deduce la siguiente proposición:

El límite de una sucesión de funciones armónicas que es uniformemente convergente en el interior de un recinto G, es una función armónica en este recinto.

Evidentemente, es suficiente demostrar esto para un entorno de un punto arbitrario $z_0\in G$. Sea K: $|z-z_0|<d(z_0)$ un círculo con el centro en z_0 de radio igual a la distancia desde z_0 hasta la

frontera del recinto G. Construyamos para cada una de las funciones dadas $u_n(x, y)$ una función $v_n(x, y)$ que sea conjugada con $u_n(x, y)$ en el círculo K; la constante de integración que figura en la determinación de $v_n(x, y)$ la elegiremos de tal modo que se cumpla la condición: $v_n(x_0, y_0) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Obtendremos una sucesión de funciones uniformes analíticas $f_n(z) = u_n(x, y) + iv_n(x, y)$, para las cuales la sucesión de los valores en el punto z_0 coincide con la sucesión $\{u_n(x_0, y_0)\}$ y, por consiguiente, es convergente.

Según el teorema precedente, sacamos la conclusión de que $\{f_n(z)\}$ es uniformemente convergente en el interior de K. En virtud del teorema de Weierstrass, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ es una función analítica en el interior de K y, por consiguiente, $\mathrm{Re}\,[f(z)] = u(x, y)$ es una función armónica en K. Pero $u(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x, y)$, con lo cual se termina la demostración.

Finalmente, demostremos la proposición siguiente:

Teorema de Harnack. *Si la serie* $\sum\limits_{1}^{\infty} u_n(x, y)$, *cuyos términos son funciones armónicas no negativas en un recinto* G, *es convergente en un punto* $z_0 = x_0 + iy_0$ *de este recinto, entonces es uniformemente convergente en el interior de todo el recinto* G.

Demostremos la convergencia uniforme de la serie en el círculo $|z - z_0| < d(z_0)$, cuyo radio es igual a la distancia desde el punto z_0 hasta la frontera del recinto G. De aquí, teniendo en cuenta el lema del ap. 4.5, cap. primero, se deducirá la convergencia uniforme en el interior de todo el recinto G, del mismo modo que se llevó a cabo la demostración del teorema precedente de este apartado.

Sea r un número positivo que satisfaga a la condición $0 < r < d(z_0)$. Entonces, para todos los puntos z del círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant r$ y para un ρ tal que $r < \rho < d(z_0)$, se tiene, en virtud de la fórmula (1.2:8):

$$u_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(\rho, \alpha) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)}\, d\alpha,$$

de donde, teniendo en cuenta que $u_n(\rho, \alpha)$, así como el núcleo de la integral de Poisson, son funciones no negativas, deducimos que

$$u_n(r, \theta) \leqslant \max_{0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)} \, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(\rho, \alpha)\, d\alpha.$$

Es obvio que la función $\dfrac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)}$ para valores fijados de r y $\rho\,(r < \rho)$ alcanza el máximo cuando $\theta - \alpha = 2k\pi$,

y éste es igual a $\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho}=\frac{\rho+r}{\rho-r}$. Obsérvese también que, en virtud de la fórmula (1.2:15):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(\rho, \alpha)\, d\alpha = u_n(x_0, y_0).$$

Por lo tanto, en todos los puntos del círculo $|z-z_0|\leqslant r$ la función $u_n(r, \theta)$ satisface a la desigualdad:

$$u_n(r, \theta)\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r}u_n(x_0, y_0) \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Como en el segundo miembro figura el término general de una serie convergente de términos constantes no negativos (pues, según la condición, la serie $\sum\limits_1^\infty u_n(x_0, y_0)$ es convergente), la serie $\sum\limits_1^\infty u_n(r, \theta)$ es uniformemente convergente en el círculo $|z-z_0|\leqslant r$ y, finalmente, debido a la arbitrariedad de $r<d(z_0)$, es uniformemente convergente en el interior del círculo $|z-z_0|<d(z_0)$. Con esto se termina la demostración del teorema de Harnack.

Formulando este teorema en términos de las sucesiones de funciones (y no de la serie), tendremos: *si una sucesión de funciones* $\{v_n(r, \theta)\}$, *que son armónicas en un recinto G y satisfacen en este recinto a la condición* $v_n(r, \theta)\leqslant v_{n+1}(r, \theta)$, *es convergente en un punto del recinto, entonces es uniformemente convergente en el interior del mismo.*

Esta proposición se reduce inmediatamente a lo anterior, haciendo $u_1(r, \theta)=v_1(r, \theta)$ y $u_n(r, \theta)=v_n(r, \theta)-v_{n-1}(r, \theta)$ $(n>1)$.

1.5. Del principio del módulo máximo, que es válido para las funciones analíticas, se deduce la proposición correspondiente para las funciones armónicas.

T e o r e m a. *Una función $u(x, y)$ que es armónica en un recinto G y no es idénticamente constante, no puede alcanzar ni el* MÁXIMO *ni el mínimo en los puntos interiores del recinto G.*

D e m o s t r a c i ó n. Sea $z_0=x_0+iy_0$ un punto del recinto G y sea K un círculo con el centro en este punto, situado en este recinto. Formemos una función armónica $v(x, y)$ que sea conjugada con $u(x, y)$ en el círculo K. Como este círculo es un recinto simplemente conexo, la función analítica $\varphi(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ será uniforme en el mismo (solamente hay que elegir de un modo determinado la constante que figura en la definición de la función $v(x, y)$, por ejemplo, exigiendo que sea $v(x_0, y_0)=0$). Formemos ahora la función $f(z)=\exp[\varphi(z)]$. Esta también será uniforme y analítica en el círculo K, expresándose su módulo $|f(z)|$ mediante

$u(x, y)$ según la fórmula

$$|f(z)| = \exp[u(x, y)].$$

Si la función $u(x, y)$ tuviese máximo en el punto (x_0, y_0) el módulo $|f(z)|$ también tendría máximo en este punto, lo cual, en virtud del principio del módulo máximo, es imposible ($f(z) \not\equiv$ $\not\equiv$ const, puesto que $u(x, y) \not\equiv$ const). Del mismo modo nos convencemos que $u(x, y)$ no puede tener tampoco mínimo en el punto (x_0, y_0), puesto que si se alcanzase el mínimo en este punto, la función armónica $-u(x, y)$ tendría máximo en el mismo.

Se puede obtener otra demostración de este teorema observando que la función analítica $w = \varphi(z)$ transforma el entorno $|z - z_0| <$ $< \rho$ en un recinto g que contiene al punto $w_0 = \varphi(z_0)$. El recinto g contiene puntos cuyas abscisas u son menores que $u_0 = \mathrm{Re}[\varphi(z_0)] =$ $= u(x_0, y_0)$ y también puntos cuyas abscisas son mayores que $u(x_0, y_0)$. Por consiguiente, $u(x, y)$ toma en el entorno dado tanto valores mayores que $u(x_0, y_0)$ como valores menores que éste, de donde se deduce el teorema.

De la proposición demostrada se deduce que una función real $u(x, y)$ que es continua en un dominio $\overline{G}$ y es armónica en el recinto G, alcanza sus valores máximo y mínimo en los puntos frontera del recinto. Por esta razón, si una función tal conserva un valor constante en la frontera del recinto G, entonces sus valores máximo y mínimo en todo el dominio $\overline{G}$ coinciden y, por consiguiente, ella es constante en el recinto G. En particular, se puede enunciar la siguiente proposición:

T e o r e m a. *Si dos funciones $u_1(x, y)$ y $u_2(x, y)$ son continuas en el dominio $\overline{G}$, son armónicas en el recinto G y sus valores coinciden en todos los puntos frontera del recinto G, entonces estas funciones coinciden en todos los puntos del recinto G.*

En efecto, la diferencia de estas funciones es una función continua en $\overline{G}$ y armónica en G, la cual se anula en todos los puntos frontera. Por consiguiente, esta diferencia es igual a cero en todo el recinto G.

Este último teorema garantiza la unicidad de la solución del siguiente problema importante que surge en muchas cuestiones de la mecánica y de la física.

P r o b l e m a d e D i r i c h l e t. *En la frontera de un recinto G está definida una función real, uniforme y continua $\varphi(\zeta)$. Hallar una función $u(x, y)$ que sea continua en el dominio $\overline{G}$ y armónica en el recinto G y que coincida con $\varphi(\zeta)$ en todos los puntos frontera.*

Señalemos una de las múltiples interpretaciones físicas de este problema, suponiendo para precisar que el recinto G está limitado por una curva cerrada de Jordan Γ.

Consideremos una membrana, es decir, un cuerpo de la forma de una placa, cuyo espesor sea considerablemente pequeño en comparación con las demás dimensiones y que posea una resistencia a la flexión insignificante en comparación con las fuerzas de tensión S (estas últimas están aplicadas al contorno de la membrana, son normales al contorno y, a la vez, llevan las direcciones de las tangentes a la superficie de la membrana). La tensión será debida a que el borde de la membrana está sujeto rígidamente al contorno.

Supongamos que la proyección ortogonal del contorno sobre el plano xy coincide con la curva Γ y que todos los puntos de la membrana se proyectan sobre el interior del recinto G; designemos con $u = u(x, y)$ la cota del punto de la membrana cuya proyección es (x, y). En la teoría de la elasticidad se demuestra que en estado de equilibrio, bajo la acción de una carga p, calculada para una unidad de área de la superficie y dirigida ortogonalmente al plano xy, la función $u(x, y)$ satisface a la ecuación:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{p}{S}.$$

Si no hay ninguna carga (en particular, si se puede despreciar el peso de la membrana), esta ecuación toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

de donde se deduce que la cota de un punto de una membrana sin carga en estado de equilibrio, es una función armónica. Para determinar la forma de la superficie de la membrana, se debe hallar una función que sea armónica en el recinto G y que tome en los puntos de la frontera Γ unos valores dados, que están condicionados por la forma del contorno de la membrana, es decir, se debe resolver el problema de Dirichlet.

Recíprocamente: cualquier problema de Dirichlet se puede interpretar como el problema de la averiguación de la figura de equilibrio de una membrana sin carga que está sujeta a un contorno rígido de una forma dada.

Ahora nos ocuparemos de la resolución de este problema para el caso elemental, pero muy importante, en que el recinto G es un círculo $|z - z_0| < R$ y, por consiguiente, la frontera del recinto G es la circunferencia Γ: $|\zeta - z_0| = R$; entonces la función $\varphi(\zeta)$, definida en Γ, se puede considerar como una función del ángulo polar α de un sistema polar de coordenadas con el polo en el centro del círculo z_0:

$$\varphi(\zeta) = \varphi(z_0 + Re^{i\alpha}) = \varphi(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi,$$

que satisface a la condición $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$.

Empecemos con la suposición simple de que $\varphi(\alpha)$ coincide con los valores $u(R, \alpha)$ que toma en Γ una función $u(r, \theta)$ que es armónica en un círculo $|z - z_0| < R'$, de radio mayor que R. Entonces la función $u(r, \theta)$ será la solución del problema de Dirichlet (como ya sabemos, es la única).

Expresándola mediante la integral de Poisson

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R, \alpha)\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}\,d\alpha, \qquad r < R,$$

podemos sustituir aquí $u(R, \alpha)$ por $\varphi(\alpha)$ y, por consiguiente, obtenemos definitivamente la solución del problema en forma de la integral de Poisson, bajo el signo de la cual figuran los valores frontera dados de la función armónica

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\alpha)\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}\,d\alpha.$$

Supongamos ahora que $\varphi(\alpha)$ es una función arbitraria de la variable real α, dada *a priori* y continua en el segmento $[0, 2\pi]$. Formemos para ella la integral de Poisson:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\alpha)\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}\,d\alpha \tag{1.5:1}$$

y demostremos, en primer lugar, que esta integral, considerada como una función $u(r, \theta)$ del punto $z = z_0 + re^{i\theta} = x + iy$, es armónica en el interior del círculo G, y, en segundo lugar, que al aproximarse el punto z por el interior del círculo a un punto arbitrario $\zeta = z_0 + Re^{i\alpha}$, situado en Γ, la función $u(r, \theta)$ tiende al límite $\varphi(\alpha)$. Después de esto no habrá más que observar que, extendiendo la definición de $u(r, \theta)$ a todos los puntos de la circunferencia Γ y haciendo $u(R, \alpha) = \varphi(\alpha)$, resulta una función que satisface a todas las condiciones del problema de Dirichlet, correspondiente a la función dada $\varphi(\alpha)$.

Comenzaremos con que el núcleo de Poisson

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}$$

se desarrolla en serie (1.2:4) (sustituyendo ρ por R), la cual es uniformemente convergente en el interior del círculo G:

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} = 1 + 2\sum_1^{\infty}\frac{r^n}{R^n}\cos n(\theta - \alpha).$$

Multiplicando esta serie por $\frac{1}{2\pi}\varphi(\alpha)$ e integrando término a término respecto de α, suponiendo $r < R$ constante, obtendremos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}\,d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\sum_1^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{r^n}{R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\cos n(\theta-\alpha)\,d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\,d\alpha+\sum_1^{\infty}\left[\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha\cos n\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\operatorname{sen} n\alpha\,d\alpha\operatorname{sen} n\theta\right]r^n. \qquad (1.5:2)$$

Haciendo

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha,\qquad \beta_n=-\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\operatorname{sen} n\alpha\,d\alpha\quad(n\geqslant 1),$$

nos convencemos que

$$|\alpha_n+i\beta_n|=\left|\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\,e^{-in\alpha}\,d\alpha\right|\leqslant\frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi}|\varphi(\alpha)|\,d\alpha$$

y

$$\sqrt[n]{|\alpha_n+i\beta_n|}\leqslant\frac{1}{R}\sqrt[n]{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(\alpha)|\,d\alpha},$$

de donde $R\leqslant\dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|\alpha_n+i\beta_n|}}$.

En virtud de la observación hecha en el ap. 1.2 (pág. 155) de aquí se deduce que la serie (1.5:2) representa una función armónica en el círculo G, es decir, la integral (1.5:1) representa una función armónica en este círculo. Designemos esta función mediante $u(r,\theta)$:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha)\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\alpha)}\,d\alpha$$

y demostremos que, para cualquier punto $\zeta_0=z_0+Re^{i\alpha_0}$ situado en Γ, $u(r,\theta)$ tiende hacia el límite $\varphi(\alpha_0)$, cuando $z=z_0+re^{i\theta}$ $(r<R)$ tiende a ζ_0. Sin restringir generalidad, se puede suponer que

$\alpha_0 = 0$, puesto que el valor del ángulo polar α depende solamente de la elección de la dirección del eje polar, y siempre se puede hacer que este último pase por cualquier punto $\zeta_0 \in \Gamma$. Así, pues, se tiene que demostrar que

$$\lim_{r\to R,\ \theta\to 0} |u(r, \theta) - \varphi(0)| = 0.$$

Utilizando la fórmula (1.2:11), escribamos $\varphi(0)$ en la forma

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(0) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}\, d\alpha.$$

Por consiguiente, la diferencia $d(r, \theta) = u(r, \theta) - \varphi(0)$ puede escribirse así:

$$d(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\varphi(\alpha) - \varphi(0)] \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}\, d\alpha. \tag{1.5:3}$$

Sea ε un número positivo arbitrario. Teniendo en cuenta que la función $\varphi(\alpha)$ es continua en el punto $\alpha = 0$, elijamos $\delta(\varepsilon) > 0$ de tal modo que para $|\alpha| < 2\delta(\varepsilon)$ se cumpla la desigualdad

$$|\varphi(\alpha) - \varphi(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Designemos ahora con σ_ε aquel arco de la circunferencia Γ, para cuyos puntos sea $|\alpha| < 2\delta(\varepsilon)$, y designemos con Σ_ε el arco complementario. Entonces, de la fórmula (1.5:3) hallaremos:

$$|d(r, \theta)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\right| \leqslant \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_\varepsilon}\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_\varepsilon}\right|. \tag{1.5:4}$$

Acotemos cada uno de los términos del segundo miembro. Para el primero de ellos tendremos:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_\varepsilon}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}\, d\alpha <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}\, d\alpha = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para acotar el segundo, observemos primero que la función $\varphi(\alpha) - \varphi(0)$ está acotada en el segmento $[0, 2\pi]$: $|\varphi(\alpha) - \varphi(0)| < M$. Exijamos que para el punto (r, θ) se cumpla la condición

$$|\theta| < \delta(\varepsilon).$$

Como para los puntos del arco Σ_ε el ángulo polar α pertenece al intervalo $(2\delta(\varepsilon), 2\pi - 2\delta(\varepsilon))$, para estos mismos puntos $\alpha - \theta$ per-

tenecerá al intervalo $(\delta(\varepsilon), 2\pi - \delta(\varepsilon))$. Por consiguiente, se cumplen las desigualdades

$$\cos(\theta - \alpha) < \cos\delta(\varepsilon), \quad \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)} < \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\delta(\varepsilon)}$$

y

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_\varepsilon}\right| < M\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\delta(\varepsilon)}\,\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_r} d\alpha < M\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\delta(\varepsilon)}\,.$$

Para $r \to R$ el segundo miembro de la desigualdad tiende a cero y, por lo tanto, puede hacerse menor que $\frac{\varepsilon}{2}$, si $R - r < < \delta'(\varepsilon)$.

Así, pues, para $|\theta| < \delta(\varepsilon)$ y $R - r < \delta'(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad

$$|d(r, \theta)| \leqslant \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_\varepsilon}\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma_\varepsilon}\right| < \varepsilon,$$

de donde se deduce que

$$\lim_{r \to R,\ \theta \to 0} [u(r, \theta) - \varphi(0)] = 0.$$

Extendamos la definición de la función armónica $u(r, \theta)$ a los puntos de Γ, haciendo

$$u(R, \alpha) = \varphi(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi,$$

entonces la función $u(r, \theta)$ será continua en el círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant R$. Su continuidad en cada punto interior del círculo es evidente. Sea (R, α) un punto frontera; entonces, para cualquier sucesión de puntos interiores $\{(r_n, \theta)\}$, que converja hacia (R, α), según lo demostrado, se tiene:

$$\lim u(r_n, \theta) = \varphi(\alpha) = u(R, \alpha)$$

y como la función $\varphi(\alpha)$ es continua, resulta que para sucesión de puntos frontera $\{(R, \alpha_n)\}$, convergente hacia (R, α), se tiene:

$$\lim u(R, \alpha_n) = \lim \varphi(\alpha_n) = \varphi(\alpha) = u(R, \alpha).$$

Por consiguiente, $u(r, \theta)$ es también continua en los puntos frontera del círculo.

Así, pues, hemos obtenido la solución del problema de Dirichlet para el círculo en forma de una integral de Poisson de la función dada $\varphi(\alpha)$:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\alpha)\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta - \alpha)}\,d\alpha.$$

Del resultado obtenido se puede deducir un corolario, referente a las series de Fourier. Escribamos para esto el desarrollo de Fou-

rier correspondiente a la función $\varphi(\alpha)$:

$$\varphi(\alpha) \sim \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt +$$

$$+\sum_1^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt\cos n\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,\mathrm{sen}\,nt\,dt\,\mathrm{sen}\,n\alpha\right]$$

y comparémoslo con la serie (1.5:2) para los puntos (r, θ) que pertenecen al radio que va dirigido hacia el punto α (es decir, $\theta = \alpha$):

$$u(r, \alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,dt +$$

$$+\sum_1^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\cos nt\,dt\cos n\alpha + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,\mathrm{sen}\,nt\,dt\,\mathrm{sen}\,n\alpha\right]\left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

Los términos de la última serie se distinguen de los términos de la serie de Fourier en que figuran los factores de la forma $\left(\frac{r}{R}\right)^n = \rho^n$, donde $\rho < 1$. Si ρ tiende a 1, según lo anterior, tendremos:

$$\lim_{r\to R} u(r, \alpha) = \varphi(\alpha).$$

Hemos obtenido el siguiente resultado: *si cada uno de los términos de la serie de Fourier de una función periódica continua* $\varphi(\alpha)$, *de período* 2π, *se multiplica por la* (*n-ésima*) *potencia correspondiente del número* ρ, *el cual es menor que* 1, *resulta una serie convergente, cuya suma tiende uniformemente hacia* $\varphi(\alpha)$ *cuando* ρ *tiende a* 1.

Hemos obtenido un método de definición de la función $\varphi(\alpha)$ partiendo de la serie de Fourier, el cual puede no ser convergente. Tales métodos se llaman generalmente **métodos de sumación** de la serie, y el método especial obtenido de sumación lleva el nombre de **método de Poisson** (o de Abel).

Del último resultado se deduce la proposición utilizada anteriormente en el ap. 4.3 del cap. quinto: *para cualquier función continua* $\psi(\theta)$ *de período* 2π *y cualquier* $\varepsilon > 0$ *existe un polinomio trigonométrico* $\tau(\theta)$ *tal, que*

$$|\psi(\theta) - \tau(\theta)| < \varepsilon, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

En efecto, podemos hallar primero un ρ_0, $0 < \rho_0 < 1$, tal que sea:

$$\left|\psi(\theta) - \left\{\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_1^{\infty}(\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\rho_0^n\right\}\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

donde α_0, α_n, β_n son los coeficientes de Fourier de la función $\psi(\theta)$; después, aplicando la convergencia uniforme de la serie que figura entre llaves, se puede tomar una suma parcial $\tau(\theta)$ tal que se cumpla la desigualdad pedida.

1.6. Apliquemos las transformaciones conformes al estudio de las funciones armónicas. Estas aplicaciones se fundan en el simple hecho de que, al transformar conformemente un recinto G en otro D, las funciones armónicas en G se transforman en funciones armónicas en D. En efecto, si $u(z) = u(x, y) = \mathrm{Re}\,[F(z)]$, donde $F(z)$ es una función analítica en el recinto G, y $w = f(z)$ transforma conformemente G en D, entonces la función transformada

$$u^*(w) = u[f^{-1}(w)] = \mathrm{Re}\{F[f^{-1}(w)]\}$$

es la parte real de la función $F[f^{-1}(w)]$, la cual es analítica en el recinto D y, por consiguiente, también es una función armónica.

Utilicemos esta observación para obtener, para un recinto arbitrario acotado y simplemente conexo G, unas fórmulas análogas a la integral de Poisson.

Fijemos un punto arbitrario $z_0 \in G$ y designemos con $f(z) = f_{z_0}(z)$ la función que transforma conformemente el recinto G en el círculo unidad $|w| < 1$, de modo que sea $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$. Si $u(z) = u(x, y)$ es una función armónica en este recinto, entonces $u[f^{-1}(w)] = u^*(w) = u^*(r, \theta)$ es una función armónica en el círculo unidad. Para ésta tendremos:

$$u^*(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^*(\rho, \alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int u^*(\rho, \alpha)\frac{ds}{\rho},$$

donde ds es el elemento de longitud de arco de la circunferencia. Volviendo al recinto G mediante la transformación $z = f^{-1}(w)$, obtendremos la expresión del valor $u(z_0)$ mediante la integral a lo largo de la curva γ_ρ que es la imagen de la circunferencia $|w| = \rho$:

$$u(z_0) = u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\rho} u(\zeta)\frac{|f'(\zeta)|\,d\sigma}{|f(\zeta)|}, \qquad (1.6:1)$$

donde $d\sigma$ es el elemento de longitud del arco γ_ρ. Transformemos la expresión $\frac{|f'(\zeta)|}{|f(\zeta)|}$. Con este fin, consideremos el elemento de longitud $d\nu$ de una línea que pase por el punto $\zeta \in \gamma_\rho$ y que sea la imagen del radio del círculo. Como la transformación es conforme, el elemento $d\nu$ lleva la dirección de la normal a la curva γ_ρ. Convendremos en que ésta sea la dirección de la normal interior. Como resultado de la transformación $w = f(z)$, $|f'(\zeta)|\,d\nu$ se convertirá en $-d\rho$ (en nues-

tras condiciones, $d\rho < 0$), $|f(\zeta)|$ se convertirá en ρ y, por lo tanto:

$$\frac{|f'(\zeta)|\,d\nu}{|f(\zeta)|} = -\frac{d\rho}{\rho} = d\ln\frac{1}{\rho} = d\ln\frac{1}{|f(\zeta)|},$$

de donde

$$\frac{|f'(\zeta)|}{|f(\zeta)|} = \frac{\partial \ln \frac{1}{|f(\zeta)|}}{\partial \nu},$$

donde el símbolo $\frac{\partial}{\partial \nu}$ denota la derivada en dirección de la normal interior a γ_ρ. Por consiguiente, la fórmula (1.6:1) puede representarse en la forma

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_\rho} u(\zeta) \frac{\partial \ln \left|\frac{1}{f_{z_0}(\zeta)}\right|}{\partial \nu} d\sigma. \qquad (1.6:2)$$

Esta es la fórmula pedida.

Examinemos más detalladamente la función $\ln \frac{1}{|f_{z_0}(\zeta)|}$. Como la función $f_{z_0}(z)$ tiene un cero simple único en el punto z_0, ésta puede expresarse en la forma

$$f_{z_0}(z) = (z - z_0)\,\varphi_{z_0}(z),$$

donde $\varphi_{z_0}(z)$ es una función analítica que no se anula en el recinto G. Por consiguiente,

$$\ln \frac{1}{|f_{z_0}(z)|} = \ln \frac{1}{|z - z_0|} + \ln \frac{1}{|\varphi_{z_0}(z)|},$$

de donde se ve que la función $-\ln|f_{z_0}(z)|$ posee las siguientes propiedades:

1) ésta es una función armónica en el recinto G para $z \neq z_0$ y tiene un polo logarítmico en el punto z_0 con la parte principal $-\ln|z - z_0|$;

2) no es negativa, puesto que $|f_{z_0}(z)| < 1$, y tiende a cero cuando el punto z tiende hacia la frontera Γ del recinto G (puesto que en este caso el punto $w = f(z)$ tiende hacia la circunferencia unidad).

La función que posee estas propiedades se llama **función de Green** del recinto G (para el problema de Dirichlet) y se designa así: $g(z, z_0)$. Fácilmente se observa que las condiciones enunciadas determinan a $g(z, z_0)$ de un modo único. En efecto, si $\tilde{g}(z, z_0)$ satisface a las mismas condiciones, entonces

$$\tilde{g}(z, z_0) - g(z, z_0)$$

es una función armónica en el recinto G (incluyendo el punto z_0) que se anula en Γ. Por esta razón, $g(z, z_0) - \tilde{g}(z, z_0) \equiv 0$.

Mediante la definición introducida aquí, la fórmula (1.6:2) se puede escribir en la forma:

$$u(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_\rho} u(\zeta)\,\frac{\partial g(\zeta, z_0)}{\partial\nu}\,d\sigma. \qquad (1.6:2')$$

Si en lugar del punto z_0 se toma otro punto $z_1 \in G$, entonces habrá que utilizar la función $f_{z_1}(z)$ que transforma G en el círculo unidad $|w|<1$, de modo que $f_{z_1}(z_1)=0$ y $f'_{z_1}(z_1)>0$, y las imágenes circulares γ'_ρ que corresponden a esta transformación. Se puede conseguir la transformación $w_1=f_{z_1}(z)$ en dos etapas: transformando G en el círculo unidad $|w|<1$ mediante $w=f_{z_0}(z)$, donde el punto z_1 irá al punto $f_{z_0}(z_1)$, y transformando después el círculo unidad sobre sí mismo, de modo que este último punto vaya al origen de coordenadas y que la derivada de la transformación resultante sea positiva para $z=z_1$. Obtendremos:

$$f_{z_1}(z)=e^{i\alpha}\,\frac{f_{z_0}(z)-f_{z_0}(z_1)}{1-\overline{f_{z_0}(z_1)}\,f_{z_0}(z)},$$

donde α se debe elegir de tal modo que sea $f'_{z_1}(z_1)>0$ (es necesario hacer

$$\alpha=-\operatorname{Arg} f'_{z_0}(z_1)).$$

De aquí que

$$g(z, z_1)=\ln\frac{1}{|f_{z_1}(z)|}=\ln\left|\frac{1-\overline{f_{z_0}(z_1)}\,f_{z_0}(z)}{f_{z_0}(z)-f_{z_0}(z_1)}\right|. \qquad (1.6:3)$$

Observando que

$$g(z_1, z_0)=\ln\frac{1}{|f_{z_0}(z_1)|}$$

y que (según la fórmula (1.6:3)):

$$g(z_0, z_1)=\ln\left|\frac{|1-\overline{f_{z_0}(z_1)}\,f_{z_0}(z_0)|}{|f_{z_0}(z_0)-f_{z_0}(z_1)|}\right|=\ln\frac{1}{|-f_{z_0}(z_1)|}$$

(puesto que $f_{z_0}(z_0)=0$), sacamos la conclusión que:

$$g(z_1, z_0)=g(z_0, z_1). \qquad (1.6:4)$$

Esta relación expresa la propiedad de simetría de la función de Green respecto de sus dos argumentos.

El camino de integración γ_ρ en la fórmula (1.6:2') está ligado con la elección del punto z_0; al pasar del punto z_0 a otro punto z_1 se tiene que cambiar la curva γ_ρ por otra curva γ'_ρ, que es la imagen de la circunferencia $|w|=\rho$ en la transformación $z=f^{-1}_{z_1}(w)$. Para obtener una fórmula que esté libre de este defecto, utilizaremos una transformación fija $w=f(z)=f_{z_0}(z)$; en este caso, un punto

arbitrario z situado en el interior de γ_ρ irá a un punto $w = re^{i\theta}$ situado en el interior de la circunferencia $|w| = \rho$. Por consiguiente, tendremos:

$$u(z) = u^*(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^*(\rho, \alpha)\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2r\rho\cos(\theta - \alpha)}\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\zeta)\frac{|f(\zeta)|^2 - |f(z)|^2}{|f(\zeta) - f(z)|^2}\cdot\frac{|f'(\zeta)|}{|f(\zeta)|}\,d\sigma.$$

La integral obtenida representa una función armónica $u(z)$ para todos los puntos z situados en el interior de la curva fijada γ_ρ.

Obsérvese sin demostración, que haciendo ciertas suposiciones particulares respecto de Γ (por ejemplo, suponiendo que Γ es una curva lisa cerrada de Jordan, para la cual el ángulo α de inclinación de la tangente, considerado como función de la longitud del arco σ, satisface a una condición de la forma $|\alpha(\sigma'') - \alpha(\sigma')| < C|\sigma'' - \sigma'|^\lambda$, $\lambda > 0$), la función $f_{z_0}(z)$ posee derivada continua $f'_{z_0}(z)$ en el d o m i n i o $\overline{G}$.

En este caso, partiendo de una función $u(z)$ que sea continua en $\overline{G}$ y armónica en G, al pasar al círculo $|w| < 1$ obtendríamos también una función $u^*(w)$, continua en el círculo cerrado y armónica en el interior del mismo, para la cual,

$$u^*(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u^*(1, \theta)\,d\theta.$$

Repitiendo los mismos cálculos que anteriormente, hallaremos que en las condiciones impuestas a Γ la fórmula (1.6:2') es válida también para $r = 1$, es decir, cuando γ_r coincide con Γ:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma u(\zeta)\frac{\partial g(\zeta, z_0)}{\partial \nu}\,d\sigma. \qquad (1.6{:}2'')$$

Si en Γ *a priori* se ha dado una función continua $u(\zeta)$, entonces esta misma fórmula resolverá el problema correspondiente de Dirichlet.

Sin desarrollar más estas observaciones respecto de la fórmula (1.6:2''), demostremos aquí también que el problema de Dirichlet admite solución para cualquier recinto G limitado por una curva cerrada de Jordan Γ.

Sea $\varphi(\zeta)$ una función continua en Γ. Realicemos una transformación conforme del recinto G en el círculo unidad mediante la función $w = f(z)$. En el caso considerado, esta función establece una correspondencia homeomorfa entre Γ y la circunferencia unidad

y, por consiguiente, transforma $\varphi(\zeta)$ en una función uniforme y continua $\varphi^*(\tau)$ ($|\tau| = 1$).

Resolvamos el problema de Dirichlet en el círculo unidad para la función $\varphi^*(\tau)$; obtendremos la función armónica

$$u^*(w) = u^*(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^*(e^{i\alpha}) \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\alpha)}\, d\alpha.$$

Volviendo al recinto G mediante la transformación inversa $z = f^{-1}(w)$, obtendremos una función $u(z) = u^*[f(z)]$, continua en $\overline{G}$, la cual toma en Γ los valores $\varphi(\zeta)$ y es armónica en el recinto G. Esta es la solución del problema planteado.

§ 2. SIGNIFICADO DE LAS FUNCIONES ANALITICAS DE VARIABLE COMPLEJA EN LA HIDROMECANICA. PERFILES DE JOUKOWSKI—CHAPLIGUIN

2.1. Vamos a estudiar el movimiento plano (plano-paralelo) estacionario de un fluido homogéneo incompresible. Este movimiento se caracteriza en que la velocidad de cada partícula del fluido representa un vector que es paralelo a un mismo plano (x, y) y depende solamente de las coordenadas x e y de la proyección de esta partícula sobre este plano (es decir, que no depende de la tercera coordenada ζ ni del tiempo). En este caso es suficiente estudiar solamente el movimiento de las proyecciones de las partículas del fluido sobre el plano (x, y), es decir, considerar todo el movimiento como un movimiento plano. De acuerdo a esto hablaremos del movimiento del fluido en el plano (x, y). Sea G un recinto del plano ocupado por el fluido en movimiento. El conjunto cerrado F que es complementario a G respecto del plano se puede considerar como el conjunto de las proyecciones de los cuerpos sólidos cilíndricos que son circundados por el fluido en el espacio. A las componentes conexas separadas del conjunto F las llamaremos simplemente cuerpos sólidos, circundados por el fluido. En el esquema presente éstos son inmóviles. Pero también se puede reducir a este esquema el caso del movimiento de traslación rectilíneo y uniforme de un cuerpo sólido (o de un sistema de cuerpos sólidos) en el fluido. Para ello, en virtud del principio clásico de Galileo, es suficiente comunicar a todo el fluido en su conjunto una velocidad constante en magnitud y dirección, igual a la velocidad de cualquier punto del cuerpo. Entonces, el fluido, en lugar de estar en reposo en el infinito, tendrá esta misma velocidad y los cuerpos circundados se podrán considerar como inmóviles.

Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ las proyecciones sobre los ejes coordenados del vector de la velocidad de la partícula del fluido que está situada en el punto (x, y), (se supone que estas funciones son continuas). Consideremos algún arco γ de una curva lisa que una dos puntos z_1 y z_2 del recinto G. Si ds es el elemento del arco γ y n es la dirección de la normal a ds, trazada de tal modo que n quede a la derecha del arco γ durante el recorrido del mismo desde el punto z_1 hasta el punto z_2, entonces el área del paralelogramo construido sobre ds y el vector de la velocidad $u + iv$, es, evidentemente, igual al producto de ds por la proyección de este vector sobre la normal, es decir, es igual a

$$[u\cos(\widehat{n, x}) + v\cos(\widehat{n, y})]\,ds. \qquad (2.1:1)$$

Esta magnitud tendrá el signo +, si el vector de la velocidad forma con n un ángulo agudo, y el signo —, si este ángulo es obtuso. Evidentemente, el paralelogramo indicado se puede considerar como la base de un paralelepípedo recto cuya altura es igual a 1 (perpendicular al plano xy). El volumen de este paralelepípedo coincide en valor absoluto con el número (2.1:1), el cual representa por lo tanto el volumen, tomado con un signo determinado, de la cantidad de fluido que pertenece a una capa de altura 1, paralela al plano (x, y), y que pasa durante un segundo a través de la superficie que se proyecta sobre el elemento ds. La cantidad total de fluido perteneciente a la capa indicada y que pasa en un segundo a través de la superficie cilíndrica que se proyecta sobre el arco γ, será igual a

$$\int_\gamma [u\cos(\widehat{n, x}) + v\cos(\widehat{n, y})]\,ds.$$

Observando que en nuestras condiciones el ángulo $\widehat{n, x}$ es mayor en $\frac{3}{2}\pi$ que el ángulo $\widehat{t, x}$ formado por la tangente a γ, trazada en la dirección del recorrido de esta curva, y el eje real, obtenemos que

$$\cos(\widehat{n, x}) = \operatorname{sen}(\widehat{x, t}) = \frac{dy}{ds}.$$

Análogamente

$$\cos(\widehat{n, y}) = -\cos(\widehat{x, t}) = -\frac{dx}{ds}.$$

Por consiguiente, la integral indicada se puede expresar en la forma

$$\int_\gamma \left(u\frac{dy}{ds} - v\frac{dx}{ds}\right) ds = \int_\gamma -v\,dx + u\,dy. \qquad (2.1:2)$$

La magnitud obtenida se llama *flujo* del fluido a través de la curva γ. Si la curva es cerrada y se ha tomado en ella una dirección positiva, de tal modo que la parte interior a la curva quede a la izquierda del observador que recorre a ésta en esta misma dirección, entonces la normal n está dirigida hacia la parte exterior a la curva γ. Por lo tanto, el flujo a través del elemento ds de la frontera es positivo si el fluido sale a través de ds hacia afuera de γ, y es negativo si entra hacia el interior de γ. Supongamos que la parte interior a γ pertenece al recinto G ocupado por el fluido en movimiento, y que no hay *manantiales* de donde podría aparecer fluido, ni *sumideros* donde podría consumirse éste. Entonces la magnitud total del fluido a través de γ tiene que ser igual a cero:

$$\int_{\gamma} -v\,dx + u\,dy = 0.$$

Aplicando esta conclusión a todas las curvas cerradas de un subrecinto arbitrario simplemente conexo $g \subset G$ que no contenga manantiales ni sumideros, sacamos la conclusión de que el flujo del fluido a través de cualquier arco perteneciente a este recinto no depende de la forma de este arco, sino que depende solamente de la elección de sus extremos z_1 y z_2.

Supongamos que u y v poseen derivadas parciales continuas. Entonces de la condición obtenida se deduce que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y}. \qquad (2.1:3)$$

Hemos obtenido la denominada ecuación de continuidad de un fluido incompresible. Evidentemente, ésta coincide con una de las ecuaciones de D'Alembert — Euler para el par de funciones $u(x, y)$ y $-v(x, y)$. Para obtener la otra ecuación de D'Alembert-Euler, consideremos la integral

$$\int_{\gamma} u\,dx + v\,dy, \qquad (2.1:4)$$

tomada a lo largo de la curva cerrada γ. Es obvio que la expresión $u\,dx + v\,dy$ representa la proyección del vector de la velocidad sobre el elemento ds del arco γ (más exactamente, es igual al producto de la proyección de la velocidad sobre la tangente, trazada en la dirección del recorrido de la curva, por la longitud ds del elemento de arco). La integral (2.1:4) se llama *circulación de la velocidad* a lo largo de la curva γ. Supongamos que en un subrecinto simplemente conexo $g \subset G$ la circulación de la velocidad es igual a cero para cualquier curva cerrada perteneciente a g. Entonces, evidentemente, en el recinto dado tiene que cumplirse

la condición

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(-v)}{\partial x}. \qquad (2.1:5)$$

Esta es la segunda ecuación de D'Alembert — Euler para el par de funciones u y $-v$. Su significado físico consiste en que ella expresa el hecho de que en el movimiento considerado del fluido (en el subrecinto $g \subset G$) no existen rotaciones (o torbellinos). En general, se llama *rotor* (*también rotacional o torbellino*) *de la velocidad* $u + iv$ en un movimiento plano, al vector que es perpendicular al plano xy y cuya proyección sobre el tercer eje coordenado ζ es igual a $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$. El rotor de la velocidad caracteriza el movimiento de rotación de la partícula de fluido. Si la partícula de fluido se hiciese sólida, la velocidad angular de su rotación en el punto (x, y) tendría el valor $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$. Por lo tanto, la carencia de rotaciones (o torbellinos) en un recinto dado g significa que en cada punto de éste la partícula del fluido puede tener solamente movimiento de traslación, pudiendo ser sometida a una deformación, sin experimentar rotación alguna, la cual se considera como una de las componentes del movimiento en el punto dado. En el caso de que no haya rotaciones, se cumple la ecuación (2.1:5) y, por consiguiente, la circulación de la velocidad es nula para cualquier curva cerrada.

Suponiendo que en el subrecinto dado $g \subset G$ se cumplen simultáneamente la ecuación (2.1:3) (lo que supone que no hay manantiales ni sumideros) y la ecuación (2.1:5) (lo que supone que no hay rotaciones o torbellinos), hallaremos que la función

$$u + (-v)\,i = u - iv,$$

que es conjugada con la velocidad del movimiento de la partícula de fluido, es una función analítica del punto $z = x + iy$.

Como g es un recinto simplemente conexo, $u - iv$ se puede considerar como la derivada de una función $f(z)$ que es uniforme y analítica en este recinto y que se determina unívocamente salvo una constante aditiva arbitraria.

Esta función, que satisface a la condición

$$f'(z) = u - iv,$$

se llama potencial complejo o función característica de la corriente. Hagamos

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y). \qquad (2.1:6)$$

Entonces

$$f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=u, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=v;$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=u.$$

El primer par de las relaciones obtenidas muestra que $\varphi(x, y)$, que es la parte real del potencial complejo, es el potencial de velocidades en el movimiento considerado. Es obvio que para éste se tiene la siguiente expresión:

$$\varphi(x, y)-\varphi(x_0, y_0)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} u\,dx+v\,dy=\operatorname{Re}\left(\int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz\right).$$

Del segundo par de las relaciones se deduce que

$$\psi(x, y)-\psi(x_0, y_0)=\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -v\,dx+u\,dy=\operatorname{Im}\left(\int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz\right),$$

es decir, la diferencia de dos valores de la función $\psi(x, y)$ es igual al flujo del fluido a través de cualquier curva que una los puntos en los cuales se toma la diferencia. La función $\psi(x, y)$, que es la parte imaginaria del potencial complejo, se llama función de corriente.

Consideremos dos familias de curvas

$$\varphi(x, y)=\text{const} \tag{2.1:7}$$

y

$$\psi(x, y)=\text{const.} \tag{2.1:8}$$

En el plano de valores de la función $\zeta=f(z)$, éstas se representan por las familias de rectas coordenadas: $\xi=\text{const}$ y $\eta=\text{const}$. Como estas últimas son ortogonales entre sí y la transformación $\zeta=f(z)$ es conforme, las familias (2.1:7) y (2.1:8) son ortogonales entre sí (esto es cierto solamente allí donde $f'(z)\neq 0$, es decir, donde la velocidad de la partícula sea diferente de cero).

Las curvas (2.1:7) se caracterizan en que para ellas

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0,$$

es decir,

$$u\,dx+v\,dy=0. \tag{2.1:9}$$

Estas son las líneas equipotenciales. Para las curvas (2.1:8) es característica la relación

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=0,$$

es decir,

$$-v\,dx + u\,dy = 0$$

o bien

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}\,. \tag{2.1:10}$$

Estas se llaman l í n e a s d e c o r r i e n t e.

De la ecuación (2.1:9) se deduce que en aquellos puntos en que el vector de la velocidad $u + iv$ es diferente de cero, éste lleva la dirección de la normal a la línea equipotencial correspondiente. Del mismo modo, de la ecuación (2.1:10) se deduce que este vector lleva la dirección de la tangente a la línea de corriente. De aquí se deduce una vez más que las líneas equipotenciales y las líneas de corriente son ortogonales entre sí.

Además, coincidiendo el vector de la velocidad con la tangente a la línea de corriente y siendo el movimiento estacionario (las velocidades dependen solamente de la posición de la partícula), se deduce que las líneas de corriente coinciden con las trayectorias de las partículas*).

Si el recinto G del movimiento del fluido contiene manantiales, sumideros o torbellinos (es decir, puntos a los cuales les corresponden rotacionales no nulos), entonces, excluyendo a éstos del recinto G, obtendremos un recinto múltiplemente conexo G', para cada uno de cuyos subrecintos simplemente conexos es aplicable todo lo expuesto anteriormente. De aquí se deduce, igual que anteriormente, que la función $u - iv$, que es conjugada con la velocidad $u + iv$, representa una función analítica uniforme en todo el recinto G'.

La función

$$f(z) = \bar{c} + \int_{z_0}^{z} (u - iv)\,dz = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

(generalmente multiforme) será de nuevo el potencial complejo del movimiento del fluido, descomponiéndose en cada subrecinto simplemente conexo $g' \subset G'$ en ramas analíticas uniformes. Como la derivada de cada una de éstas coincide con una misma función $u - iv$, las distintas ramas del potencial complejo pueden diferenciarse entre sí solamente en una constante *aditiva*.

Los manantiales, sumideros y torbellinos excluidos del recinto G, serán puntos singulares de carácter uniforme o multiforme del potencial complejo. Todo esto se aclarará a continuación con ejemplos.

*) En el caso general de un movimiento no estacionario también se puede hablar de las líneas de corriente como de curvas, cuyas tangentes coinciden en el momento dado con los vectores de las velocidades; pero aquí, por lo general, las líneas de corriente no coinciden con las trayectorias de las partículas.

En resumen, hemos establecido que a cada movimiento plano estacionario de un fluido incompresible en un recinto G le corresponde una función analítica $f(z)$ (el potencial complejo del movimiento), la cual tiene singularidades solamente en aquellos puntos en los que hay manantiales, sumideros o torbellinos. Por lo general, esta función es multiforme, pero su derivada, que representa en cada punto del recinto un número complejo conjugado con la velocidad $u + iv$, es uniforme.

La frontera del recinto se puede considerar como el conjunto de las configuraciones (de las proyecciones o de las secciones) de las paredes del recipiente que contiene el fluido, o de los cuerpos cilíndricos que son circundados por el fluido. Como las partículas del fluido que son adyacentes a las paredes tienen que deslizarse a lo largo de ellas, la frontera del recinto tiene que formar parte del sistema de las líneas de corriente.

Si, en general, se tiene una función analítica $f(z)$ en un recinto G, a excepción de algunos puntos, la cual puede ser multiforme, pero que posee derivada uniforme $f'(z)$, entonces esta función se puede interpretar como el potencial complejo de una corriente de fluido en el recinto G. En este caso, los puntos singulares de la función pertenecientes al recinto G deben interpretarse como manantiales, sumideros o torbellinos de la corriente y la frontera del recinto, como la configuración de los cuerpos sólidos que son circundados por el fluido. Para que sea posible esta última interpretación, es necesario que la frontera del recinto G forme parte del sistema de las líneas de corriente, es decir, que la función de corriente $(\psi(x, y) = \operatorname{Im}[f(z)])$ conserve valores constantes en todos los continuos de la frontera (en cada continuo, su valor).

2.2. Pasando a la ilustración de los razonamientos generales expuestos en el apartado precedente, consideremos primero el caso de una función lineal entera

$$f(z) = az.$$

Esta puede considerarse como el potencial complejo del movimiento de un fluido que ocupa todo el plano. Este movimiento es de traslación y su velocidad en cualquier punto es igual a $\overline{f'(z)} = \bar{a}$. Haciendo $a = \alpha + i\beta$, obtenemos para el potencial de las velocidades la expresión

$$\varphi(x, y) = \alpha x - \beta y,$$

y para la función de corriente, la expresión

$$\psi(x, y) = \beta x + \alpha y.$$

En la fig. 23 están representadas las líneas de corriente y las líneas equipotenciales, ortogonales a ellas.

Si en lugar de todo el plano se considera solamente una franja limitada por dos rectas paralelas al vector $\bar{a}$, entonces la misma función representará el potencial complejo de la corriente del fluido en la franja.

Veamos también el ejemplo de la función

$$f(z) = z^2.$$

Esta también es el potencial complejo del movimiento de un fluido que ocupa todo el plano. La velocidad de la partícula del fluido

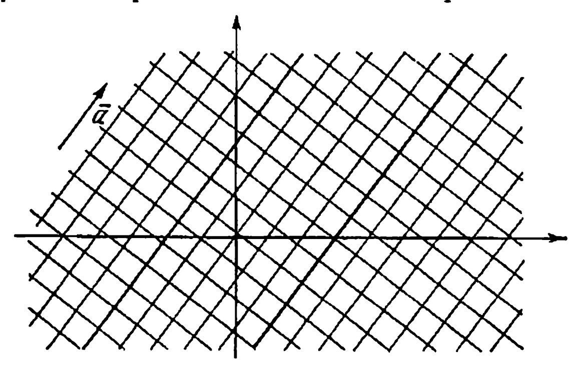


FIG. 23.

situada en el punto z es igual a $\overline{f'(z)} = 2\bar{z}$, el potencial de las velocidades tiene la forma

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2,$$

y la función de corriente es

$$\psi(x, y) = 2xy.$$

En la fig. 24 están representadas las líneas equipotenciales $x^2 - y^2 = \text{const}$ y las líneas de corriente $2xy = \text{const}$ del movimiento considerado. Evidentemente, éstas son hipérbolas equiláteras. Ambos ejes coordenados ($2xy = 0$) también pertenecen a las líneas de corriente. La velocidad en el punto de su intersección (en el origen de coordenadas) es igual a cero. Considerando en lugar de todo el plano uno de los cuadrantes coordenados, por ejemplo, el primero, sacamos la conclusión de que esta misma función representa el potencial complejo del movimiento plano de un fluido, situado en el primer cuadrante coordenado. En este caso los lados del cuadrante representan las paredes del recipiente, dentro del cual se mueve el fluido.

Hallemos el movimiento del fluido que circunda un cilindro circular y que tiene en el infinito la velocidad $U + iV = Ae^{i\alpha}$.

Con este fin, apliquemos el método de transformación conforme. Sea $|z| = R$ la sección del cilindro por el plano xy (o la proyección del cilindro sobre este plano). Entonces la función $z_1 = \frac{ze^{-i\alpha}}{R}$ transforma conformemente la parte exterior del círculo $|z| > R$ en la parte exterior del círculo unidad en el plano z_1, transformándose el vector $Ae^{i\alpha}$ en el vector $\frac{A}{R}$, el cual lleva la dirección del eje real (la dirección positiva). Por otra parte, la función $z_2 = \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right)$

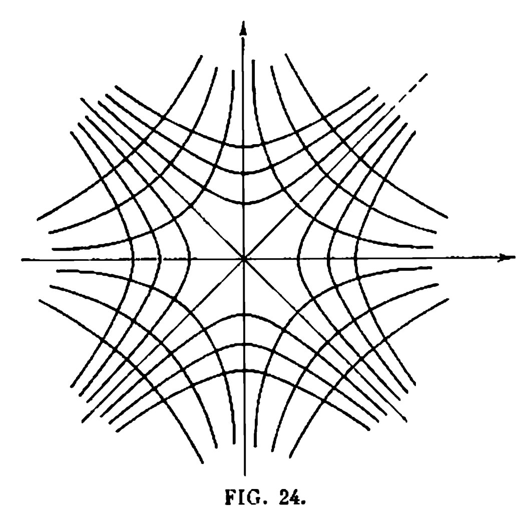


FIG. 24.

transforma conformemente la parte exterior del círculo unidad en la parte exterior del segmento del eje real $-1 \leqslant x_2 \leqslant 1$, $y_2 = 0$.

Por esta razón, la función $z_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{ze^{-i\alpha}}{R} + \frac{R}{ze^{-i\alpha}}\right)$ es analítica en la parte exterior G de la proyección del cilindro dado; además, su parte imaginaria y_2 conserva un valor constante, precisamente el valor cero, en la frontera $|z| = R$. De aquí que, si esta función se considera como el potencial complejo del movimiento de un fluido en el recinto G, entonces la frontera del recinto será una de las líneas de corriente, es decir, el fluido circundará al cilindro $|z| = R$.

Para la velocidad de la corriente tendremos:

$$\overline{\left(\frac{dz_2}{dz}\right)} = \frac{1}{2}\overline{\left(\frac{e^{-i\alpha}}{R} - \frac{R}{z^2e^{-i\alpha}}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i\alpha}}{R} - \frac{Re^{-i\alpha}}{\bar{z}^2}\right),$$

de donde la velocidad en el punto del infinito será igual a $\frac{1}{2}\frac{e^{i\alpha}}{R}$. Esta magnitud se diferencia de la dada $Ae^{i\alpha}$ solamente en el factor real positivo $\frac{1}{2AR}$. Multiplicando la función construida anteriormente por $2AR$, obtenemos definitivamente la función

$$f(z)=Ae^{-i\alpha}z+\frac{Ae^{i\alpha}R^2}{z}=(U-iV)\,z+\frac{(U+iV)\,R^2}{z}\,,$$

cuya parte imaginaria, igual que anteriormente, tiene un valor constante (igual a cero) en la circunferencia $|z|=R$ y cuya derivada en el punto del infinito es igual a $U-iV$, magnitud que es conjugada con el valor dado de la velocidad. En resumen, la función

$$f(z)=(U-iV)\,z+\frac{(U+iV)\,R^2}{z}$$

proporciona el potencial complejo del movimiento de un fluido que circunda al cilindro $|z|=R$ con una velocidad $U+iV$ dada en el infinito.

Para el potencial de las velocidades hallamos la expresión

$$\varphi(x,y)=\operatorname{Re}[f(z)]=(Ux+Vy)\left(1+\frac{R^2}{x^2+y^2}\right),$$

y para la función de corriente, la expresión

$$\psi(x,y)=\operatorname{Im}[f(z)]=(-Vx+Uy)\left(1-\frac{R^2}{x^2+y^2}\right)$$

Por ello, las líneas equipotenciales tienen las ecuaciones

$$(Ux+Vy)(x^2+y^2+R^2)=C_1(x^2+y^2),$$

y las líneas de corriente, las ecuaciones

$$(-Vx+Uy)(x^2+y^2-R^2)=C_2(x^2+y^2).$$

Unas y otras son curvas algebraicas de tercer orden. Están representadas en la fig. 25. Obsérvese, que para $C_2=0$ resultan las líneas de corriente: la recta $-Vx+Uy=0$, la cual pasa por el origen de coordenadas y es paralela al vector de la velocidad en el infinito, y la circunferencia $x^2+y^2=R^2$. En los puntos $\pm Re^{i\alpha}$ de intersección de estas líneas, la velocidad $\overline{f'(z)}=Ae^{i\alpha}-\frac{Ae^{-i\alpha}R^2}{\bar{z}^2}$ es igual a cero. En todos los demás puntos del plano ésta es diferente de cero.

En el ap. 2.4 se verá que son posibles corrientes que circundan el mismo cilindro que tiene otro potencial complejo.

2.3. Detengámonos en la interpretación de los puntos singulares más sencillos de una función analítica como manantiales, sumideros y torbellinos. Consideremos primero una singularidad logarítmica (punto de ramificación de orden infinito).

Sea $f(z) = \operatorname{Ln} z$; esta función multiforme, definida en el recinto $0 < |z| < \infty$, posee derivada uniforme $f'(z) = \frac{1}{z}$ y, por consiguiente, puede considerarse como el potencial complejo de una corriente estacionaria de un fluido. En el caso dado el potencial

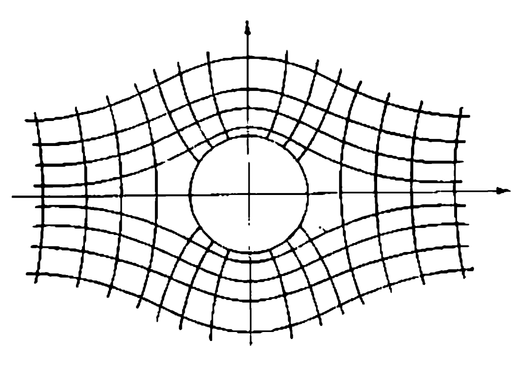


FIG. 25

de las velocidades es uniforme: $\varphi(x, y) = \ln |z|$, y la función de corriente es multiforme: $\psi(x, y) = \operatorname{Arg} z$. Las líneas equipotenciales $\ln |z| = \text{const}$ o $|z| = \text{const}$ son circunferencias con centro en el origen de coordenadas, y las líneas de corriente son rayos rectilíneos $\operatorname{Arg} z = \text{const}$.

Como la velocidad en el punto z es $\overline{f'(z)} = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$ y, por consiguiente, lleva la dirección del rayo $\operatorname{Arg} z = \text{const}$ del origen de coordenadas hacia el punto del infinito, todas las partículas se mueven en la dirección que va del origen de coordenadas hacia el punto del infinito con unas velocidades muy grandes cerca del origen y muy pequeñas lejos del mismo. $\left(|\overline{f'(z)}| = \frac{1}{|z|}\right)$. El cuadro indicado nos obliga a considerar uno de los puntos de ramificación de la función $\operatorname{Ln} z$, precisamente el punto $z = 0$, como un manantial de fluido, y el otro, $z = \infty$, como un sumidero. Para determinar la potencia del manantial o del sumidero, calculemos el flujo del fluido que pasa a través de una circunferencia arbitraria γ con el centro en el origen de coordenadas.

Según lo establecido en el ap. 2.1, este flujo es igual a

$$\int_{\gamma} -v\,dx + u\,dy = I\left[\int_{\gamma} f'(z)\,dz\right] = I\left[\int_{\gamma} \frac{dz}{z}\right] = 2\pi.$$

Así, pues, a través de una circunferencia de radio arbitrariamente pequeño con el centro en el origen de coordenadas, pasa en un segundo una cantidad de fluido que es igual a 2π (más exactamente, hay que figurarse la superficie de una capa cilíndrica circular de altura 1, cuya sección es la circunferencia indicada; precisamente a través de esta superficie pasa un volumen de fluido igual a 2π). El número obtenido lo consideramos como la potencia del manantial $z = 0$ de donde se desprende el fluido con una velocidad infinitamente grande, o como la potencia del sumidero $z = \infty$, donde desaparece el fluido (con velocidad nula).

Si en lugar de la función $\mathrm{Ln}\,z$ se considera como potencial complejo la función $F(z) = -i\,\mathrm{Ln}\,z$, entonces el potencial de velocidades será la función $\varphi(x, y) = \mathrm{Re}\,[F(z)] = \mathrm{Arg}\,z$, la función de corriente $\psi(x, y) = \mathrm{Im}\,[F(z)] = -\ln|z|$ y la velocidad en el punto z será igual a $\frac{i}{\bar{z}} = \frac{iz}{|z|^2}$. En este caso las líneas equipotenciales son rayos rectilíneos que parten del origen de coordenadas y las líneas de corriente son circunferencias con centro en el origen de coordenadas.

Como la velocidad $\frac{iz}{|z|^2}$ va dirigida por la tangente a la circunferencia correspondiente en sentido positivo, cada partícula de fluido se moverá por una circunferencia con centro en el origen de coordenadas, girando alrededor del mismo en sentido positivo (en dirección contraria a la de las agujas del reloj). La velocidad de las partículas será de nuevo muy grande cerca del origen y muy pequeña a lo lejos de él. En virtud de esto, el tiempo que se necesita para el recorrido de la circunferencia es igual a $2\pi r : \frac{1}{r} = 2\pi r^2$ y, por consiguiente, crece proporcionalmente al cuadrado del radio de la circunferencia. Se puede comprobar fácilmente que en este caso no hay manantiales ni sumideros (esto se deduce de que la función de corriente en el caso dado es uniforme). Para la circulación de la velocidad a lo largo de una circunferencia arbitraria γ con el centro en el origen de coordenadas, obtenemos la magnitud

$$\int u\,dx + v\,dy = \mathrm{Re}\left[\int f'(z)\,dz\right] = \mathrm{Re}\left[\int_{\gamma} \frac{dz}{z}\right] = 2\pi.$$

Como el valor de la circulación es el mismo, tanto para las circunferencias $|z| = r$ de radio arbitrariamente pequeño como para las de radio arbitrariamente grande, el origen de coordenadas y el punto

del infinito se pueden considerar como **t o r b e l l i n o s** de la corriente considerada, y la magnitud 2π como la intensidad de este torbellino (tanto de uno como del otro).

De los ejemplos indicados es fácil pasar al caso de un manantial y un sumidero de cualquier potencia m, colocados en dos puntos previamente dados del plano, o al caso de dos torbellinos de una intensidad dada Γ, arbitrariamente situados. Al primer caso le corresponde el potencial complejo $\frac{m}{2\pi}\operatorname{Ln}\frac{z-a}{z-b}$ (a es un manantial,

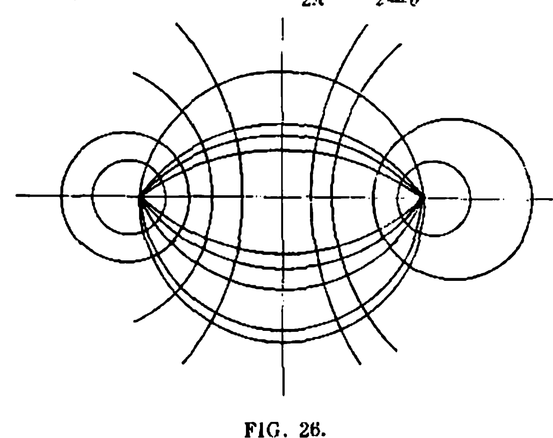


FIG. 26.

b es un sumidero), y al segundo, el potencial complejo $\frac{\Gamma}{2\pi i}\operatorname{Ln}\frac{z-a}{z-b}$ (a y b son dos torbellinos). Siendo dados los puntos a y b, el cuadro general de las líneas equipotenciales y de las líneas de corriente es el mismo en uno y otro caso (fig. 26). No obstante, en el primer caso las líneas de corriente son arcos de circunferencias que unen los puntos a y b, y las líneas equipotenciales son circunferencias ortogonales a ellos. En el segundo caso, por el contrario, estas últimas son líneas de corriente, mientras que las primeras son líneas equipotenciales.

Consideremos el potencial complejo que es igual a la suma de los dos potenciales señalados anteriormente:

$$f(z)=\frac{m-i\Gamma}{2\pi}\operatorname{Ln}\frac{z-a}{z-b}. \qquad (2.3:1)$$

Para éste los puntos a y b se pueden considerar como un **m a n a n t i a l - t o r b e l l i n o**, precisamente como la unión de un manantial (o sumidero) de potencia m con un torbellino de intensidad Γ. Aquí los potenciales de las velocidades y la función de corrien-

te son, respectivamente, iguales a

$$\varphi(x, y) = \frac{m}{2\pi} \ln \frac{|z-a|}{|z-b|} - \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Arg} \frac{z-a}{z-b},$$

$$\psi(x, y) = \frac{m}{2\pi} \operatorname{Arg} \frac{z-a}{z-b} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{|z-a|}{|z-b|}.$$

Las líneas equipotenciales y las líneas de corriente forman dos familias, ortogonales entre sí, de las llamadas espirales logarítmicas dobles que se enrollan en los puntos a y b*). En la fig. 27 están representadas tres curvas de una familia y una curva de la otra.

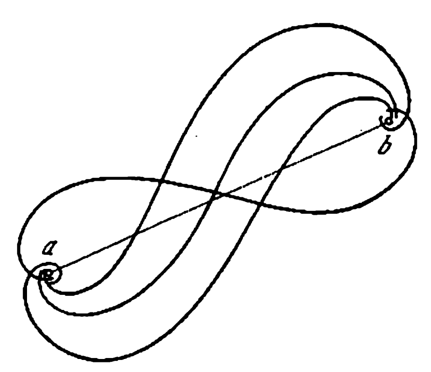


FIG. 27.

Partiendo de estas consideraciones, veamos cuál es la interpretación hidromecánica del polo de una función analítica. Sea

$$f(z) = \frac{(m - i\Gamma)}{2\pi} \operatorname{Ln} \frac{z-a}{z-b}$$

el potencial complejo que corresponde a dos manantiales-torbellinos situados en los puntos a y b. Representemos $f(z)$ en la forma

$$f(z) = \frac{(m - i\Gamma)(b-a)}{2\pi} \frac{\operatorname{Ln}(z-a) - \operatorname{Ln}(z-b)}{b-a}$$

y supongamos que b tiende hacia el límite a y que en estas condiciones $m - i\Gamma$ tiende hacia el infinito de tal modo, que el producto

*) Estas se convierten en espirales logarítmicas mediante la transformación homográfica $\zeta = \frac{z-a}{z-b}$ y, por consiguiente, forman una familia de curvas que se cortan con cualquier arco de circunferencia que una los puntos a y b, bajo un mismo ángulo.

$(m - i\Gamma)(b - a)$ tiene un límite finito $Re^{i\alpha}$, distinto de cero. Entonces, como resultado del paso al límite, obtendremos la función

$$F(z) = \frac{Re^{i\alpha}}{2\pi} \frac{1}{z-a}, \tag{2.3:2}$$

la cual posee un punto singular único, precisamente un polo simple situado en el punto a. Así, pues, el polo simple se puede considerar como la unión de dos manantiales-torbellinos con intensidades iguales y crecientes indefinidamente.

Claro, se puede obtener el mismo resultado partiendo solamente de un manantial y un sumidero ($\Gamma = 0$) o solamente de dos torbellinos ($m = 0$).

Haciendo $z - a = \rho e^{i\theta}$, escribamos el potencial de velocidades y la función de corriente en la forma

$$\Phi(z) = \operatorname{Re}[F(z)] = \frac{R}{2\pi} \frac{\cos(\alpha - \theta)}{\rho},$$

$$\Psi(z) = \operatorname{Im}[F(z)] = -\frac{R}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{\rho}.$$

De aquí se deduce que las líneas equipotenciales y las líneas de corriente

$$\frac{R}{2\pi} \frac{\cos(\alpha - \theta)}{\rho} = \text{const}, \qquad -\frac{R}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \theta)}{\rho} = \text{const}$$

se representan en forma de dos familias ortogonales de circunferencias:

$$\rho = C_1 \cos(\alpha - \theta), \quad \rho = C_2 \operatorname{sen}(\alpha - \theta),$$

donde las circunferencias de la primera familia (las líneas equipotenciales) son tangentes en el punto a al vector $iRe^{i\alpha}$, el cual parte de este punto, mientras que las circunferencias de la segunda familia (las líneas de corriente) son tangentes en el mismo punto al vector $Re^{i\alpha}$ (fig. 28).

Análogamente pueden interpretarse los polos de segundo orden, como la unión de dos polos de primer orden; los polos de tercer orden, como la unión de dos polos de segundo orden, etc.

2.4. Veamos la construcción del potencial complejo para la corriente de un fluido que circunda un cilindro circular, la cual nos llevará a un resultado de carácter más general que el obtenido en el ap. 2.2.

Supongamos que se necesita hallar el potencial complejo para una corriente de fluido en el recinto $|z| > R$, donde se supone que la velocidad en el punto del infinito es $U + iV$ y que en el recinto $R < |z| < \infty$ no hay manantiales, sumideros y torbellinos. Entonces, para la derivada $f'(z)$ del potencial complejo, que es conjugada con la velocidad en el punto z, obtenemos que ésta tiene que ser una

función analítica uniforme en el recinto $R < |z| < \infty$, que toma el valor finito $U - iV$ en el punto del infinito. Por consiguiente, el punto del infinito es regular para ella, y obtenemos:

$$f'(z) = U - iV + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{A_3}{z^3} + \ldots,$$

de donde

$$f(z) = (U - iV)\,z + A_1 \operatorname{Ln} z - \frac{A_2}{z} - \frac{A_3}{2z^2} - \ldots$$

Aquí se ha tomado la constante de integración igual a cero.

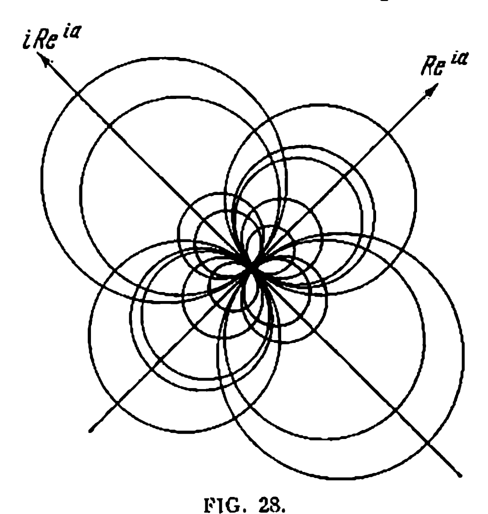


FIG. 28.

Para obtener de aquí la función de corriente $\psi(z) = \operatorname{Im}[f(z)]$, hagamos

$$z = re^{i\theta}, \qquad A_1 = a_1 + ib_1, \qquad A_2 = a_2 + ib_2, \qquad A_3 = a_3 + ib_3, \; \ldots$$

Tendremos:

$$\psi(re^{i\theta}) = Ur \operatorname{sen}\theta - Vr\cos\theta + a_1\theta + b_1 \ln r + \frac{a_2}{r}\operatorname{sen}\theta - \frac{b_2}{r}\cos\theta +$$

$$+ \frac{a_3}{r^2}\operatorname{sen} 2\theta - \frac{b_3}{r^2}\cos 2\theta + \ldots = a_1\theta + b_1 \ln r - \frac{b_2 + Vr^2}{r}\cos\theta +$$

$$+ \frac{a_2 + Ur^2}{r}\operatorname{sen}\theta - \frac{b_3}{r^2}\cos 2\theta + \frac{a_3}{r^2}\operatorname{sen} 2\theta - \ldots$$

Como la circunferencia $|z| = R$ es una de las líneas de corriente, la función $\psi(re^{i\theta})$ tiene que conservar un valor constante para $r = R$

y cualesquiera valores de θ. Del desarrollo hallado para $\psi(re^{i\theta})$, el cual es convergente para $r > R$, se deduce que se satisfacen las condiciones impuestas si se hace

$$a_1 = 0,\ b_2 + VR^2 = 0,\ a_2 + UR^2 = 0,\ b_3 = 0,\ a_3 = 0,\ \ldots$$

Si los coeficientes se eligen de este modo, tendremos:

$$f(z) = ib_1 \operatorname{Ln} z + (U - iV)\, z + \frac{(U + iV)\, R^2}{z}$$

(b_1 es un número real arbitrario).

Para la derivada $f'(z)$ obtenemos la expresión

$$f'(z) = \frac{ib_1}{z} + U - iV - \frac{(U + iV)\, R^2}{z^2},$$

de donde

$$\int\limits_{|z|=r} f'(z)\, dz = \int\limits_{|z|=r} \frac{ib_1\, dz}{z} = -2\pi b_1.$$

Por esta razón, el flujo del fluido a través de la circunferencia $|z| = r$ es igual a cero y la circulación de la velocidad a lo largo de la misma circunferencia es igual a $-2\pi b_1$. Eligiendo de un modo conveniente b_1, podemos obtener cualquier valor previamente asignado de la circulación Γ: $-2\pi b_1 = \Gamma$, de donde $ib_1 = \frac{\Gamma}{2\pi i}$. Por consiguiente, $f(z)$ puede escribirse en la forma

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z + (U - iV)\, z + \frac{(U + iV)\, R^2}{z} + C, \qquad (2.4{:}1)$$

donde se ha introducido también una constante aditiva arbitraria C.

El potencial complejo se expresa aquí en forma de una suma de una corriente circular pura $\frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} z$, correspondiente a torbellinos de intensidad Γ en el origen de coordenadas y en el punto del infinito, y de la corriente sin circulación

$$(U - iV)\, z + \frac{(U + iV)\, R^2}{z},$$

hallada en el ap. 2.2.

Demostremos que la fórmula (2.4:1) es la solución más general del problema de la circundación de un cilindro con una velocidad dada $U + iV$ en el punto del infinito y con una circulación dada Γ. En efecto, sea $f_1(z)$ un potencial complejo que satisfaga a las mismas condiciones. Entonces la diferencia $f_1'(z) - f'(z)$, que es conjugada con la diferencia de las velocidades de las partículas del fluido que participan en el primero y segundo movimiento, es una función analítica uniforme en el recinto $|z| > R$, la cual se anula en el

punto del infinito. Por consiguiente,

$$f_1'(z)-f'(z)=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots,$$

de donde

$$\int_\gamma [f_1'(z)-f'(z)]\,dz=\int_\gamma \frac{c_1\,dz}{z}=2\pi i c_1.$$

Como las circulaciones de las dos velocidades a lo largo de γ tienen que ser iguales entre sí, se tiene:

$$\operatorname{Re}\left\{\int_\gamma [f_1'(z)-f'(z)]\,dz\right\}=-2\pi I(c_1)=0,$$

es decir, c_1 es un número real. Para la diferencia de los potenciales complejos $f_1(z)-f(z)$ obtenemos:

$$f_1(z)-f(z)=c_0+c_1\operatorname{Ln} z-\frac{c_2}{z}-\frac{c_3}{2z^2}-\ldots$$

y para la diferencia de sus partes imaginarias, es decir, de las funciones de corriente:

$$\delta(r,\delta)=\operatorname{Im}[f_1(z)-f(z)]=$$
$$=\gamma_0+c_1\theta-\frac{\gamma_2}{r}\cos\theta+\frac{\beta_2}{r}\operatorname{sen}\theta-\frac{\gamma_3}{2r^2}\cos 2\theta+\frac{\beta_3}{2r^2}\operatorname{sen}2\theta-\ldots,$$

donde con β_j se han designado las partes reales de los coeficientes c_j y con γ_j, sus partes imaginarias. Según el sentido del problema la circunferencia $r=R$ tiene que ser una línea de corriente para cada una de las corrientes consideradas, por lo cual $\delta(R,\theta)=\text{const}=c$. Pero del desarrollo hallado para $\delta(r,\theta)$ se deduce que $\delta(r,\theta)-c_1\theta$ es una función uniforme de $z=re^{i\theta}$. En particular, tiene que ser también una función uniforme de θ la función $\delta(R,\theta)-c_1\theta=$ $=c-c_1\theta$, de donde se deduce que $c_1=0$.

Así, pues,

$$\delta(r,\theta)=\gamma_0-\frac{\gamma_2}{r}\cos\theta+\frac{\beta_2}{r}\operatorname{sen}\theta-\frac{\gamma_3}{2r^2}\cos 2\theta+\frac{\beta_3}{2r^2}\operatorname{sen}2\theta-\ldots$$

Vemos, pues, que $\delta(r,\theta)$ es una función armónica uniforme en el recinto $r>R$, la cual conserva el valor constante c en la circunferencia $r=R$. De aquí se deduce que $\delta(r,\theta)\equiv\text{const}$ (véase el ap. 1.5) y, por consiguiente, la función analítica $f_1(z)-f(z)$, cuya parte imaginaria es igual a $\delta(r,\theta)$, es constante. En resumen,

$$f_1(z)=f(z)+C'=\frac{\Gamma}{2\pi i}\operatorname{Ln} z+(U-iV)\,z+\frac{(U+iV)\,R^2}{z}+C'',$$

con lo cual se termina la demostración de la unicidad de la solución que hemos hallado.

Para el potencial de las velocidades y la función de corriente del movimiento determinado por la función (2.4:1), tenemos las siguientes expresiones:

$$\varphi(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Arg} z + (Ux + Vy)\left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) + \beta,$$

$$\psi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln|z| + (-Vx + Uy)\left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) + \gamma.$$

Por consiguiente, las ecuaciones de las líneas equipotenciales y de las líneas de corriente son, respectivamente:

$$\frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Arg} z + (Ux + Vy)\left(1 + \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) = C_1,$$

$$-\frac{\Gamma}{2\pi} \ln|z| + (-Vx + Uy)\left(1 - \frac{R^2}{x^2+y^2}\right) = C_2.$$

Para $\Gamma = 0$ éstas ya fueron estudiadas en el ap. 2.2. Para $\Gamma \neq 0$ resultan unas curvas trascendentes, cuyas formas dependen de la

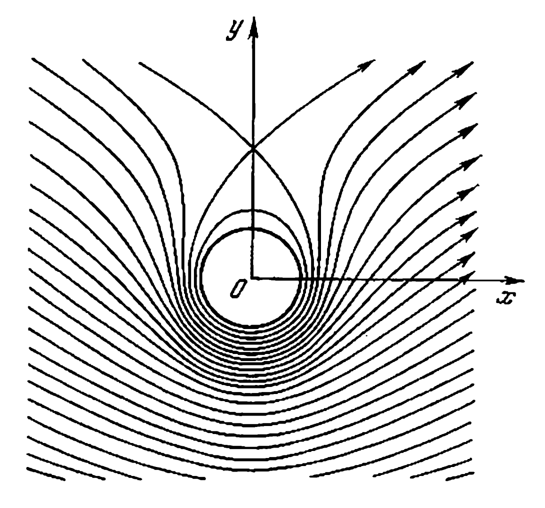


FIG. 29.

relación entre Γ y $U + iV$. Supongamos, para mayor sencillez, que $V = 0$ (siempre se puede llegar a este caso mediante una rotación de los ejes coordenados) y hallemos los puntos críticos de la corriente, es decir, aquellos puntos en los cuales se anula la velocidad. De la

expresión de la velocidad

$$\overline{f'(z)} = -\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{z} + U - \frac{UR^2}{z^2}$$

se deduce que estos puntos satisfacen a la ecuación cuadrática

$$\bar{z}^2 - \frac{\Gamma}{2\pi i U}\bar{z} - R^2 = 0 \quad \text{o bien} \quad z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i U}z - R^2 = 0,$$

de donde

$$z = \frac{i\Gamma}{4\pi U} + \sqrt{R^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi U}\right)^2}.$$

Si $|\Gamma| > 4\pi R\,|U|$, entonces ambos puntos críticos z_1 y z_2 son imaginarios puros; además, de la relación $z_1z_2 = -R^2$ se ve que solamente uno de ellos está situado fuera de la circunferencia $|z| = R$, es decir, en el recinto ocupado por el fluido. Las líneas de corriente para este caso están representadas en la fig. 29. Si $|\Gamma| = 4\pi R\,|U|$, resulta solamente un punto crítico, situado en la intersección de la circunferencia $|z| = R$ con el eje imaginario (fig. 30). Finalmente, para $|\Gamma| < 4\pi R\,|U|$, igual que en el caso de una corriente sin circulación, existen dos puntos críticos situados en la circunferencia $|z| = R$ que son simétricos respecto del eje imaginario:

$$\pm\sqrt{R^2 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi U}\right)^2} + i\frac{\Gamma}{4\pi U}$$

(fig. 31).

2.5. En el apartado anterior se resolvió el problema de la circundación del círculo (del cilindro circular). Partiendo de aquí se puede resolver, mediante la transformación conforme, el problema de la circundación de un cuerpo de forma arbitraria. Sea L una

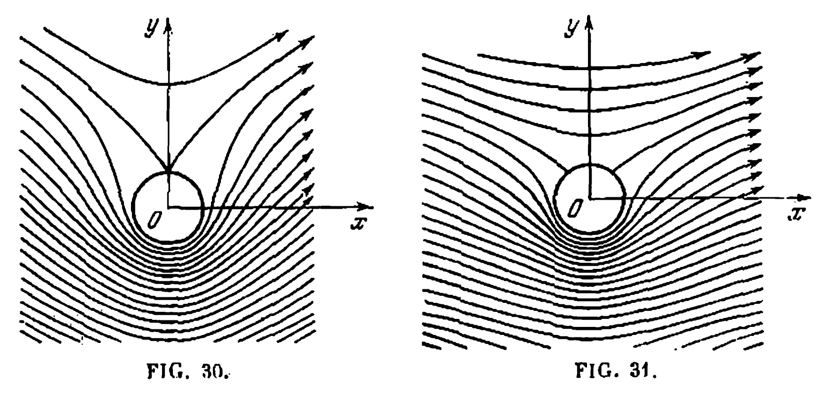


FIG. 30. FIG. 31.

curva cerrada de Jordan del plano z; se necesita construir el poten-

cial complejo de una corriente de fluido que circunda L y posee una velocidad dada $U + iV$ en el infinito. Transformemos conformemente la parte exterior a L en el exterior del círculo unidad $|t| > 1$, de modo que el punto $z = \infty$ se transforme en el punto $t = \infty$. Sea $t = F(z)$ la función que realiza esta transformación. En un entorno del punto $z = \infty$ ésta tendrá un desarrollo de la forma

$$F(z) = c_1 z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots,$$

donde $c_1 \neq 0$.

Para especificar, supondremos que el coeficiente c_1 es un número real positivo, es decir, $F'(\infty) > 0$. Con las condiciones indicadas $F(z)$ se determina unívocamente (para reducir este caso a la transformación del interior de una curva de Jordan en el interior de un círculo, es suficiente recurrir a las transformaciones auxiliares: $z' = \frac{1}{z - z_0}$, donde z_0 es un punto situado en el interior de L y $t' = \frac{1}{t}$). En esta transformación el potencial complejo buscado $f(z)$ se convertirá en el potencial complejo de una corriente de fluido que circunda al círculo unidad y, por consiguiente, tendrá la forma:

$$f(z) = f[F^{-1}(t)] = \varphi(t) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} t + (u - iv)\, t + \frac{u + iv}{t} + c$$

(véase la fórmula (2.4:1)). Como $\varphi'(\infty) = u - iv = \frac{f'(\infty)}{F'(\infty)} = \frac{U - iV}{F'(\infty)}$), la fórmula hallada puede escribirse en la forma siguiente:

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \operatorname{Ln} F(z) + \frac{U - iV}{F'(\infty)} F(z) + \frac{U + iV}{F'(\infty) F(z)} + c. \quad (2.5:1)$$

En esta fórmula, además de la constante arbitraria c, que no desempeña papel alguno, figura también un coeficiente real Γ. Demostremos que éste debe elegirse igual a la circulación de la velocidad de la corriente a lo largo de cualquier curva cerrada que encierre en su interior a la curva L, por ejemplo, a lo largo de la imagen γ_r de la circunferencia $|t| = r > 1$ en la transformación $z = F^{-1}(t)$. En efecto,

$$\int_{\gamma_r} f'(z)\, dz = \operatorname*{Var}_{\gamma_r} f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname*{Var}_{\gamma_r} [\operatorname{Arg} F(z)].$$

Pero, cuando z recorre γ_r una vez en sentido positivo, $t = F(z)$ recorre la circunferencia una sola vez en la misma dirección; por esta razón $\operatorname*{Var}_{\gamma_r} \operatorname{Arg} F(z) = 2\pi$ y

$$\int_{\gamma_r} f'(z)\, dz = \Gamma,$$

de dondo se deduce lo que se afirmaba.

En resumen, el potencial complejo de la corriente de un fluido que circunda un circuito L, se determina por la fórmula (2.5:1), donde Γ es la circulación de la corriente, $U + iV$ es la velocidad en el punto del infinito y $F(z)$ es la función que transforma conformemente el exterior del circuito L en el exterior del círculo unidad de modo que $F(\infty) = \infty$ y $F'(\infty) > 0$.

Apliquemos esta fórmula para hallar el potencial complejo de una corriente de fluido que circunda el perfil de Joukowski — Chapliguin (el perfil del ala de un aeroplano con el borde anterior redondeado).

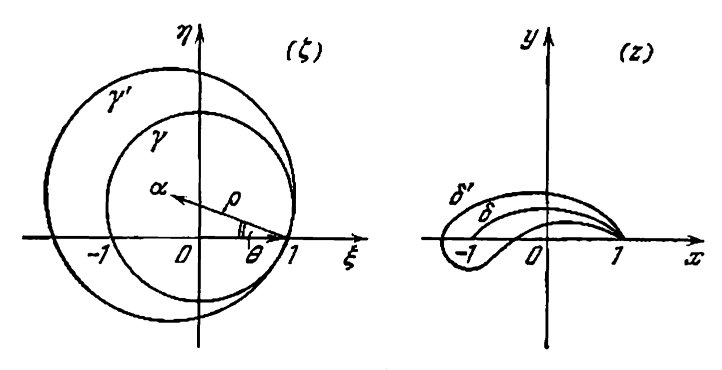


FIG. 32.

Para construir un perfil semejante, consideremos dos circunferencias γ y γ' en el plano ζ, de modo que una de ellas, γ, pase por los puntos ± 1 y sea tangente interior a γ' en el punto 1. Como ya sabemos, en la transformación $z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$ a la circunferencia γ le corresponde un arco δ de circunferencia con los extremos ± 1 y la parte exterior a γ se transforma conformemente en el exterior a δ (t. I, ap. 4,9, cap. segundo). Por consiguiente, la circunferencia γ' se transformará biunívocamente en una curva cerrada δ' perteneciente a la parte exterior a δ (a excepción de un solo punto $z = 1$ que es común con δ). Como $z = 1$ es la imagen del punto $\zeta = 1$ y $\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) = \frac{\zeta^2 - 1}{2\zeta^2}$ tiene un cero simple en este punto, los ángulos con los vértices en el punto $\zeta = 1$ tienen que aumentar dos veces en la transformación considerada. Pero, según la condición, el ángulo formado por γ y γ' es igual a cero. Por lo tanto, δ y δ' también tienen que formar entre sí en el punto $z = 1$ un ángulo igual a cero. La forma de la curva δ' está representada en la fig. 32.

Este es el perfil de Joukowski-Chapliguin. Su forma y dimensiones pueden variarse, en primer lugar, cambiando las circunferencias γ y γ' y, en segundo lugar, aplicando una transformación homotética.

Para aplicar la fórmula (2.5:1) al estudio de la corriente que circunda el perfil construido, no queda más que hallar la función que transforma conformemente la parte exterior a la curva δ' en el exterior al círculo unidad. Pero la función $z=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$ transforma conformemente la parte exterior a la curva δ' en el exterior de la circunferencia γ'. Además, ésta lleva el punto $\zeta=\infty$ al punto $z=\infty$ y su derivada en el punto $\zeta=\infty$ tiene el valor $\frac{1}{2}$. Si el centro de la circunferencia γ' está situado en el punto α y el radio es igual a ρ, entonces la función $t=\frac{1}{\rho}(\zeta-\alpha)$ transforma el exterior de γ' en el exterior del círculo unidad. Por esta razón, la función $z=\frac{1}{2}[(\rho t+\alpha)+(\rho t+\alpha)^{-1}]$ transforma el exterior del círculo unidad en el exterior de δ', de modo que a $t=\infty$ le corresponde el punto $z=\infty$ y la derivada en el punto del infinito tiene el valor positivo $\frac{1}{2\rho}$. Por consiguiente, $t=F(z)$ es inversa respecto de la función construida, es decir, $F(z)=\frac{1}{\rho}(-\alpha+z+\sqrt{z^2-1})$, debiendo tomarse aquella rama de la última función que es infinita en el punto del infinito. Para ésta tenemos: $F'(\infty)=\frac{2}{\rho}$.

En resumen, el potencial complejo buscado tiene la forma:

$$f(z)=\frac{\Gamma}{2\pi i}\operatorname{Ln}\left[\frac{1}{\rho}\left(-\alpha+z+\sqrt{z^2-1}\right)\right]+ +\frac{U-iV}{2}\left(-\alpha+z+\sqrt{z^2-1}\right)+\frac{\rho^2(U+iV)}{2\left(-\alpha+z+\sqrt{z^2-1}\right)}+C. \quad (2.5:2)$$

De aquí que

$$f'(z)=\left[\frac{\Gamma}{2\pi i}\,\frac{1}{-\alpha+z+\sqrt{z^2-1}}+\frac{U-iV}{2}-\frac{\rho^2(U+iV)}{2\left(-\alpha+z+\sqrt{z^2-1}\right)^2}\right]\times \times\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right).$$

Para que la derivada $f'(z)$ y, por consiguiente, también la velocidad, esté acotada cerca del borde posterior del ala, es decir, en las proximidades del punto $z=1$, es necesario introducir la siguiente condición, que relaciona la magnitud de la circulación Γ con la velo-

cidad $U+iV$ y los parámetros α y ρ que determinan la forma del ala:

$$\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{1-\alpha}+\frac{U-iV}{2}-\frac{\rho^2(U+iV)}{2(1-\alpha)^2}=0,$$

de donde

$$\Gamma=\pi i\left[\frac{\rho^2(U+iV)}{1-\alpha}-(U-iV)(1-\alpha)\right].$$

En la fig. 32 se ve que $1-\alpha=\rho e^{-i\theta}$; haciendo también $U+iV=Ae^{i\varphi}$, obtenemos:

$$\Gamma=-2\pi A\rho \operatorname{sen}(\theta+\varphi). \tag{2.5:3}$$

Por consiguiente, la fórmula (2.5:2) adquiere definitivamente la forma siguiente:

$$f(z)=\frac{A\rho}{2}\left\{-\frac{2\operatorname{sen}(\theta+\varphi)}{i}\operatorname{Ln}[(\rho e^{-i\theta}-1)+\right.$$
$$+z+\sqrt{z^2-1}]+\frac{e^{-i\varphi}}{\rho}[(\rho e^{-i\theta}-1)+z+\sqrt{z^2-1}]+$$
$$\left.+\rho e^{i\varphi}\frac{1}{(\rho e^{-i\theta}-1)+z+\sqrt{z^2-1}}\right\}+C'. \tag{2.5:4}$$

Finalmente, calculemos la resultante de las fuerzas de presión de la corriente del fluido sobre el ala (la *fuerza de sustentación del ala del aeroplano*), relativa a aquella capa de fluido, de altura 1, para la cual se exponen todos los razonamientos.

Designemos sus proyecciones sobre los ejes coordenados mediante X e Y (como el movimiento es plano, esta fuerza es paralela al plano xy). Para ella se tiene la siguiente fórmula general de S. A. Chapliguin:

$$X-iY=\frac{id}{2}\int_C [f'(z)]^2\,dz, \tag{2.5:5}$$

donde d es la densidad del fluido y C es una curva cerrada rectificable cualquiera que contiene en su interior el contorno circundado.

Para calcular la integral (2.5:5) es suficiente tomar el residuo de la función $[f'(z)]^2$ respecto del punto del infinito. Pero en un entorno del punto del infinito se tiene:

$$[f'(z)]^2=\frac{A^2\rho^2}{4}\left\{-\frac{2\operatorname{sen}(\theta+\varphi)}{i}\frac{1}{\rho e^{-i\theta}-1+z+\sqrt{z^2-1}}+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-i\varphi}}{\rho}-\rho e^{i\varphi}\frac{1}{(\rho e^{i\theta}-1+z+\sqrt{z^2-1})^2}\right\}^2\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)^2=$$
$$=\frac{A^2\rho^2}{4}\left[\frac{e^{-i\varphi}}{\rho}+\frac{i\operatorname{sen}(\theta+\varphi)}{z}+\ldots\right]^2\left(2+\frac{1}{2z^2}+\ldots\right)^2=$$
$$=A^2e^{-2i\varphi}+2iA^2\rho e^{-i\varphi}\operatorname{sen}(\theta+\varphi)\frac{1}{z}+\ldots;$$

por lo cual el residuo buscado es igual a $-2iA^2\rho e^{-i\varphi}\operatorname{sen}(\theta+\varphi)$ y para la fuerza de sustentación del ala obtenemos la expresión

$$X-iY=-2\pi iA^2 d\rho e^{-i\varphi}\operatorname{sen}(\theta+\varphi)\,^*),$$

o bien, según la fórmula (2.5:3)

$$X-iY=iAe^{-i\varphi}\Gamma d=i(U-iV)\Gamma d$$

y, finalmente,

$$X+iY=-i(U+iV)\Gamma d. \qquad (2.5:6)$$

Hemos obtenido el célebre teorema de N. E. Joukowski: *La fuerza de sustentación del ala es ortogonal a la velocidad de la corriente en el punto del infinito y en valor absoluto es igual al producto de esta velocidad por la circulación de esta velocidad y por la densidad del fluido.*

Todos los detalles posteriores puede consultar el lector en los cursos de Hidromecánica [véase N. E. Kochin, I. A. Kibel y N. V. Rosé, Hidromecánica teórica, cap. I, (Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. I) o V. V. Gólubiev, Teoría del ala del aeroplano en una corriente de fluido plano-paralela, (В. В. Голубев, Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке)].

§ 3. FUNCIONES SUBARMONICAS. PRINCIPIO GENERALIZADO DEL MODULO MAXIMO Y SUS APLICACIONES

3.1. Este párrafo está dedicado al desarrollo posterior del principio del módulo máximo. Todos nuestros razonamientos se basan en la generalización del concepto de función armónica:

Una función real $h(x, y)$ se llama subarmónica en un recinto G, si satisface a las siguientes condiciones:

1) Está definida y es continua en todos los puntos del recinto G, a excepción, posiblemente, de una cantidad finita de puntos o puntos de alguna sucesión $\{(x_n, y_n)\}$ que carece de puntos de acumulación en el interior de G; en este caso, para cada punto excepcional (x_n, y_n) se cumple la relación

$$\lim_{(x,y)\to(x_n,y_n)} h(x,y)=-\infty,$$

---

*) Aquí se tiene en cuenta que el contorno C en la fórmula (2.5:5) se recorre en el sentido positivo, es decir, en dirección contraria a la del movimiento de las agujas del reloj.

por cuya razón hacemos:

$$h(x_n, y_n) = -\infty\ ^{*});$$

2) para cada punto $(x, y) \in G$ y para todos los valores suficientemente pequeños de ρ se cumple la desigualdad

$$h(x, y) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x + \rho\cos\alpha,\ y + \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,d\alpha. \qquad (3.1:1)$$

En virtud de esta definición toda función $u(x, y)$ armónica en un recinto es también subarmónica; para ella la desigualdad (3.1:1) se convierte en la igualdad

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \rho\cos\alpha,\ y + \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,d\alpha.$$

El módulo de una función $f(z)$ analítica en un recinto dado, es un ejemplo importante de función subarmónica que, por lo general, no es armónica. En este caso, en cualquier punto $z \in G$ y para todos los valores suficientemente pequeños de ρ, se tiene:

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + \rho e^{i\alpha})|\,d\alpha,$$

y se alcanza el signo de igualdad aquí para $\rho > 0$ solamente cuando $f(z) \equiv \mathrm{const}$ (véase el t. I, fórmula (3.1:6), cap. tercero). De aquí se deduce que $|f(z)|$ es una función subarmónica, pero no armónica (si $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$).

Otro ejemplo importante de función subarmónica es $\ln|f(z)|$ ($f(z) \not\equiv 0$). Esta función es armónica en todos los puntos a excepción de los ceros de la función $f(z)$, en los cuales tiene polos logarítmicos y es igual a $-\infty$. Si z no es un cero de la función $f(z)$, entonces para todos los valores suficientemente pequeños de ρ se cumple la igualdad

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(z + \rho e^{i\alpha})|\,d\alpha;$$

---

*) Ordinariamente, la condición 1) en la definición de función subarmónica se sustituye por otra, más general:

1') $h(x_0, y_0) \geqslant \overline{\lim\limits_{(x,\,y)\to(x_0,\,y_0)}}\ h(x, y)$

para cualquier punto (x_0, y_0) del recinto G, siendo además denso en todo en el recinto G el conjunto de puntos en los cuales $h(x, y)$ toma valor finito. Con esta condición, la continuidad se sustituye aquí por la semicontinuidad. No obstante, en nuestro curso no utilizaremos esta generalización. Todo lo que se refiere a la teoría general de las funciones subarmónicas y sus aplicaciones puede encontrarse en la monografía: I. I. Prívalov, Funciones subarmónicas (И. И. Привалов, Субгармонические функции, Главная редакция технико-теоретической литературы, М. — Л., 1937).

si z es un cero de la función $f(z)$, entonces $\ln |f(z)| = -\infty$ y, por consiguiente,

$$\ln |f(z)| < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(z+\rho e^{i\alpha})| \, d\alpha.$$

L e m a 1. *Si $h(z)$ es una función real, definida en un recinto acotado G, y $M = \sup_{z \in G} h(z)$ (M puede ser infinito), entonces en el dominio $\overline{G}$ existe al menos un punto, en cualquier entorno del cual el extremo superior de la función $h(z)$ es igual a M.*

Para demostrarlo, emplearemos el método de reducción a lo absurdo. Si el lema no es cierto, para cada punto $z \in \overline{G}$ existe un entorno en el cual el extremo superior de la función $h(z)$ es menor que M. Según el lema de Heine-Borel, un conjunto finito de tales entornos cubre $\overline{G}$. Eligiendo el máximo de los extremos superiores de la función $h(z)$ en los entornos indicados, obtendremos como extremo superior de la función $h(z)$ en todo el recinto G un número menor que M, lo cual contradice a la definición del número M. Así, pues, el lema 1 queda demostrado.

L e m a 2 (f u n d a m e n t a l). *Si $h(z)$ es una función subarmónica en un recinto acotado G, y en cada punto ζ de la frontera del recinto G se cumple la relación*

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} \, h(z) \leqslant 0,$$

entonces $h(z) \leqslant 0$ en todos los puntos del recinto G; además, el signo de igualdad para algún punto interior es posible solamente cuando $h(z) \equiv 0$.

Sea $M = \sup h(z)$ y sea E el conjunto de los puntos del dominio $\overline{G}$, en cualquier entorno de los cuales el extremo superior de la función $h(z)$ coincide con M. Según el lema 1, este conjunto no es vacío.

Supongamos primero que ninguno de los puntos interiores del recinto $\overline{G}$ pertenece a E. Entonces existe al menos un punto frontera $\zeta \in E$, y como, según la hipótesis del lema 2, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un entorno del punto ζ, en cuyos puntos $h(z) < \varepsilon$, el extremo superior de la función $h(z)$ en este entorno no puede superar a ε. Por otra parte, éste tiene que coincidir con M. De aquí resulta que $M \leqslant 0$ y que en los puntos interiores del recinto tiene que cumplirse la desigualdad $h(x, y) < M$. Por consiguiente, para el caso en que E no tiene puntos interiores en G, el lema queda demostrado.

Supongamos ahora que existen puntos interiores del recinto G pertenecientes a E. Designemos este conjunto con $\mathscr{E}$. Como la función subarmónica es continua (en el sentido generalizado) en el

recinto G, el valor de $h(z)$ en todos los puntos del conjunto $\mathscr{E}$ tiene que ser igual a M. En efecto, para un punto $z_0 \in G$, en el cual $h(z_0) < M$, existe un entorno, donde $h(z) < M - \delta$ (δ es un número positivo), y, por consiguiente, el extremo superior de la función $h(z)$ en tal entorno no puede ser igual a M. De aquí se deduce, en particular, que M, siendo uno de los valores de la función subarmónica, tiene que ser menor que $+\infty$. Por otra parte, tiene que ser $\sup h(z) = M > -\infty$, puesto que una función subarmónica puede tomar el valor $-\infty$ solamente en algunos puntos del recinto G. Así, pues, M es un número finito.

Demostremos que $\mathscr{E}$ es un conjunto abierto. En efecto, supongamos que $z_0 \in \mathscr{E}$ y que el número $\rho_0 > 0$ es tal que para todos los valores $\rho < \rho_0$ se verifica la desigualdad

$$M = h(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + \rho e^{i\alpha})\, d\alpha \qquad (3.1:2)$$

(tal ρ_0 existe en virtud de la definición de función subarmónica). Entonces en el círculo $|z - z_0| < \rho_0$ no puede haber ningún punto z_1 en el cual $h(z_1) < M$. En efecto, en caso contrario en cierto entorno del punto z_1 se cumpliría la desigualdad $h(z) < M - \delta$, donde δ es un número positivo, y, por consiguiente, para $\rho = |z_1 - z_0|$ la integral $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + \rho e^{i\alpha})\, d\alpha$ sería menor que M, lo cual contradice a la desigualdad (3.1:2). Por lo tanto, para cada punto $z_0 \in \mathscr{E}$ existe un entorno en el cual $h(z) = M$. Por esta razón, el entorno indicado pertenece a $\mathscr{E}$, y $\mathscr{E}$ es un conjunto abierto. Como en todos los puntos del conjunto $\mathscr{E}$ se cumple la igualdad $h(z) = M$, y la función $h(z)$ es continua, también en cualquier punto $z' \in G$ que sea punto de acumulación para $\mathscr{E}$, tiene que ser $h(z') = M$. Así, pues, todo punto del recinto G que sea punto de acumulación para $\mathscr{E}$, pertenece a $\mathscr{E}$.

De las propiedades observadas del conjunto $\mathscr{E}$ se deduce, según el lema c) del ap. 4.5, cap. primero (t. I), que $\mathscr{E} = G$. Por consiguiente, $h(z) \equiv M$; pero entonces, para cualquier punto frontera ζ del recinto G se cumple la relación

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\, h(z) = \lim_{z\to\zeta} h(z) = M,$$

y de aquí, según la hipótesis del lema 2, obtenemos que $M \leqslant 0$.

En resumen, en todos los casos $M = \sup_G h(z) \leqslant 0$, y la igualdad $h(z_0) = 0$ en algún punto del recinto G significa que $M \geqslant 0$ y, por consiguiente, $M = 0$, y luego, por lo que acabamos de demostrar, resulta que $h(z) \equiv 0$.

T e o r e m a 1. *Una función real $u(x, y)$ que es continua en un recinto G y en cada punto $z_0 \in G$ satisface a la relación*

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho\cos\alpha,\quad y_0 + \rho\operatorname{sen}\alpha)\,d\alpha,$$

donde

$$0 < \rho < \rho_0 = \rho_0(z_0),$$

es armónica en este recinto.

Evidentemente, es suficiente demostrar este teorema para un entorno de un punto arbitrario $z_0 \in G$.

Construyamos una función $u^*(x, y)$ que sea continua en un círculo $|z - z_0| \leqslant \rho$, perteneciente a G, que coincida con $u(x, y)$ en todos los puntos de la circunferencia γ: $|z - z_0| = \rho$, y sea armónica en el interior de γ. Como ya sabemos, tal función existe (véase el ap. 1.5).

La diferencia $u^*(x, y) - u(x, y)$ es continua en el círculo cerrado $|z - z_0| \leqslant \rho$ y para cada punto z_1 del interior de γ se verifica la igualdad

$$u^*(x_1, y_1) - u(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u^*(x_1 + \rho_1\cos\alpha,\ y_1 + \rho_1\operatorname{sen}\alpha) - $$
$$- u(x_1 + \rho_1\cos\alpha,\ y_1 + \rho_1\operatorname{sen}\alpha)]\,d\alpha$$

para todos los valores suficientemente pequeños de ρ_1. Por ello, la función $u^*(x, y) - u(x, y)$ es subarmónica en el interior de γ. Pero ésta se anula en todos los puntos de la circunferencia γ y, además, se anula también en el centro z_0 de la misma, puesto que en él

$$u^*(x_0, y_0) - u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u^*(x_0 + \rho\cos\alpha,\ y_0 + \rho\operatorname{sen}\alpha) - $$
$$- u(x_0 + \rho\cos\alpha,\ y_0 + \rho\operatorname{sen}\alpha)]\,d\alpha = 0.$$

Por consiguiente, según el lema 2, se tiene:

$$u^*(x, y) - u(x, y) \equiv 0$$

en el interior de γ.

Hemos demostrado que $u(x, y)$ es armónica en un entorno de cada punto del recinto G. El teorema queda demostrado.

T e o r e m a 2. (P r i n c i p i o g e n e r a l i z a d o d e l m ó d u l o m á x i m o). *Sea $h(x, y) = h(z)$ una función subarmónica en un recinto acotado G, y sea $u(x, y) = u(z)$ una función armónica en el recinto G. Si para cada punto frontera ζ del recinto G, a excepción, posiblemente, de una cantidad finita de puntos $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$,*

se cumple la desigualdad

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\,[h(z)-u(z)]\leqslant 0, \qquad (3.1:3)$$

y para cada punto $\zeta_j\,(j=1,\,\ldots,\,m)$

$$\overline{\lim_{z\to\zeta_j}}\,[h(z)-u(z)]<+\infty, \qquad (3.1:4)$$

entonces en todo el recinto G se verifica la desigualdad

$$h(z)\leqslant u(z),$$

en la cual se alcanza la igualdad en algún punto interior del recinto solamente cuando

$$h(z)\equiv u(z).$$

Este teorema muestra que la función $u(x, y)$ que satisface a las condiciones del teorema es una función armónica mayorante de la función $h(x, y)$ en el recinto G. Brevemente, pero no con la exactitud precisa, el teorema 2 se puede enunciar así:

Si una función armónica $u(z)$ es superior a una función subarmónica $h(z)$ en todos los puntos de la frontera del recinto, a excepción, posiblemente, de una cantidad finita de ellos, entonces es superior a la misma en el interior del recinto.

La admisión de puntos excepcionales ζ_j, en los cuales, *a priori*, puede no cumplirse la condición (3.1:3), está dictado por los intereses de las aplicaciones del teorema 2. Obsérvese que la condición, según la cual, para los puntos excepcionales tiene que cumplirse la relación (3.1:4), es esencial para la justeza del teorema. En efecto, el núcleo de Poisson, por ejemplo:

$$P(r,\theta)=\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos\theta}$$

representa una función armónica y, por consiguiente, subarmónica, la cual, en cualquier punto de la circunferencia $|\zeta|=\rho$, a excepción de $\zeta=\rho$, satisface a la condición

$$\lim_{(r,\,\theta)\to(\rho,\,\alpha)} P(r,\theta)=0.$$

Por esta razón, la función armónica $u(r,\theta)\equiv 0$ puede considerarse como mayorante respecto de $P(r,\theta)$ en toda la circunferencia $|\zeta|=\rho$, a excepción de un punto $\zeta=\rho$. Sin embargo, en el interior de la circunferencia

$$P(r,\theta)>0=u(r,\theta).$$

La explicación consiste en que $P(r,\theta)$ toma valores arbitrariamente grandes en un entorno del punto ρ. Por ello, la función idénti-

camente nula, así como cualquier otra función acotada, no puede ser mayorante para $P(r, \theta)$ en el círculo $|z| < \rho$.

Pasando a la demostración del teorema, introduzcamos las funciones auxiliares:

$$v_j(z) = \ln|z - \zeta_j| \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Evidentemente, $v_j(z)$ es armónica para $z \neq \zeta_j$ y, en particular, es armónica en el recinto G. En el punto $z = \zeta_j$ es igual a $-\infty$. Si R es el diámetro del recinto G (es decir, es la distancia máxima entre los pares de puntos del dominio $\overline{G}$), entonces para cada función $v_j(z)$ se cumple la desigualdad

$$v_j(z) \leqslant \ln R, \qquad z \in \overline{G}.$$

Por ello, las funciones $v_j(z) - \ln R = u_j(z)$ toman valores no positivos en los puntos del dominio $\overline{G}$, mientras que en lo demás poseen las mismas propiedades que las funciones $v_j(z)$.

Introduciendo un parámetro positivo ε, el cual tenderá a continuación a cero, formemos la función

$$d_\varepsilon(z) = h(z) - u(z) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} u_j(z).$$

Como, para cada punto $z_0 \in G$ y para todas las circunferencias de radio suficientemente pequeño con el centro en z_0, el valor $h(z_0)$ no supera al valor medio de la función $h(z)$ tomado sobre esta circunferencia, mientras que los valores de las funciones $u(z)$ y $u_j(z)$ coinciden con los valores medios correspondientes, $d_\varepsilon(z_0)$ no superará al valor medio de la función $d_\varepsilon(z)$ sobre cualquier circunferencia de radio suficientemente pequeño con el centro en z_0. Por consiguiente, la función $d_\varepsilon(z)$ es subarmónica en el recinto G. Además, en cada punto frontera $\zeta \neq \zeta_j$ se cumple la desigualdad

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}}\, d_\varepsilon(z) = \overline{\lim_{z \to \zeta}}\, \left[h(z) - u(z) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} u_j(z)\right] \leqslant 0,$$

y en los puntos $\zeta = \zeta_j$, la relación $\lim\limits_{z \to \zeta_j} d_\varepsilon(z) = -\infty < 0$ (puesto que las funciones $h(z) - u(z)$ y $u_k(z)$ $(k \neq j)$ están acotadas superiormente en los entornos de los puntos ζ_j, y $u_j(z) \to -\infty$ para $z \to \zeta$). De aquí sacamos la conclusión de que a $d_\varepsilon(z)$ es aplicable el lema 2 y, por consiguiente,

$$d_\varepsilon(z) \leqslant 0, \qquad z \in G,$$

o bien

$$h(z) \leqslant u(z) - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} u_j(z).$$

Cuando ε tiende a cero, resulta:

$$h(z) \leqslant u(z),$$

es decir, $u(z)$ es mayorante para $h(z)$ en el recinto G, como se quería demostrar.

No queda más que agregar que de lo demostrado se deduce la relación

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}}\, [h(z) - u(z)] \leqslant 0$$

para cualquier punto frontera ζ del recinto G (incluyendo también aquellos puntos ζ_j que fueron excluidos en las condiciones del teorema). Por esta razón, si en algún punto interior $z_0 \in G$ se cumple la igualdad

$$h(z_0) - u(z_0) = 0,$$

entonces, según el lema 2, se deduce que la función subarmónica $h(z) - u(z)$ es idénticamente nula en el recinto G, es decir, $h(z) \equiv \equiv u(z)$. El teorema 2 queda completamente demostrado.

3.2. He aquí algunas aplicaciones del teorema 2 del ap. 3.1. Sea $f(z)$ una función analítica en el anillo circular D: $r_1 < |z| < r_2$, la cual, por lo general, puede no ser uniforme, pero cuyo módulo es uniforme en D y satisface a las siguientes condiciones:

$$\overline{\lim_{\substack{z \to \zeta \\ |\zeta| = r_1}}} \ln |f(z)| \leqslant \ln M_1, \qquad \overline{\lim_{\substack{z \to \zeta \\ |\zeta| = r_2}}} \ln |f(z)| \leqslant \ln M_2.$$

Como $\ln |f(z)|$ es una función subarmónica en el recinto D, la función armónica en el mismo recinto cuyos valores coincidan con $\ln M_1$ en γ_1: $|\zeta| = r_1$ y con $\ln M_2$ en γ_2: $|\zeta| = r_2$, tiene que ser mayorante para $\ln |f(r)|$ en el anillo circular D. Es fácil construir tal función partiendo de la función armónica $\ln |z|$, la cual toma el valor $\ln \rho$ en la circunferencia $|z| = \rho$.

Es obvio que la función

$$\ln M_1 \frac{\ln \frac{|z|}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

es armónica y toma el valor $\ln M_1$ en la circunferencia $|z| = r_1$ y el valor cero en la circunferencia $|z| = r_2$. Del mismo modo, la función

$$\ln M_2 \frac{\ln \frac{|z|}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

es armónica y toma el valor 0 en la circunferencia $|z| = r$, y el valor $\ln M_2$ en la circunferencia $|z| = r_2$. La suma de estas funciones

$$u(z) = \ln M_1 \frac{\ln \frac{|z|}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} + \ln M_2 \frac{\ln \frac{|z|}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

es continua en $\bar{D}$ y armónica en D, y toma el valor $\ln M_1$ en la circunferencia $|z| = r_1$ y el valor $\ln M_2$ en la circunferencia $|z| = r_2$. Esta función es precisamente mayorante para la función $\ln |f(z)|$ en el recinto D, es decir,

$$\ln |f(z)| \leqslant \ln M_1 \frac{\ln \frac{|z|}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} + \ln M_2 \frac{\ln \frac{|z|}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \qquad (3.2{:}1)$$

para $r_1 < |z| < r_2$, alcanzándose el signo de igualdad para un punto interior del anillo cuando, y sólo cuando, $\ln |f(z)| \equiv u(z)$.

Como

$$v(z) = \ln M_1 \frac{\operatorname{Arg} \frac{z}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} + \ln M_2 \frac{\operatorname{Arg} \frac{z}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

es, evidentemente, conjugada con $u(z)$, la función $\operatorname{Arg} f(z)$, siendo la conjugada de $\ln |f(z)|$, puede diferenciarse en este último caso de $v(z)$ solamente en una constante aditiva. Por consiguiente, en el caso de igualdad en (3.2:1):

$$\operatorname{Ln} f(z) = \ln |f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z) = iC + u(z) + iv(z) =$$

$$= iC + \ln M_1 \frac{\ln \frac{z}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} + \ln M_2 \frac{\ln \frac{z}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

de donde

$$f(z) = Az^{\frac{\ln M_2 - \ln M_1}{\ln r_2 - \ln r_1}},$$

siendo

$$A = \exp\left(iC + \frac{\ln M_1 \ln r_2 - \ln M_2 \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}\right).$$

Consideremos tres valores cualesquiera de $|z|$: ρ_1, ρ y ρ_2, que satisfagan las desigualdades:

$$r_1 < \rho_1 < \rho < \rho_2 < r_2.$$

Entonces, haciendo la notación: $M(\rho) = \max\limits_{|z|=\rho} f(z)$ y basándose en las desigualdades (3.2:1) tendremos:

$$\ln M(\rho) \leqslant \ln M(\rho_1) \frac{\ln \frac{\rho}{\rho_2}}{\ln \frac{\rho_1}{\rho_2}} + \ln M(\rho_2) \frac{\ln \frac{\rho}{\rho_1}}{\ln \frac{\rho_2}{\rho}}. \qquad (3.2:2)$$

Esta última relación expresa el llamado teorema de Hadamard de los tres círculos. Esto posee un sencillo significado geométrico.

Consideremos $\eta = \ln M(\rho)$ como función de $\xi = \ln \rho$:

$$\eta = \varphi(\xi).$$

Entonces, haciendo $\ln \rho_1 = \xi_1$, $\ln \rho_2 = \xi_2$ y $\ln M(\rho_1) = \eta_1$, $\ln M(\rho_2) = \eta_2$, escribamos la desigualdad obtenida en la forma

$$\eta \leqslant \eta_1 \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_1} + \eta_2 \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \qquad (\xi_1 < \xi < \xi_2).$$

Pero

$$\eta = \eta_1 \frac{\xi_2 - \xi}{\xi_2 - \xi_1} + \eta_2 \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}$$

es la ecuación de una recta que pasa por los puntos (ξ_1, η_1) y (ξ_2, η_2), es decir, es la ecuación de una cuerda de la gráfica de la función $\eta = \varphi(\xi)$ en coordenadas cartesianas ξ y η. Por esta razón, el teorema de los tres círculos expresa aquella propiedad de $\ln M(\rho)$, considerado como función de $\ln \rho$, según la cual cualquier arco de la curva $\ln M(\rho) = \varphi(\ln \rho)$ no está situado más arriba de la cuerda correspondiente, o en otras palabras, muestra que esta curva o la función misma $\eta = \varphi(\xi)$ es convexa. Obtenemos, definitivamente, el siguiente enunciado compacto del teorema de los tres círculos:

El logaritmo del módulo máximo de una función analítica en un anillo circular D, es una función convexa del logaritmo del radio de la circunferencia, sobre la cual se toma el máximo.

Para obtener otra aplicación más del teorema 2, ap. 3.1, consideremos una función analítica $f(z)$ en el círculo K: $|z| < R$ que satisfaga a las condiciones:

$$\varlimsup_{\substack{z \to \zeta \\ \zeta \in \sigma}} \ln |f(z)| \leqslant \ln m, \quad \varlimsup_{\substack{z \to \zeta \\ \zeta \in \Sigma}} \ln |f(z)| \leqslant \ln M, \qquad (3.2:3)$$

donde σ y Σ denotan dos arcos complementarios entre sí de la circunferencia Γ: $|z| = R$, considerados como intervalos, es decir, sin sus extremos ζ_1 y ζ_2, comunes para σ y Σ. Además, supondremos que en los entornos de los puntos ζ_1 y ζ_2 la función $\ln |f(z)|$ está acotada superiormente. En virtud del teorema 2, para obtener una

función que sea mayorante para $\ln |f(z)|$ en el interior de K, es suficiente hallar una función que sea continua en el círculo cerrado $|z| \leqslant R$, a excepción, posiblemente, de los puntos ζ_1 y ζ_2, en cuyos entornos tiene que estar acotada inferiormente, que sea armónica en el círculo K y que tome en los puntos del arco σ el valor $\ln m$ y en los puntos del arco Σ, el valor $\ln M$.

Para mayor precisión, supongamos que las designaciones ζ_1 y ζ_2 para los extremos comunes de los arcos σ y Σ se han elegido de tal

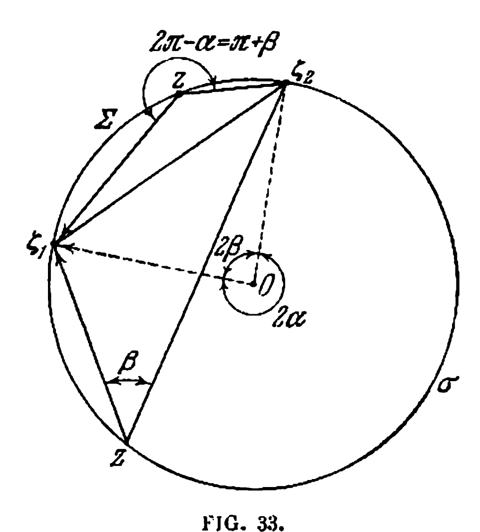


FIG. 33.

modo que, al recorrer la circunferencia en sentido positivo comenzando desde el punto ζ_1, el movimiento se efectúa primeramente a lo largo del arco σ y después, pasando por ζ_2, se llega al arco Σ. Supongamos luego que 2α y 2β $(0 < \alpha, 0 < \beta, \alpha + \beta = \pi)$ son los ángulos bajo los cuales se ven los arcos σ y Σ desde el punto $z = 0$, respectivamente. Consideremos la función armónica multiforme $\operatorname{Arg}\frac{\zeta_1 - z}{\zeta_2 - z}$, que representa la magnitud del ángulo bajo el cual se ve la cuerda (ζ_1, ζ_2) desde el punto z. Entre los valores que toma la función $\operatorname{Arg}\frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ en el punto $z = 0$, uno y sólo uno está comprendido entre 0 y 2π. De acuerdo a las notaciones hechas, éste es igual a $2\pi - 2\alpha = 2\beta$ (fig. 33). Designemos mediante $v(z)$ la rama uniforme y continua en el interior del círculo de la función $\operatorname{Arg}\frac{\zeta_1 - z}{\zeta_2 - z}$ que satisface

a la condición

$$v(0) = 2\beta.$$

Todos los valores de la función $v(z)$ en el interior del círculo están comprendidos entre 0 y 2π, puesto que esta función, variando continuamente desde su valor 2β, $0 < 2\beta < 2\pi$, no puede anularse ni tomar el valor 2π. Del significado geométrico de $v(z)$ se deduce también que en los puntos del arco σ ésta toma el valor constante β y en los puntos del arco Σ, el valor constante $2\pi - \alpha = \pi + \beta$ (fig. 33).

Por consiguiente, la función armónica $u(z) = \frac{1}{\pi}[v(z) - \beta]$ se anula en los puntos del arco σ y toma el valor 1 en los puntos del arco Σ. Como esta última está acotada en los entornos de los puntos ζ_1 y ζ_2, del teorema 2 se deduce que $u(z)$ es menor que la unidad en el círculo K, puesto que la unidad es mayorante para ésta en la circunferencia Γ. Aplicando este mismo teorema a la función armónica $-u(z)$, para la cual el número 0 es mayorante en Γ, sacamos la conclusión de que $-u(z) < 0$ en el interior de Γ, es decir, $u(z) > 0$. Así, pues, $u(z)$ satisface en el interior de K a la desigualdad

$$0 < u(z) < 1;$$

su valor en el punto $z=0$ es $u(0) = \frac{1}{\pi}[v(0) - \beta] = \frac{1}{\pi}\beta$.

Formemos, finalmente, la función armónica

$$\ln m + (\ln M - \ln m)\, u(z).$$

Esta es igual a $\ln m$ en los puntos del arco σ, es igual a $\ln M$ en los puntos del arco Σ y está acotada en los entornos de los puntos ζ_1 y ζ_2. Por ello, representa la mayorante armónica de $\ln|f(z)|$ buscada:

$$\ln|f(z)| \leqslant \ln m + (\ln M - \ln m)\, u(z),$$

o bien,

$$\ln|f(z)| \leqslant \ln M u(z) + \ln m\,(1 - u(z)),$$

de donde

$$|f(z)| \leqslant M^{u(z)} m^{1-u(z)}. \tag{3.2:4}$$

Esta desiguldad es válida en el interior de K. En particular, en el punto $z=0$ se tiene:

$$|f(0)| \leqslant M^{\frac{\beta}{\pi}} m^{\frac{\alpha}{\pi}}. \tag{3.2:4'}$$

La desigualdad (3.2:4) expresa el llamado teorema de las dos constantes (para el caso particular en que el recinto es un círculo).

Si $m < M$, de las desigualdades (3.2:3) sólo se deduce inmediatamente que

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} |f(z)| \leqslant M$$

para todos los puntos $\zeta \in \Gamma$, a excepción, posiblemente, de dos puntos: ζ_1 y ζ_2, en cuyos entornos $\overline{\lim} |f(z)| < \infty$. Por esto motivo, según el teorema 2, ap. 3.1, se puede afirmar que en el interior del círculo K:

$$|f(z)| \leqslant M. \qquad (3.2:5)$$

La desigualdad (3.2:4) muestra que si no se sustituyen los dos números m y M por el mayor de ellos M, sino que se utilizan ambos (las dos constantes), entonces resulta una cota mucho mejor para el módulo de $f(z)$. En efecto, la razón de $M^{u(z)} m^{1-u(z)}$ a M es

$$\left(\frac{m}{M}\right)^{1-u(z)},$$

la cual es menor que la unidad, puesto que $m < M$ y $0 < u(z) < 1$ en el interior de K.

Para la ilustración del teorema de las dos constantes, consideremos una sucesión de funciones analíticas $\{f_n(z)\}$, uniformemente acotadas en valor absoluto en el círculo K,

$$|f_n(z)| < M,$$

para las cuales en un arco fijado σ de la circunferencia Γ se cumplen las desigualdades:

$$\overline{\lim_{\substack{z \to \zeta, \\ \zeta \in \sigma}}} |f_n(z)| \leqslant \varepsilon_n,$$

donde $\{\varepsilon_n\}$ es una sucesión de números positivos convergente hacia cero ($\varepsilon_n \leqslant 1$).

Demostremos que en estas condiciones la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente hacia 0 en el interior de K.

En efecto, si Σ es el arco de la circunferencia Γ que es complementario a σ, entonces, debido a las condiciones enunciadas, se tiene:

$$\overline{\lim_{\substack{z \to \zeta \\ \zeta \in \sigma}}} \ln |f_n(z)| \leqslant \ln \varepsilon_n, \quad \overline{\lim_{\substack{z \to \zeta, \\ \zeta \in \Sigma}}} \ln |f_n(z)| \leqslant \ln M.$$

Según el teorema de las dos constantes obtenemos:

$$|f_n(z)| \leqslant M^{u(z)} \varepsilon_n^{1-u(z)} \leqslant \mu \varepsilon_n^{1-u(z)},$$

donde $\mu = \max(M, 1)$ ($0 < u(z) \leqslant 1$, y si $M > 1$, entonces $M^{u(z)} < M$, mientras que si $M \leqslant 1$, resulta, $M^{u(z)} \leqslant 1$). En cada

círculo cerrado $|z| \leqslant r < R$ la función armónica continua $u(z)$ tiene máximo $\eta(r)$, el cual necesariamente es menor que la unidad (puesto que $u(z) < 1$ en todos los puntos del círculo K). Por ello, para $|z| \leqslant r$ obtenemos:

$$|f_n(z)| \leqslant \mu \varepsilon_n^{1-\eta(r)},$$

de donde se deduce la convergencia uniforme a cero de la sucesión $\{f_n(z)\}$.

Sea, en particular, $f_n(z) = f(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, de modo que se tiene una función analítica, acotada en valor absoluto en el círculo unidad, la cual satisface a las relaciones

$$\overline{\lim_{\substack{z \to \zeta, \\ \zeta \in \sigma}}} |f(z)| \leqslant \varepsilon_n \; (\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0), \text{ es decir, } \lim_{\substack{z \to \zeta, \\ \zeta \in \sigma}} f(z) = 0$$

para cierto arco de la circunferencia unidad. Entonces, según lo demostrado,

$$f(z) = \lim f(z) \equiv 0.$$

Así, pues, si una función $f(z)$ que es analítica y está acotada en valor absoluto en el círculo unidad, se anula en algún arco de la circunferencia unidad, entonces $f(z) \equiv 0$.

En el capítulo octavo obtendremos de otro modo el mismo resultado, sin suponer que el módulo está acotado. Naturalmente, el hecho señalado aquí es solamente un caso muy particular del teorema de Luzin-Priválov.

3.3. El teorema 2, ap. 3.1, en el caso particular en que $h(z) = |f(z)|$, donde $f(z)$ es una función analítica en el recinto G, $u(z) \equiv C$, y en Γ solamente hay un punto excepcional $\zeta = \zeta_0$, dice:

Si para cada punto frontera $\zeta \neq \zeta_0$ del recinto G se cumple la desigualdad

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} |f(z)| \leqslant C, \tag{3.3:1}$$

y en el punto ζ_0

$$\overline{\lim_{z \to \zeta_0}} |f(z)| < \infty, \tag{3.3:2}$$

entonces $|f(z)| \leqslant C$ en todos los puntos de G y la igualdad $|f(z_0)| = C$ $(z_0 \in G)$ es posible solamente cuando $f(z) \equiv$ const.

Esta proposición puede precisarse considerablemente si se conoce el carácter de la frontera del recinto G en un entorno del punto ζ_0.

Supongamos que en el punto ζ_0 la frontera del recinto G forma un ángulo de magnitud $\alpha\pi$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2)$; entonces se puede omitir la condición (3.3:2), suponiendo, sin embargo, que el crecimiento posible de $|f(z)|$ cuando z tiende a ζ_0 no es demasiado grande. Aquí se expondrá la proposición correspondiente, suponiendo para precisar

que el punto $\zeta_0 = \infty$ y que el recinto mismo G tiene la forma de un ángulo de magnitud $\alpha\pi$ $(0 < \alpha \leqslant 2)$ o la forma de una franja (caso de un ángulo de magnitud cero).

Teorema de Phragmén-Lindelöf. *Sea G un ángulo de magnitud $\alpha\pi$ $(0 < \alpha \leqslant 2)$ y sea $f(z)$ una función analítica en el recinto G que satisface a las condiciones:*

1) *para cada punto finito ζ de la frontera del recinto G,*

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}\, |f(z)| \leqslant C \; (< \infty); \tag{3.3:3}$$

2)

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} < \frac{1}{\alpha}, \tag{3.3:4}$$

donde

$$M(r) = \max\,[e, \sup_{|z|=r} |f(z)|] \qquad (z \in G).$$

Entonces

$$|f(z)| \leqslant C$$

en el recinto G, y el signo de igualdad en un punto interior de este recinto es posible solamente cuando $f(z) \equiv$ const.

La condición (3.3:4) impone una restricción determinada al crecimiento posible de $|f(z)|$ para $z \to \infty$; precisando, para cada ρ_1, $\rho < \rho_1 < \frac{1}{\alpha}$ tiene que existir una sucesión $\{R_n\}$ tal que $R_n < R_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$ y

$$|f(z)| < \exp(|z|^{\rho_1}) \quad \text{para} \quad |z| = R_n,\; n = 1, 2, \ldots . \tag{3.3:5}$$

Recíprocamente, de (3.3:5) se deduce (3.3:4).

Para demostrar el teorema supongamos que el vértice del ángulo G está situado en el origen de coordenadas y que la bisectriz del ángulo coincide con la parte positiva del eje real. Con esto no se restringe la generalidad de la demostración, puesto que el caso general se reduce al indicado mediante una transformación lineal entera (traslación y rotación), la cual no altera las condiciones del teorema.

Construyamos la función auxiliar

$$F_\varepsilon(z) = f(z) \exp(-\varepsilon z^{\rho_2}), \tag{3.3:6}$$

donde $\rho_1 < \rho_2 < \frac{1}{\alpha}$ y z^{ρ_2} denota aquella rama uniforme y analítica en el recinto G de la función $z^{\rho_2} = \exp(\rho_2 \operatorname{Ln} z)$ que toma valores positivos para z real y positivo, es decir

$$z^{\rho_2} = \exp(\rho_2 \ln z).$$

Consideremos el sector g_{R_n} interceptado por el círculo $|z|<R_n$ en el ángulo G. En cada punto ζ perteneciente a sus lados rectilíneos, tendremos en virtud de (3.3:6) y (3.3:3):

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}|F_\varepsilon(z)|\leqslant C\,\overline{\lim_{z\to\zeta}}|\exp(-\varepsilon z^{\rho_2})|=C\lim_{z\to\zeta}\exp(-\varepsilon r^{\rho_2}\cos\rho_2\theta)\leqslant C,$$

donde $z=re^{i\theta}$ (en el recinto G se tiene: $|\rho_2\theta|<\frac{\alpha\pi}{2\alpha}=\frac{\pi}{2}$, de donde $\cos\rho_2\theta>0$).

Además, en el arco $|z|=R_n$ que forma parte de la frontera del sector g_{R_n} tendremos, en virtud de (3.3:6) y (3.3:5):

$$|F_\varepsilon(z)|<\exp(R_n^{\rho_1}-\varepsilon R_n^{\rho_2}\cos\rho_2\theta)\leqslant\exp\left[R_n^{\rho_1}-\varepsilon R_n^{\rho_2}\cos\left(\rho_2\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right].$$

Como $\cos\left(\rho_2\frac{\alpha\pi}{2}\right)>0$ y $\rho_1<\rho_2$, el segundo miembro de la última desigualdad tiende a cero cuando R_n tiende al infinito. Tomemos R_n tan grande que el segundo miembro se haga menor que C y, además, que un punto arbitrariamente fijado $z_0\in G$ quede en el interior de g_{R_n}. Entonces, en todos los puntos frontera del sector g_{R_n} sin exclusión, tendremos:

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}|F_\varepsilon(z)|\leqslant C,$$

de donde, según el teorema 2, ap.3.1:

$$|F_\varepsilon(z_0)|\leqslant C,$$

y la igualdad es posible solamente si $F_\varepsilon(z_0)\equiv\text{const}$. Sustituyendo la función $F_\varepsilon(z_0)$ por su expresión y pasando al límite cuando el parámetro ε tiende a cero, hallaremos:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|f(z_0)\exp(\varepsilon z_0^{\rho_2})|=|f(z_0)|\leqslant C,$$

que es lo que se quería demostrar.

No queda más que observar que en el caso de igualdad

$$|f(z_0)|=C,$$

obtenemos que el módulo de la función analítica alcanza su máximo (el extremo superior) en un punto interior del recinto G, de donde

$$f(z)\equiv\text{const}.$$

El teorema precedente admite una especificación ulterior; precisamente, la condición (3.3:4) puede sustituirse en el mismo por la condición:

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln M(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}}\leqslant 0, \qquad (3.3:7)$$

la cual, a su vez, es equivalente a la siguiente: para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $\{R_n\}$ $(R_n = R_n(\varepsilon))$ tal que $R_n < R_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$ y

$$|f(z)| < \exp(\varepsilon |z|^{\frac{1}{\alpha}}) \text{ para } |z| = R_n, \; n = 1, 2, 3, \ldots . \quad (3.3.8)$$

Si se cumple la condición (3.3:5), también se cumple la condición (3.3:8), puesto que para $\rho_1 < \frac{1}{\alpha}$ y cualquier $\varepsilon > 0$ fijado, se tiene para todos los valores suficientemente grandes de $|z|$:

$$\exp|z|^{\rho_1} < \exp(\varepsilon |z|^{\frac{1}{\alpha}}).$$

Lo recíproco, por lo general, no es cierto, como muestra el ejemplo de la función $f(z) = \exp\frac{z^2}{1+|\ln z|^2}$, considerada en el recinto $|\arg z| < \frac{\pi}{4}$. Por consiguiente, a la condición (3.3:8) satisface una clase más amplia de funciones que a la condición (3.3:5).

Supongamos que se cumplen las condiciones (3.3:1) y (3.3:7); demostremos que en todos los puntos de la bisectriz del ángulo G, es decir, para todos $z = x$ reales y positivos, la función $f(z)$ satisface a la desigualdad

$$|f(x)| \leqslant C. \quad (3.3:9)$$

Entonces el teorema demostrado anteriormente se puede aplicar a $f(z)$ en cada uno de los dos ángulos en los que el eje real divide el ángulo G. La magnitud de tal ángulo es $\frac{\pi\alpha}{2}$ y, por consiguiente, para que pueda aplicarse el teorema indicado es necesario que para todos los ρ_1 menores que $\frac{2}{\alpha}$ y suficientemente próximos a $\frac{2}{\alpha}$, se cumplan las desigualdades de la forma (3.3:5). En virtud de las desigualdades (3.3:8), esto verdaderamente se cumple para todos los valores $\rho_1 \geqslant \frac{1}{\alpha}$.

Así, pues, todo se reduce a la demostración de la desigualdad (3.3:9) en los puntos $x > 0$.

Fijemos $x > 0$, luego $\varepsilon > 0$ y la sucesión correspondiente $\{R_n\}$, para la cual se cumplen las desigualdades (3.3:8).

Consideremos el sector g_{R_n}: $|\arg z| < \frac{\alpha\pi}{2}$, $|z| < R_n$; para todos los valores suficientemente grandes de n el punto x está situado en el interior del sector. Además, en el arco Λ_n de la circunferencia que forma parte de la frontera del sector, se cumple la desigualdad

$$|f(z)| < \exp(\varepsilon R_n^{\frac{1}{\alpha}}),$$

y en cada punto ζ de los lados rectilíneos del sector

$$\overline{\lim_{z\to\zeta}}|f(z)|\leqslant C.$$

Queriendo utilizar la desigualdad (3.2:4') (el teorema de las dos constantes) para acotar $|f(x)|$, transformemos conformemente el sector g_{R_n} en el círculo unidad, de modo que el punto x vaya al centro del círculo. Realicemos primero las transformaciones:

$$1)\quad z_1=i\left(\frac{z}{R_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=f_1(z);\qquad 2)\quad z_2=\left(\frac{1+z_1}{1-z_1}\right)^2=f_2(z_1).$$

La primera de ellas transforma g_{R_n} en el semicírculo superior del círculo unidad; en este caso el arco Λ_n se transforma en la semicircunferencia y el punto x en el punto $i\left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. La segunda transforma el semicírculo obtenido en el semiplano superior; en este caso, la imagen de la semicircunferencia es el semieje negativo y el punto $i\left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ se transforma en el punto $\xi_n=\left[\frac{1+i\left(\frac{x}{R_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-i\left(\frac{x}{R_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}\right]^2$. Efectuemos, finalmente, la transformación

$$3)\quad z_2=\frac{z_2-\xi_n}{z_2-\bar{\xi}_n}=f_3(z_2),$$

como resultado obtendremos el círculo unidad; en este caso el semieje negativo se transformará en un arco Σ_n con el punto inicial 1 y el punto final $\frac{\xi_n}{\bar{\xi}_n}$ (el recorrido de la circunferencia unidad se efectúa en el sentido positivo). La transformación $z_3=f_3f_2f_1(z)$ será la buscada. Como resultado, la función $f(z)$ se transforma en la función $f^*(z_3)=ff_1^{-1}f_2^{-1}f_3^{-1}(z_3)$, la cual toma el valor $f(x)$ en el origen de coordenadas, en los puntos del arco Σ_n, que es la imagen del arco Λ_n, satisface a la desigualdad $|f^*(z_3)|<\exp(\varepsilon R_n^{1/\alpha})$ y, finalmente, en los puntos ζ del arco σ_n, que es complementario al arco Σ_n, satisface a la desigualdad $\overline{\lim\limits_{z_3\to\zeta}}|f^*(z_3)|\leqslant C$.

Por consiguiente, debido a la desigualdad (3.2:4'), se tiene:

$$|f^*(0)|=|f(x)|\leqslant C^{\frac{\alpha_n}{\pi}}\exp\left(\frac{\beta_n}{\pi}\varepsilon R_n^{\frac{1}{\alpha}}\right),$$

donde $2\alpha_n$ y $2\beta_n$ denotan los ángulos bajo los cuales se ven los arcos σ_n y Σ_n, respectivamente, desde el centro del círculo $(0<\alpha_n,\ 0<\beta_n,\ \alpha_n+\beta_n=\pi)$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1+i\left(\frac{x}{R_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1-i\left(\frac{x}{R_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \right]^2 = 1$ y, por consiguiente, $\lim\limits_{n\to\infty} \arg \xi_n = 0$, para todos los valores suficientemente grandes de n se tiene:

$$\arg \xi_n = 4 \arg \left[1 + i\left(\frac{x}{R_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{R_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

y

$$\arg \frac{\xi_n}{\bar{\xi}_n} = 2 \arg \xi_n = 8 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{R_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0.$$

Como el punto 1 es el origen del arco Σ_n y $\dfrac{\xi_n}{\bar{\xi}_n}$ es su extremo, para el ángulo $2\beta_n$ se tiene: $2\beta_n = 8 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{R_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, es decir, $\beta_n = 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{R_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ y $\alpha_n = \pi - 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{R_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Por esta razón

$$|f(x)| \leqslant \exp\left[\frac{4}{\pi} \varepsilon R_n^{\frac{1}{\alpha}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{R_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] C^{1-\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{R_n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

o bien, pasando al límite para $n \to \infty$

$$|f(x)| \leqslant \exp\left(\frac{4}{\pi} \varepsilon x^{\frac{1}{\alpha}}\right) C,$$

de donde, finalmente, debido a la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, sacamos la conclusión que

$$|f(x)| \leqslant C.$$

La relación (3.3:9) queda demostrada, y a la vez, queda demostrado, como se observó anteriormente, que

$$|f(z)| \leqslant C, \quad z \in G.$$

Así, pues, se verifica el siguiente teorema (que abarca al teorema anterior de Phragmén-Lindelöf):

Teorema 1. *Sea G un ángulo de magnitud $\alpha\pi$ $(0 < \alpha \leqslant 2)$ y sea $f(z)$ una función analítica en este recinto que satisface a las condiciones:*

1) *para cada punto finito ζ de la frontera del recinto G,*

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} |f(z)| \leqslant C;$$

2)

$$\underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} \leqslant 0.$$

Entonces

$$|f(z)| \leqslant C$$

en el recinto G, y si $|f(z_0)| = C$, $z_0 \in G$, resulta $f(z) \equiv$ const.

En cierto sentido la proposición obtenida no puede precisarse más. Si se quiere que el teorema conserve su valor, no se puede sustituir aquí la condición 2) por

$$\underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln M(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} > 0.$$

Esto muestra el ejemplo de la función

$$f(z) = \exp(\gamma z^{\frac{1}{\alpha}}) \qquad (\gamma > 0).$$

En los lados del ángulo $|\arg z| < \frac{\alpha\pi}{2}$ ésta satisface a las condiciones:

$$|f(re^{\pm\frac{i\alpha\pi}{2}})| = \exp\left(\gamma r^{\frac{1}{\alpha}} \cos\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

no obstante tiende al infinito sobre cada rayo

$$\arg z = 0, \quad |\theta| < \frac{\alpha\pi}{2}.$$

Evidentemente, en este caso se tiene:

$$M(r) = \exp(\gamma r^{\frac{1}{\alpha}}) \quad \text{y} \quad \lim_{r \to \infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} = \gamma > 0.$$

También se pueden obtener proposiciones análogas al teorema 1 para otros recintos, por ejemplo, para una franja (ángulo de magnitud cero).

Teorema 2. *Sea D una franja de anchura $h\pi$:*

$$-\frac{h\pi}{2} < y < \frac{h\pi}{2},$$

y sea $f(z)$ una función analítica en el recinto D que satisface a las condiciones:

1) *para cada punto finito ζ situado en la frontera D,*

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} |f(z)| \leqslant C \quad (< \infty)$$

y, además,

$$\overline{\lim_{x \to -\infty}} |f(x+iy)| \leqslant C;$$

2)

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \frac{\ln \mu(x)}{\exp \frac{x}{h}} \leqslant 0,$$

donde $\mu(x) = \max[1, \sup |f(x+iy)|]$, $-\frac{h\pi}{2} < y < \frac{h\pi}{2}$.

Entonces en el recinto D se verifica la desigualdad

$$|f(z)| \leqslant C,$$

y la igualdad en un punto $z_0 \in D$ es posible solamente cuando $f(z) \equiv$ $\equiv$ const.

Este teorema se reduce al anterior mediante la transformación conforme

$$z' = \exp \frac{z}{h},$$

la cual transforma la franja D en el semiplano de la derecha G (ángulo de magnitud π) de modo que lleva el extremo izquierdo de la franja ($x = -\infty$) al punto $z' = 0$, y su extremo derecho ($x = +\infty$) al punto $z' = \infty$; los segmentos de las rectas $x =$ const se transforman en este caso en semicircunferencias con los centros en el punto $z' = 0$. Hagamos

$$f(h \ln z') = F(z');$$

en virtud de las condiciones del teorema, esta función es analítica en el recinto G y en cada punto finito ζ' de la frontera satisface a la desigualdad

$$\overline{\lim_{z' \to \zeta'}} |F(z')| \leqslant C.$$

Además, para $r' = |z'|$ y $x = \operatorname{Re} z$, ligados por la relación $r' = \exp \frac{x}{h}$, se tiene:

$$M(r') = \sup_{|z'| = r'} |F(z')| = \sup_{\operatorname{Re} z = x} |f(z)| \leqslant \mu(x),$$

de donde

$$\frac{\ln M(z')}{r'} \leqslant \frac{\ln \mu(x)}{\exp \frac{x}{h}},$$

y, por consiguiente,

$$\varlimsup_{r'\to\infty} \frac{\ln M(r')}{r'} \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln \mu(x)}{\exp \frac{x}{h}} \leqslant 0.$$

Aplicando a $F(z')$ en el recinto G el teorema 1 (para $\alpha = 1$) hallaremos que

$$|F(z')| \leqslant C, \quad z' \in G',$$

o bien, finalmente,

$$|f(z)| \leqslant C, \quad z \in D,$$

como se quería demostrar.

§ 4. FORMULA DE POISSON—JENTZSCH

4.1. Aquí deduciremos una fórmula que representa una extensión de la fórmula (1.2:8) al caso de funciones que poseen polos logarítmicos. Sea $u(z) = u(r, \theta)$ una función uniforme y armónica en el círculo $|z| < R \leqslant \infty$, a excepción, posiblemente, de polos logarítmicos. Designemos los polos logarítmicos diferentes de cero mediante $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$, disponiéndolos en orden de módulos no decrecientes, y sea $\mu_j \ln |z - \zeta_j|$ la parte principal correspondiente a ζ_j (véase el ap. 1.3). Introduzcamos también la parte principal $\mu_0 \ln |z|$ correspondiente al punto $z = 0$, haciendo $\mu_0 = 0$ cuando este punto no sea en realidad polo logarítmico de $u(z)$.

Consideremos la función homográfica

$$l_\zeta(z) = \rho^2 \frac{z-\zeta}{\rho^2 - \bar{\zeta} z},$$

donde $|\zeta| < \rho < R$. Como se sabe (t. I, ap. 4.7, cap. segundo), esta función transforma conformemente el círculo $|z| \leqslant \rho$ sobre sí mismo, llevando el punto ζ al centro del círculo.

Como $l_\zeta(z)$ es una función analítica en el círculo $|z| < \frac{\rho^2}{|\zeta|}$, que posee en el mismo el único polo simple en el punto $z = \zeta$ y su módulo es igual a ρ en todos los puntos de la circunferencia $|z| = \rho$, resulta que la función $u_\zeta(z) = \ln\left[\frac{1}{\rho} |l_\zeta(z)|\right]$ es armónica para $|z| < \frac{\rho^2}{|\zeta|}$, $z \neq \zeta$, posee un polo logarítmico en el punto $z = \zeta$ con la parte principal $\ln |z - \zeta|$ y se anula en la circunferencia $|z| = \rho$. Si los puntos $0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{\nu(\rho)}$, tomados entre los polos logarítmicos de la función $u(z)$, están situados en el interior de la circunferencia, mientras que los demás están fuera de ella, entonces

la función

$$v(z)=u(z)-\sum_{k=0}^{\nu(\rho)}\mu_k u_{\zeta_k}(z)=u(z)-\sum_{k=0}^{\nu(\rho)}\mu_k \ln\left|\frac{\rho(z-\zeta_k)}{\rho^2-\bar{\zeta}_k z}\right|$$

es armónica en todos los puntos de un círculo de radio mayor que ρ $\left(\text{igual al mínimo de los dos números } |\zeta_{\nu(\rho)+1}| \text{ y } \frac{\rho^2}{|\zeta_{\nu(\rho)}|}\right)$ y en la circunferencia $|z|=\rho$ coincide con la función $u(z)$. Por esta razón, para todos $|z|=r<\rho$ se tiene:

$$v(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\rho,\alpha)\frac{\rho^2-r^2}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)}\,d\alpha,$$

o bien

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\alpha)\frac{\rho^2-r^2}{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\theta-\alpha)}\,d\alpha=$$

$$=u(r,\theta)-\sum_{0}^{\nu(\rho)}\mu_k \ln\left|\frac{\rho(z-\zeta_k)}{\rho^2-\bar{\zeta}_k z}\right|. \qquad (4.1{:}1)$$

Esta es la fórmula buscada. Se llama **f ó r m u l a d e P o i s s o n — J e n t z s c h**. Cuando no hay polos logarítmicos se debe considerar aquí que todos los números μ_j $(j=0, 1, \ldots, \nu(\rho))$ son iguales a cero; en este caso esta fórmula se convierte en la fórmula de Poisson (1.2:8). La fórmula (4.1:1) es una generalización de esta última.

Apliquemos la fórmula (4.1:1) al caso particular en que $u(r,\theta)$ tiene la forma

$$u(r,\theta)=\ln|f(re^{i\theta})|,$$

donde $f(re^{i\theta})=f(z)$ es una función uniforme y analítica en el círculo $|z|<R$, a excepción, posiblemente, de polos. Sean $a_1, a_2, \ldots$ los ceros distintos entre sí de $f(z)$, dispuestos en orden de no decrecimiento de los módulos, y sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, los órdenes de multiplicidad de estos ceros; del mismo modo, sean $b_1, b_2, \ldots$, los polos distintos de $f(z)$, también dispuestos en orden de no decrecimiento de los módulos, y sean $\beta_1, \beta_2, \ldots$, sus órdenes.

Separadamente consideraremos el punto $z=0$, asignándole el orden de multiplicidad λ. Si este punto es un cero de $f(z)$, supondremos que λ es el orden de este cero; si $z=0$ es un polo, supondremos que λ es el orden del polo tomado con signo contrario; finalmente, si $z=0$ no es cero ni polo, supondremos que $\lambda=0$. Fácilmente se observa que $\ln|f(z)|$ es una función uniforme y armónica en el círculo $|z|<R$, a excepción de los polos logarítmicos: $0, a_1, a_2, \ldots$

$\ldots, b_1, b_2, \ldots$, con las partes principales correspondientes:

$$\lambda \ln|z|, \quad \alpha_1 \ln|z-a_1|, \quad \alpha_2 \ln|z-a_2|, \ldots,$$
$$-\beta_1 \ln|z-b_1|, \quad -\beta_2 \ln|z-b_2|, \ldots$$

Si $n'(\rho)$ denota el número de ceros distintos de $f(z)$ situados en el círculo $|z| < \rho$, y $p'(\rho)$ indica el número de polos distintos situados en el mismo círculo, donde no se tiene en cuenta el punto $z = 0$, entonces según la fórmula (4.1:1) se tiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha})| \frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha = \ln\left|\frac{f(re^{i\theta})}{r^\lambda}\right| +$$
$$+\lambda\ln\rho - \sum_1^{n'(\rho)} \alpha_k \ln\frac{\rho|z-a_k|}{|\rho^2-\bar{a}_k z|} + \sum_1^{p'(\rho)} \beta_k \ln\frac{\rho|z-b_k|}{|\rho^2-\bar{b}_k z|}. \quad (4.1:2)$$

Este es una caso particular importantísimo de la fórmula (4.1:1); precisamente esta fórmula se llama ordinariamente fórmula de Poisson-Jentzsch.

Si convenimos en la lista de ceros y polos de $f(z)$ (que no coincidan con el centro del círculo) repetir cada uno de ellos tantas veces cual sea su orden, designándolos como anteriormente con las letras a y b con los subíndices correspondientes, e indicamos con $n(\rho)$ y $p(\rho)$ las cantidades de ceros y polos de $f(z)$, respectivamente, que hay en el círculo $|z| < \rho$, teniendo en cuenta los órdenes de multiplicidad de estos puntos, entonces la fórmula (4.1:2) puede escribirse en la forma:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha})| \frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha = \ln\left|\frac{f(re^{i\theta})}{r^\lambda}\right| +$$
$$+\lambda\ln\rho - \sum_1^{n(\rho)} \ln\frac{\rho|z-a_h|}{|\rho^2-\bar{a}_h z|} + \sum_1^{p(\rho)} \ln\frac{\rho|z-b_h|}{|\rho^2-\bar{b}_h z|}. \quad (4.1:2')$$

Los sumandos que corresponden a los ceros o polos múltiples se repiten en el segundo miembro de la fórmula tantas veces como indique el orden del cero o polo.

Si $f(z)$ no tiene polos en el círculo $|z| < R$, se puede suponer que todos los números β_k en la fórmula (4.1:2) son iguales a cero y que λ no es negativo. Entonces obtendremos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha})| \frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha =$$
$$= \ln\left|\frac{f(re^{i\theta})}{r^\lambda}\right| + \lambda\ln\rho - \sum_1^{n'(\rho)} \alpha_h \ln\frac{\rho|z-a_h|}{|\rho^2-\bar{a}_h z|}, \quad (4.1:3)$$

o bien, teniendo en cuenta las notaciones admitidas en la fórmula (4.1:2′):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\alpha})|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha=$$

$$=\ln\left|\frac{f(re^{i\theta})}{r^\lambda}\right|+\lambda\ln\rho-\sum_1^{n(\rho)}\ln\frac{\rho\,|z-a_k|}{|\rho^2-\bar{a}_k z|}. \qquad (4.1{:}3')$$

La fórmula (4.1:1) (y sus casos particulares) se dedujo con la suposición de que ninguno de los polos logarítmicos de la función $u(z)$ está situado en la circunferencia $|z|=\rho$. Pero ella conserva también su valor en el caso en que esto no se cumple. Supongamos que $\zeta_{n(\rho)+1}, \ldots, \zeta_{n(\rho)+\nu}$ son los polos logarítmicos situados en la circunferencia $|z|=\rho$. Entonces la función armónica

$$u(z)-\sum_{k=n(\rho)+1}^{n(\rho)+\nu}\mu_k\ln|z-\zeta_k|$$

no tiene polos logarítmicos en un anillo circular cerrado $\rho_1\leqslant|z|\leqslant\leqslant\rho_2$ que contiene a esta circunferencia; además, todos sus polos y sus partes principales en el interior de la circunferencia $|z|=\rho$ coinciden con los polos y las partes principales de $u(z)$ en el interior de la misma circunferencia. Por lo tanto, según la fórmula (4.1:1):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[u(\rho,\alpha)-\sum_{n(\rho)+1}^{n(\rho)+\nu}\mu_k\ln|\rho e^{i\alpha}-\zeta_k|\right]\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha=$$

$$=u(r,\theta)-\sum_{n(\rho)+1}^{n(\rho)+\nu}\mu_k\ln|re^{i\theta}-\zeta_k|-\sum_0^{n(\rho)}\mu_k\ln\left|\frac{\rho(z-\zeta_k)}{\rho^2-\bar{\zeta}_k z}\right|. \qquad (4.1{:}4)$$

Examinemos separadamente la integral de la forma

$$I_{\zeta_0}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\rho e^{i\alpha}-\zeta_0|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha \qquad (|\zeta_0|=\rho,\ r<\rho).$$

Tal integral, considerada como integral impropia, es convergente. En efecto, para $\zeta_0=\rho e^{i\alpha_0}$ se tiene:

$$|\rho e^{i\alpha}-\rho e^{i\alpha_0}|=2\rho\,\mathrm{sen}\,\frac{|\alpha-\alpha_0|}{2}\geqslant\frac{2}{\pi}\rho|\alpha-\alpha_0|, \quad \text{si} \quad |\alpha-\alpha_0|\leqslant\pi;$$

por lo tanto, para $|\rho e^{i\alpha}-\rho e^{i\alpha_0}|<1$ resulta:

$$\bigl|\ln|\rho e^{i\alpha}-\zeta_0|\bigr|<\left|\ln\left(\frac{2}{\pi}\rho|\alpha-\alpha_0|\right)\right|,$$

de donde se deduce la convergencia de la integral.

Hagamos $\zeta=(\rho+\delta)e^{i\alpha_0}$, donde $1>\delta>0$; entonces tendremos:

$$I_\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\rho e^{i\alpha}-\zeta|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha=\ln|re^{i\theta}-\zeta|\quad(r<\rho),$$

puesto que la función $\ln|z-\zeta|$ es armónica para $|z|<\rho+\delta$. Demostremos que

$$I_{\zeta_0}=\lim_{\delta\to 0}I_\zeta=\lim_{\delta\to 0}\ln|re^{i\theta}-\zeta|=\ln|re^{i\theta}-\zeta_0|. \qquad (4.1:5)$$

Con este fin, examinemos la diferencia

$$d=I_\zeta-I_{\zeta_0}=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0-\pi}^{\alpha_0+\pi}\ln\left|\frac{\rho e^{i\alpha}-\zeta}{\rho e^{i\alpha}-\zeta_0}\right|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha,\qquad(r<\rho)$$

(cuando se cambiaron los límites de integración se tuvo en cuenta que la función subintegral es periódica).

Obsérvese la desigualdad: $|\rho e^{i\alpha}-\zeta|>|\rho e^{i\alpha}-\zeta_0|$. Esta evidente si $\rho e^{i\alpha}=\zeta_0$; si $\rho e^{i\alpha}\neq\zeta_0$, entonces los puntos $\rho e^{i\alpha}$, $\zeta_0=\rho e^{i\alpha_0}$ y $\zeta=(\rho+\delta)e^{i\alpha_0}$ son los vértices de un triángulo en el cual el ángulo con el vértice en ζ_0 es obtuso (proponemos al lector hacer el dibujo), de donde se deduce la desigualdad pedida. Por lo tanto,

$$0<\ln\left|\frac{\rho e^{i\alpha}-\zeta}{\rho e^{i\alpha}-\zeta_0}\right|=\ln\left|1+\frac{\zeta_0-\zeta}{\rho e^{i\alpha}-\zeta_0}\right|\leqslant\ln\left(1+\left|\frac{\zeta_0-\zeta}{\rho e^{i\alpha}-\zeta_0}\right|\right)=$$

$$=\ln\left(1+\frac{\delta}{2\rho\operatorname{sen}\frac{|\alpha-\alpha_0|}{2}}\right)<\ln\left(1+\frac{\pi\delta}{2\rho|\alpha-\alpha_0|}\right).$$

Por otra parte,

$$\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\leqslant\frac{\rho+r}{\rho-r},$$

y por consiguiente,

$$0<d<\frac{\rho+r}{\rho-r}\,\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0-\pi}^{\alpha_0+\pi}\ln\left(1+\frac{\pi\delta}{2\rho|\alpha-\alpha_0|}\right)d\alpha=$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\frac{\rho+r}{\rho-r}\int_0^{\pi}\ln\left(1+\frac{\pi\delta}{2\rho\alpha}\right)d\alpha.$$

Sea $\varepsilon>0$; entonces se puede elegir un número σ, $0<\sigma<\pi$, tal que sea

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{\rho+r}{\rho-r}\int_0^{\sigma}\ln\left(1+\frac{\pi\delta}{2\rho\alpha}\right)d\alpha<\frac{1}{\pi}\,\frac{\rho+r}{\rho-r}\int_0^{\sigma}\ln\left(1+\frac{\pi}{2\rho\alpha}\right)d\alpha<\frac{\varepsilon}{2};$$

por otra parte, para σ fijado, se tiene:

$$\frac{1}{\pi}\frac{\rho+r}{\rho-r}\int_{\sigma}^{\pi}\ln\left(1-\frac{\pi\delta}{2\rho\alpha}\right)d\alpha<\frac{1}{\pi}\frac{\rho+r}{\rho-r}\int_{\sigma}^{\pi}\frac{\pi\delta\,d\alpha}{2\rho\alpha}<\frac{\delta}{2\rho\alpha}\frac{\rho+r}{\rho-r}<\frac{\varepsilon}{2},$$

si δ es suficientemente pequeño: $\delta<\delta_0(\varepsilon)$.

En resumen,

$$0<d<\varepsilon \quad \text{para} \quad \delta<\delta_0(\varepsilon),$$

de donde se deduce la relación (4.1:5).

Como $|\zeta_k|=\rho$ $(k=n(\rho)+1, \ldots, n(\rho)+\nu)$, en virtud de (4.1:5), se tiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n(\rho)+1}^{n(\rho)+\nu}\mu_k\ln|\rho e^{i\alpha}-\zeta_k|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha=$$

$$=\sum_{n(\rho)+1}^{n(\rho)+\nu}\mu_k\ln|re^{i\theta}-\zeta_k|;$$

por lo cual la igualdad (4.1:4) toma la forma

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\rho,\alpha)\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha=$$

$$=u(r,\theta)-\sum_{1}^{n(\rho)}\mu_k\ln\left|\frac{\rho(z-\zeta_k)}{\rho^2-\bar{\zeta}_kz}\right|.$$

Por consiguiente, queda demostrado que la fórmula (4.1:1) es válida también cuando en la circunferencia $|z|=\rho$ hay polos logarítmicos de la función $u(r,\theta)$. Obsérvese que para cada uno de ellos

$$\ln\left|\frac{\rho(z-\zeta_k)}{\rho^2-\bar{\zeta}_kz}\right|=\ln\left|\frac{\rho}{\bar{\zeta}_k}\cdot\frac{z-\zeta_k}{\bar{\zeta}_k-z}\right|=0$$

$$(|\zeta_k|=\rho,\ k=\nu(\rho)+1, \ldots, \nu(\rho)+n).$$

Por ello, en el segundo miembro de la relación obtenida se puede extender la sumación también a los polos logarítmicos que están situados en la circunferencia $|z|=\rho$. En otras palabras, en la fórmula general (4.1:1) con el mismo derecho se puede considerar que la función $\nu(\rho)$ proporciona la cantidad de polos logarítmicos situados en el círculo abierto $|z|<\rho$ o en el círculo cerrado $|z|\leqslant\rho$. Evidentemente, las conclusiones análogas son ciertas también para todos los casos particulares de la fórmula (4.1:1).

Ocupémonos de la fórmula (4.1:3'); haciendo en ella $z = 0$ (o sea, $r = 0$) y observando que

$$\frac{f(z)}{z^\lambda} = \frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} + \frac{f^{(\lambda+1)}(0)}{(\lambda+1)!} z + \ldots,$$

obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha = \ln\left|\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}\right| + \lambda \ln\rho - \sum_1^{n(\rho)} \ln\frac{|a_k|}{\rho},$$

o sea

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha = \ln\left|\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}\right| + \ln\left[\rho^\lambda \prod_1^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|}\right]. \quad (4.1:6)$$

Está claro que el segundo miembro de esta fórmula crece al crecer ρ, puesto que crece cada factor del producto $\frac{\rho}{|a_k|} > 1$ y para algunos valores de $\rho = \rho_0$, precisamente para aquellos que corresponden a circunferencias $|z| = \rho_0$ que contienen ceros de la función $f(z)$, aumenta también el número de factores bajo el signo del producto. Por lo tanto, crece también el primer miembro del producto, obteniendo que *el valor medio del logaritmo del módulo de una función analítica es una función no decreciente del radio de la circunferencia sobre la cual se toma el valor medio.*

Haciendo la notación $M(\rho) = \max\limits_{0 \leq \alpha \leq 2\pi} |f(\rho^{i\alpha})|$, de la fórmula (4.1:6) sacamos la conclusión que

$$\ln\left|\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}\right| + \ln\left[\rho^\lambda \prod_1^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|}\right] \leqslant \ln M(\rho),$$

de donde

$$\frac{\rho^{n(\rho)}}{|a_1|\ldots|a_{n(\rho)}|} \leqslant \frac{M(\rho)}{\left|\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}\right|\rho^\lambda}. \quad (4.1:7)$$

Esta desigualdad, que liga los ceros de una función analítica situados en el círculo $|z| \leqslant \rho$ y el máximo del módulo de la función en la circunferencia $|z| = \rho$, se llama **desigualdad de Jentzsch.**

Esta desigualdad puede escribirse en otra forma. Precisando, escribamos la igualdad

$$\frac{\rho^{n(\rho)}}{|a_1|\ldots|a_{n(\rho)}|} = \frac{|a_2|}{|a_1|}\frac{|a_3|^2}{|a_2|^2}\cdots\frac{|a_{n(\rho)}|^{n(\rho)-1}}{|a_{n(\rho)-1}|^{n(\rho)-1}}\frac{\rho^{n(\rho)}}{|a_{n(\rho)}|^{n(\rho)}}.$$

Tomando logaritmos tendremos:

$$\ln\left[\frac{\rho^{n(\rho)}}{|a_1|\ldots|a_{n(\rho)}|}\right]=$$

$$=\ln\left|\frac{a_2}{a_1}\right|+2\ln\left|\frac{a_3}{a_2}\right|+\ldots+(n(\rho)-1)\ln\left|\frac{a_{n(\rho)}}{a_{n(\rho)-1}}\right|+n(\rho)\ln\left|\frac{\rho}{a_{n(\rho)}}\right|=$$

$$=\int\limits_{|a_1|}^{|a_2|}\frac{dr}{r}+\int\limits_{|a_2|}^{|a_3|}\frac{2\,dr}{r}+\ldots+\int\limits_{|a_{n(\rho)-1}|}^{|a_{n(\rho)}|}\frac{(n(\rho)-1)\,dr}{r}+\int\limits_{|a_{n(\rho)}|}^{\rho}\frac{n(\rho)\,dr}{r}.$$

Observando que el factor numérico k que figura en el numerador del quebrado bajo el signo integral entre los límites $|a_k|$ y $|a_{k+1}|$ coincide con el valor de la función $n(r)$, la cual conserva este valor en todo el semiintervalo $|a_k|\leqslant r<|a_{k+1}|$, obtenemos la igualdad:

$$\ln\left[\frac{\rho^{n(\rho)}}{|a_1|\ldots|a_{n(\rho)}|}\right]=$$

$$=\int\limits_{|a_1|}^{|a_2|}\frac{n(r)\,dr}{r}+\int\limits_{|a_2|}^{|a_3|}\frac{n(r)\,dr}{r}+\ldots+\int\limits_{|a_{n(\rho)-1}|}^{|a_{n(\rho)}|}\frac{n(r)\,dr}{r}+$$

$$+\int\limits_{|a_{n(\rho)}|}^{\rho}\frac{n(r)\,dr}{r}=\int\limits_{|a_1|}^{\rho}\frac{n(r)\,dr}{r}.$$

Como $n(r)=0$ para $r<|a_1|$ (no olvidemos que se convino en no contar el cero en el origen de coordenadas al calcular la cantidad de ceros en el círculo $|z|\leqslant r$), en la última integral se puede tomar el límite inferior igual a 0. Obtenemos definitivamente:

$$\sum_{1}^{n(\rho)}\ln\frac{\rho}{|a_k|}=\ln\left[\frac{\rho^{n(\rho)}}{|a_1|\ldots|a_{n(\rho)}|}\right]=\int\limits_{0}^{\rho}\frac{n(r)\,dr}{r},\qquad(4.1{:}8)$$

y, por consiguiente, la desigualdad de Jentzsch toma la forma

$$\int\limits_{0}^{\rho}\frac{n(r)\,dr}{r}\leqslant\ln\frac{M(\rho)}{\left|\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}\right|\rho^{\lambda}}.\qquad(4.1{:}9)$$

De esta forma se ve que la desigualdad de Jentzsch expresa la relación existente entre el crecimiento de la cantidad $n(\rho)$ de ceros de la función en un círculo de radio ρ y el crecimiento del máximo del módulo de la función $M(\rho)$; el crecimiento de $n(\rho)$ en media se acota por el crecimiento de $M(\rho)$.

4.2. Volviendo a examinar la relación (4.1:6), veamos su aplicación a las funciones que son analíticas en un círculo de radio finito: $|z| < R < \infty$. Como el valor medio del logaritmo del módulo de una función analítica $f(z) \not\equiv 0$ es una función no decreciente del radio de la circunferencia sobre la cual se toma el valor medio, resulta que siempre existe el límite finito o infinito

$$\lim_{\rho \to R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\alpha})| \, d\alpha.$$

Estudiemos las propiedades de las funciones que satisfacen a la condición

$$\lim_{\rho \to R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\alpha})| \, d\alpha < \infty. \qquad (4.2:1)$$

Esta condición se cumple, por ejemplo, cuando la función $f(z)$ está acotada en valor absoluto en el círculo $|z| < R$:

$$|f(z)| \leqslant M < \infty;$$

en este caso el límite (4.2:1) no es superior a $\ln M$. Sin embargo, puede satisfacerse la condición (4.2:1) también para muchísimas funciones no acotadas. En la realidad (4.2:1) es una condición que se impone solamente a los ceros de la función; precisando, de la fórmula (4.1:6) se deduce que la condición indicada equivale a que esté acotado superiormente $\ln \prod_1^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|}$ o bien, $\left(\text{debido a que } \frac{\rho}{|a_k|} \geqslant 1 \text{ y que, por consiguiente, } \ln \prod_1^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|} > 0\right)$, a que estén acotados los productos mismos $\prod_1^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|}$. Pero esto último puede ocurrir en dos casos. En primer lugar, cuando el número total n de ceros de la función $f(z)$ en el círculo $|z| < R$ es finito y, por consiguiente,

$$\prod_1^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|} < \prod_1^{n} \frac{R}{|a_k|}.$$

En segundo lugar, cuando el conjunto de ceros de la función $f(z)$ es infinito, pero el producto $\prod_1^{\infty} \frac{R}{a_k}$ es convergente. En efecto, de

la convergencia de este producto se deduce que

$$\prod_{1}^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|} < \prod_{1}^{n(\rho)} \frac{R}{|a_k|} < \prod_{1}^{\infty} \frac{R}{|a_k|} = C < \infty$$

para todos $\rho < R$. Recíprocamente: si

$$\prod_{1}^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|} \leqslant C$$

para todos $\rho < R$, entonces para un número natural arbitrario n tendremos para $n(\rho) > n$ ($n(\rho) \to \infty$ si $\rho \to R$):

$$\prod_{1}^{n} \frac{\rho}{|a_k|} \leqslant \prod_{1}^{n(\rho)} \frac{\rho}{|a_k|} < C,$$

de donde

$$\prod_{1}^{n} \frac{\rho}{|a_k|} < C, \quad \text{y para} \quad \rho \to R\text{:} \quad \prod_{1}^{n} \frac{R}{|a_k|} \leqslant C.$$

Como esta última relación es válida para cualquier n, de ésta se deduce la convergencia del producto infinito $\prod\limits_{1}^{\infty} \frac{R}{|a_k|}$.

Así, pues, la condición (4.2:1) significa que o es finito el número de factores del producto $\prod \frac{R}{|a_k|}$, extendido a todos los ceros de la función $f(z)$ situados en el círculo $|z| < R$, o es convergente este producto cuando es infinito.

Considerando el producto finito como un caso particular del producto convergente (del mismo modo que una suma finita es un caso particular de la serie convergente), obtenemos:

La condición (4.2:1) *se cumple cuando, y sólo cuando, el producto* $\prod \frac{R}{|a_k|}$, *extendido a todos los ceros de la función* $f(z)$ *situados en el círculo* $|z| < R$, *es convergente.*

Finalmente, la condición de convergencia del producto se puede sustituir por la condición de convergencia de una serie. Representemos $\frac{R}{|a_k|}$ en la forma $\frac{R}{|a_k|} = 1 + \frac{R-|a_k|}{|a_k|}$; es obvio (véase t. I, ap. 4.3, cap. tercero), que el producto $\prod \frac{R}{|a_k|}$ es convergente cuando, y sólo cuando, es convergente la serie $\sum \frac{R-|a_k|}{|a_k|}$. Pero si esta última no es una suma finita, entonces $|a_k| \to R$ para

$k \to \infty$ y, por consiguiente, $\frac{R}{2} < |a_k|$ comenzando desde cierto número k en adelante. Entonces tendremos:

$$\frac{1}{R}(R-|a_k|) < \frac{R-|a_k|}{|a_k|} < \frac{2}{R}(R-|a_k|).$$

De aquí se ve que la convergencia de la serie $\sum \frac{R-|a_k|}{|a_k|}$ es equivalente a la convergencia de la serie $\Sigma\ (R - |a_k|)$, la cual, evidentemente, representa la suma de las distancias de los ceros a_k de la función $f(z)$ hasta la circunferencia $|z| = R$. En resumen, hemos obtenido la siguiente proposición:

La condición (4.2:1) *se cumple cuando, y sólo cuando, la suma de las distancias de los ceros de la función* $f(z)$ *hasta la circunferencia* $|z| = R$ *forma una serie convergente, es decir,*

$$\sum (R-|a_k|) < \infty \qquad (4.2:2)$$

(en particular, cuando $f(z)$ posee solamente un número finito de ceros en el círculo $|z| < R$).

No debe olvidarse que todo lo expuesto ha sido deducido con la condición que $f(z) \not\equiv 0$. Por ello, si se sabe que se cumple la condición (4.2:1) para una función $f(z)$, pero esta función se anula en una sucesión de puntos $\{\zeta_k\}$ para la cual es divergente la serie $\Sigma\ (R - |\zeta_k|)$, entonces se debe sacar la conclusión de que $f(z) \equiv 0$. En efecto, suponiendo lo contrario llegaríamos a la conclusión de que la serie (4.2:2) es convergente, por lo cual tiene que ser convergente también la serie $\Sigma\ (R - |\zeta_k|)$ formada por una parte de los términos de la serie (4.2:2), lo cual, sin embargo, contradice a la condición.

¿Se puede afirmar, basándose en esta observación, que para las funciones que satisfacen a la condición (4.2:2) se verifica el siguiente teorema de unicidad:

Dos funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ que son analíticas en el círculo $|z| < R$ y que satisfacen a la condición (4.2:1), coinciden entre sí en todo el círculo $|z| < R$ si coinciden sus valores en los puntos de una sucesión $\{\zeta_k\}$ para la cual es divergente la serie $\Sigma\ (R - |\zeta_k|)$? Tal teorema sería verdaderamente válido si la diferencia $f(z) - \varphi(z)$ cumpliese siempre a una condición de la forma (4.2:1). No obstante, un ejemplo sencillo muestra que la proposición enunciada no es cierta. Por lo tanto, no es justa tampoco la observación que acabamos de hacer.

En efecto, consideremos las funciones $f(z) = \exp \frac{\pi i}{1-z}$ y $\varphi(z) = \exp \frac{\pi i}{z-1}$, las cuales, evidentemente, son analíticas en el círculo unidad y no poseen ceros en el mismo. Por esto último, para cada

una de ellas tiene que cumplirse una condición de la forma (4.2:1). Sin embargo, su diferencia $f(z) - \varphi(z) = 2i \operatorname{sen} \frac{\pi}{1-z}$ no es idénticamente igual a cero, a pesar de que también es analítica en el círculo unidad y se anula en los puntos $z_k = 1 - \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ para los cuales la serie $\sum_1^\infty \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]$, o sea $\sum_1^\infty \frac{1}{k}$, es divergente. De aquí que para esta diferencia no puede cumplirse la condición (4.2:1). En el apartado 5.1 volveremos a estudiar el problema planteado y destacaremos una clase N muy amplia de funciones que satisfacen a la condición (4.2:1), para la cual la diferencia de dos funciones de la clase N pertenecen a la misma clase.

El teorema demostrado anteriormente afirma que para una función que satisface a la condición (4.2:1), la serie (4.2:2) es convergente. Sin embargo, éste deja sin respuesta la pregunta: ¿Se puede considerar cualquier sucesión $\{\zeta_k\}$ que satisfaga a la condición (4.2:2) como el conjunto de todos los ceros, pertenecientes al círculo $|z| < R$, de alguna función $f(z)$ que cumple la condición (4.2:1)? Demostremos que este problema se resuelve afirmativamente; precisando, se verifica la siguiente proposición:

T e o r e m a. *Para cualquier número entero λ no negativo y para cualquier sucesión de puntos $\{\zeta_k\}$ tal que $|\zeta_k| \leqslant |\zeta_{k+1}|$ y la serie $\sum_1^\infty (R - |\zeta_k|)$ es convergente, existe una función $b(z)$, analítica en el círculo $|z| < R$ y cuyo módulo no es superior a 1 en este círculo, tal que el conjunto de sus ceros coincide con los puntos*

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{\lambda}, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots \tag{4.2:3}$$

Para la demostración, formemos el producto:

$$b_n(z) = \left(\frac{z}{R}\right)^\lambda \prod_1^n \frac{R\,|\zeta_k|}{\zeta_k} \, \frac{\zeta_k - z}{R^2 - \bar{\zeta}_k z}. \tag{4.2:4}$$

Evidentemente, $b_n(z)$ tiene ceros en los puntos $\underbrace{0, \ldots, 0}_{\lambda}$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ y sólo en estos puntos. Además, es una función continua para $|z| \leqslant R$, la cual es analítica en el círculo $|z| < R$ y su módulo es igual a 1 para $|z| = R$. Por consiguiente, en los puntos interiores del círculo se cumple la desigualdad

$$|b_n(z)| < 1.$$

Obsérvese que el producto (4.2.4) es un producto parcial del producto infinito

$$\left(\frac{z}{R}\right)^{\lambda} \sum_{1}^{\infty} \frac{R\,|\zeta_k|}{\zeta_k} \, \frac{\zeta_k - z}{R^2 - \bar{\zeta}_k z}\,, \tag{4.2:5}$$

cuyo término general puede escribirse en la forma

$$1 - \frac{R\zeta_k + z\,|\zeta_k|}{\zeta_k\,(R^2 - \bar{\zeta}_k z)}\,(R - |\zeta_k|) = 1 + \lambda_k\,(R - |\zeta_k|).$$

Está claro que para $|z| \leqslant r < R$ se verifica la desigualdad

$$|\lambda_k| = \left|\frac{R\zeta_k + z\,|\zeta_k|}{\zeta_k\,(R^2 - \bar{\zeta}_k z)}\right| \leqslant \frac{R\,|\zeta_k| + r\,|\zeta_k|}{|\zeta_k|\,(R^2 - |\zeta_k|\,r)} < \frac{R+r}{R^2 - Rr} = \frac{R+r}{R\,(R-r)}\,,$$

y como, según la condición, la serie $\Sigma\,(R - |\zeta_k|)$ es convergente, es convergente también la serie $\Sigma\,|\lambda_k\,(R - |\zeta_k|)|$.

De aquí se deduce que el producto infinito (4.2:5) es absolutamente convergente (t. I, ap. 4.3, cap. tercero) y representa en el círculo $|z| < R$ una función analítica $b(z)$, cuyos ceros coinciden con los puntos dados:

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{\lambda},\ \zeta, \ldots, \zeta_n, \ldots$$

No queda más que observar que

$$b(z) = \lim_{n \to \infty} b_n(z)$$

y, por consiguiente,

$$|b(z)| \leqslant 1.$$

En resumen, la función pedida queda construida. Esta se llama *función de Blaschke* (o *producto de Blaschke*), correspondiente a la sucesión de ceros dada.

Considerando una función arbitraria $f(z) \not\equiv 0$ que satisfaga a la condición (4.2:1), y formando para sus ceros la función correspondiente de Blaschke $b(z)$, obtendremos que la función $g(z) = \frac{f(z)}{b(z)}$ es analítica en el círculo $|z| < R$ y no posee ceros en el mismo.

Así, pues, para cada función $f(z) \not\equiv 0$ que satisfaga a la condición (4.2:1) se tiene la siguiente expresión:

$$f(z) = b(z)\,g(z) = g(z)\left(\frac{z}{R}\right)^{\lambda} \prod_{1}^{\infty} \frac{R\,|\zeta_k|}{\zeta_k}\,\frac{\zeta_k - z}{R^2 - \bar{\zeta}_k z}\,, \tag{4.2:6}$$

donde la función $g(z)$ no posee ceros en el interior del círculo $|z| < R$ y la función $b(z)$ no supera en valor absoluto a la unidad en

el círculo $|z| < R$ y todos sus ceros son comunes con los de $f(z)$. La fórmula (4.2:6) para las funciones que satisfacen a la condición (4.2:1) desempeña el mismo papel que el desarrollo de los polinomios en factores lineales.

§ 5. FUNCIONES DE FORMA ACOTADA

5.1. Sea $h(z)$ una función real definida en un recinto. Designemos con $h^+(z)$ la función que coincide con $h(z)$ en aquellos puntos en los que $h(z) \geqslant 0$ y que es igual a cero allí donde $h(z) < 0$. Análogamente, $h^-(z)$ será la función que coincide con $-h(z)$ en aquellos puntos en los que $h(z) \leqslant 0$ y que es igual a cero allí donde $h(z) > 0$. Es obvio que

$$h(z) = h^+(z) - h^-(z) \quad \text{y} \quad |h(z)| = h^+(z) + h^-(z).$$

Si $h(z)$ es una función subarmónica en un recinto G, entonces $h^+(z)$ es subarmónica en el mismo recinto. En efecto, para cada punto $z_0 \in G$ y todos los valores de ρ suficientemente pequeños se cumple la desigualdad

$$h(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z + \rho e^{i\alpha})\, d\alpha \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^+(z + \rho e^{i\alpha})\, d\alpha.$$

Si $h(z) \geqslant 0$, entonces $h^+(z) = h(z)$ y resulta:

$$h^+(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h^+(z + \rho e^{i\alpha})\, d\alpha.$$

Pero esta desigualdad es válida también para los puntos en los que $h(z) < 0$, puesto que para éstos $h^+(z)$ se anula. En resumen, $h^+(z)$ es una función subarmónica.

De lo expuesto se deduce que la función no negativa $\ln^+ |f(z)|$, donde $f(z)$ es una función analítica en el recinto G, es subarmónica en este recinto.

Sea G el círculo $|z| < R$; suponiendo que $f(z) \not\equiv 0$ y expresando $\ln |f(z)|$ en la forma $\ln^+ |f(z)| - \ln^- |f(z)|$, escribamos la fórmula (4.1:6) en la forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha - \ln \left| \frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!} \right| +$$

$$= \ln \rho^{\lambda} \prod_1^{\nu(\rho)} \frac{\rho}{|z_k|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^- |f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha. \qquad (5.1:1)$$

De esta fórmula se deduce que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^- |f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha - \ln\left|\frac{f^{(\lambda)}(0)}{\lambda!}\right| - \lambda \ln \rho,$$

y, por lo tanto, si la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha \qquad (0<\rho<R)$$

está acotada, resulta que

$$\overline{\lim_{\rho\to R}}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^- |f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha < +\infty,$$

y, por consiguiente,

$$\overline{\lim_{\rho\to R}}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\ln |f(\rho e^{i\alpha})||\,d\alpha < +\infty.$$

Por otra parte, es evidente que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\ln |f(\rho e^{i\alpha})||\,d\alpha.$$

En resumen, las condiciones

$$\overline{\lim_{\rho\to R}}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha < \infty \qquad (5.1:2)$$

y

$$\overline{\lim_{\rho\to R}}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\ln |f(\rho e^{i\alpha})||\,d\alpha < \infty \qquad (5.1:3)$$

son equivalentes si $f(z) \not\equiv 0$.

A continuación designaremos con N el conjunto de todas las funciones que son analíticas en el círculo $|z|<R$, y cuando $f(z) \not\equiv 0$, las que satisfacen a la condición (5.1:2) o (5.1:3). A este conjunto lo llamaremos c l a s e d e f u n c i o n e s d e f o r m a a c o t a d a. Esta clase fue introducida por A. Ostrovski y por los hermanos R. y F. Novanlinna.

Está claro que cada función de la clase N satisface también a la condición (4.2:1), de modo que para $f(z) \in N$ la serie

$$\sum_0^{\infty} (R-|a_k|),$$

donde a_k son los ceros de la función $f(z)$, siempre es convergente. Sin embargo, la clase N forma solamente una parte propia de la clase de las funciones que satisfacen a la condición (4.2:1). Esto se puede ver mediante un cálculo directo, por ejemplo, cerciorándose de que la función $f(z) = \exp \frac{\pi i}{1-z}$ satisface a la condición (4.2:1) en el círculo unidad, pero no satisface a la condición (5.1:2). En efecto, la función $\frac{1}{i} \operatorname{Ln} f(z) = \frac{\pi}{1-z} + 2k\pi$ es analítica en el círculo unidad y, por consiguiente,

$$\ln |f(\rho e^{i\alpha})| = -\operatorname{Im}\left[\frac{1}{i} \operatorname{Ln} f(\rho e^{i\alpha})\right] = \frac{\pi\rho \operatorname{sen} \alpha}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha}$$

es una función armónica en el círculo unidad. Por esta razón

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha = \ln |f(0)| = 0$$

independientemente de ρ, y la condición (4.2:1) queda cumplida (en general, ésta se cumple para todas las funciones que no poseen ceros). Por otra parte, en el caso dado la función $\ln^+ |f(\rho e^{i\alpha})|$ es igual a $\ln |f(\rho e^{i\alpha})|$ si $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ y es igual a cero si $\pi < \alpha \leqslant 2\pi$. Por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi\rho \operatorname{sen}\alpha}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha}\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{4}[\ln(1+\rho^2-2\rho\cos\alpha)]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho} \to \infty \quad \text{cuando} \quad \rho \to 1,$$

es decir, no se cumple la condición (5.1:2).

Demostremos que si las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ pertenecen a la clase N, entonces $f(z) \pm \varphi(z)$, y también $f(z)\varphi(z)$, pertenecen a la clase N, es decir, N se puede considerar como un *anillo* de funciones. Como la diferencia de dos funciones que satisfacen a la condición (4.2:1) puede no satisfacer a esta misma condición, de aquí se deducirá de nuevo que la clase N forma solamente una parte propia de todo el conjunto de las funciones que satisfacen a la condición (4.2:1). Cuando la función $f(z) \pm \varphi(z)$ o $f(z)\varphi(z)$ es idénticamente nula, la proposición considerada es evidente, puesto que la función idénticamente nula pertenece a N. Supongamos que $f(z) \pm \varphi(z)$, o respectivamente, $f(z)\varphi(z)$, no es idénticamente nula.

Obsérvese que

$$\ln^+ |f(z) \pm \varphi(z)| \leqslant \ln^+(|f(z)| + |\varphi(z)|) \leqslant \ln 2 + \ln^+ |f(z)| + \ln^+ |\varphi(z)|.$$

En efecto, si $|f(z)| \leqslant 1$ y $|\varphi(z)| \leqslant 1$, entonces $\ln^+(|f(z)| + |\varphi(z)|) < \ln 2$, y si al menos uno de los números $|f(z)|$ o $|\varphi(z)|$ es mayor que la unidad, entonces

$$\ln^+(|f(z)| + |\varphi(z)|) = \ln(|f(z)| + |\varphi(z)|) <$$
$$< \ln[2\max(|f(z)|, |\varphi(z)|)] =$$
$$= \ln 2 + \ln[\max(|f(z)|, |\varphi(z)|)] \leqslant \ln 2 + \ln^+|f(z)| + \ln^+|\varphi(z)|.$$

Así, pues,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha}) \pm \varphi(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \ln 2 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|\varphi(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha,$$

de donde se deduce que $f(z) \pm \varphi(z)$ pertenece a N si $f(z)$ y $\varphi(z)$ pertenecen a N. Del mismo modo, observando que

$$\ln^+|f(z)\varphi(z)| \leqslant \ln^+|f(z)| + \ln^+|\varphi(z)|$$

(si al menos uno de los números $|\varphi(z)|$ y $|f(z)|$ no es mayor que la unidad, entonces

$$\ln^+|f(z)\varphi(z)| \leqslant \ln^+[\max(|f(z)|, \quad |\varphi(z)|)] \leqslant \ln^+|f(z)| + \ln^+|\varphi(z)|;$$

si ambos números $|\varphi(z)|$ y $|f(z)|$ superan a la unidad, entonces

$$\ln^+|f(z)\varphi(z)| = \ln|f(z)\varphi(z)| =$$
$$= \ln|f(z)| + \ln|\varphi(z)| = \ln^+|f(z)| + \ln^+|\varphi(z)|),$$

sacamos la conclusión que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})\varphi(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|\varphi(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha,$$

y, por consiguiente, $f(z)\cdot\varphi(z)$ pertenece a N si $f(z)$ y $\varphi(z)$ pertenecen a N. Las funciones acotadas en valor absoluto representan una subclase importantísima de las funciones de forma acotada. Es obvio que si $|f(z)| \leqslant C$, entonces $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ f(\rho e^{\alpha i})|\,d\alpha \leqslant \ln^+ C$, es decir, $f(z) \in N$. Las funciones acotadas en valor absoluto forman un subanillo de la clase N.

Como la diferencia de dos funciones de la clase N pertenece a la misma clase, resulta que *si dos funciones* $f(z)$ *y* $\varphi(z)$ *de la clase* N *toman valores iguales en los puntos de una sucesión* $\{\zeta_n\}$ *para la cual la serie* $\sum (R - |\zeta_k|)$ *es divergente (si* ζ_k *es un cero de orden* p *de* $f(z) - \varphi(z)$, *el sumando correspondiente se repite* p *veces), entonces* $f(z) \equiv \varphi(z)$.

En efecto, en caso contrario, o sea, si $f(z) - \varphi(z) \not\equiv 0$, obtendríamos una función de la clase N para la cual la suma de las distancias de sus ceros hasta la circunferencia $|z| = R$ formaría una serie divergente, lo cual es imposible. Así, pues, $f(z) - \varphi(z) \equiv 0$.

Obsérvese que la serie $\Sigma (R - |\zeta_k|)$ es necesariamente divergente cuando la sucesión $\{\zeta_k\}$ posee al menos un punto de acumulación ζ_0 en el interior del círculo $|z| < R$, ya que en este caso no se cumple la condición necesaria de convergencia de la serie. Entonces nuestra proposición representa un caso especial del teorema interior de unicidad (t. I, ap. 6.1, cap. III). Pero si ninguno de los puntos de acumulación de la sucesión $\{\zeta_k\}$ pertenece al círculo $|z| < R$, entonces no puede aplicarse el teorema mencionado.

Vemos, pues, que para las funciones de la clase N resulta un teorema de identidad (de unicidad) que es válido en condiciones más generales respecto del conjunto, sobre el cual se indica la igualdad de valores de $f(z)$ y $\varphi(z)$, que el teorema interior de identidad.

5.2. Demostremos que *la clase* N *coincide con el conjunto de todas las funciones analíticas en el círculo* $|\zeta| < R$ *que pueden expresarse en forma de un cociente de dos funciones analíticas y acotadas en valor absoluto*

$$f(z) = \frac{h_2(z)}{h_1(z)}. \qquad (5.2:1)$$

Ahora se comprende el papel importante que desempeña la clase N en la teoría de funciones y también la denominación de esta clase como funciones de forma acotada; este teorema pertenece a Nevanlinna.

Para demostrarlo, consideremos alguna función $f(z)$ de la clase N. Sea $\{\rho_n\}$ una sucesión creciente de números positivos, convergente hacia R. Construyamos para cada ρ_n una función $u_n(z)$ que sea continua en el círculo cerrado $|z| \leqslant \rho_n$ y armónica en el interior del mismo, y que en los puntos de la circunferencia $|z| = \rho_n$ coincida con $\ln^+ |f(z)|$. En virtud del teorema 2, ap. 3.1, $u_n(z)$ es una mayorante armónica para $\ln^+ |f(z)|$ en el círculo $|z| < \rho_n$. Además, $u_n(z)$ es no negativa en este círculo, pues toma valores no negativos en la circunferencia $|z| = \rho_n$. Demostremos que $u_{n+1}(z) \geqslant u_n(z)$ en todos los puntos $|z| \leqslant \rho_n$. En efecto, $u_{n+1}(z)$, siendo una mayorante armónica para $\ln^+ |f(z)|$ en el círculo $|z| < \rho_{n+1}$, supera los valores de $\ln^+ |f(z)| = u_n(z)$ en los puntos de la circun-

ferencia $|z| = \rho_n$ y, por consiguiente, es una mayorante para $u_n(z)$ en el círculo $|z| < \rho_n$.

Para los valores de las funciones $u_n(z)$ en el origen de coordenadas se tiene:

$$u_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(\rho_n e^{i\alpha})\, d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho_n e^{i\alpha})|\, d\alpha.$$

y como $f(z)$ pertenece a la clase N, la sucesión $\{u_n(0)\}$ está acotada superiormente. Pero ésta es una sucesión no decreciente y, por consiguiente, es convergente. Por ello, según el teorema de Harnack (ap. 1.4), la sucesión de funciones armónicas $\{u_n(z)\}$ es uniformemente convergente en el interior de cada círculo $|z| < \rho_m$ ($m = 1, 2, \ldots$), es decir, es uniformemente convergente en el interior del círculo $|z| < R$. La función límite de esta sucesión

$$u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z)$$

es armónica y no negativa en este círculo (ap. 1.4) y, evidentemente, es mayorante en el mismo para la función $\ln^+|f(z)|$ pues para $\rho_n > |z|$ resulta:

$$\ln^+ |f(z)| \leqslant u_n(z) \leqslant u_{n+1}(z) \leqslant u(z).$$

Formemos una función armónica $v(z)$ conjugada con $u(z)$. Entonces $\exp[-u(z) - iv(z)] = h_1(z)$ es una función analítica en el círculo $|z| < R$ que no posee ceros y está acotada en valor absoluto: $|h_1(z)| \leqslant 1$. Para el producto $f(z)\, h_1(z)$, que representa una función $h_2(z)$, también analítica en el recinto $|z| < R$ y que posee en el mismo los mismos ceros que la función $f(z)$, hallamos la acotación:

$$|h_2(z)| = |f(z)\, h_1(z)| =$$
$$= |f(z)| \exp[-u(z)] \leqslant \exp[\ln^+ |f(z)| - u(z)] \leqslant 1.$$

Así, la función $h_2(z)$ también está acotada en valor absoluto en el interior del círculo $|z| < R$, resultando que $f(z) \in N$ se expresa en el interior de este círculo en forma de un cociente de dos funciones acotadas:

$$f(z) = \frac{h_2(z)}{h_1(z)},$$

donde el denominador $h_1(z)$ no se anula en el círculo $|z| < R$.

Demostremos que se verifica también la proposición recíproca, es decir, que toda función analítica en el círculo $|z| < R$ que tenga la forma (5.2:1), donde $h_1(z)$ y $h_2(z)$ son analíticas y están acotadas en valor absoluto, pertenece a la clase N. Para demostrar esto,

observemos que sin restringir generalidad se puede suponer que

$$|h_1(z)| \leqslant 1 \quad \text{y} \quad |h_2(z)| \leqslant 1,$$

puesto que siempre se puede llegar a este caso multiplicando el numerador y denominador de la fracción (5.2:1) por un mismo número positivo suficientemente pequeño. Representemos $h_1(z)$ y $h_2(z)$ según la fórmula (4.2:6) en la forma

$$h_1(z) = b_1(z)\, g_1(z) \quad \text{y} \quad h_2(z) = b_2(z)\, g_2(z),$$

donde $b_1(z)$ y $b_2(z)$ son las funciones correspondientes de Blaschke. Como

$$b_2(z) = \lim_{n\to\infty} b_{2n}(z),$$

donde $b_{2n}(z)$ es una función racional de la forma (4.2:4), cuyos ceros están contenidos entre los ceros de $h_2(z)$ y cuyo módulo es igual a la unidad en la circunferencia $|z| = R$, resulta

$$g_2(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{h_2(z)}{b_{2n}(z)} \quad \text{y} \quad \varlimsup_{\substack{z\to\zeta \\ |\zeta|=R}} \left|\frac{h_2(z)}{b_{2n}(z)}\right| \leqslant 1.$$

De la última desigualdad se deduce que $\left|\frac{h_2(z)}{b_{2n}(z)}\right| \leqslant 1$ para todos los valores de n y, por consiguiente, $|g_2(z)| \leqslant 1$ en el círculo $|z| < R$. Naturalmente, esta misma conclusión es cierta también para $g_1(z)$. Como todos los ceros de la función $b_1(z)$ están contenidos entre los ceros de la función $b_2(z)$ (en caso contrario $f(z) = \frac{h_2(z)}{h_1(z)}$ tendría polos en algunos de los ceros de la función $b_1(z)$, es decir, en los ceros del denominador $h_1(z)$), la función $\frac{b_2(z)}{b_1(z)}$ es analítica en el círculo $|z| < R$. Esta puede expresarse en forma de límite de la sucesión:

$$\left\{\frac{b_{2n}(z)}{b_{1n}(z)}\right\},$$

donde cada una de las funciones racionales $\frac{b_{2n}(z)}{b_{1n}(z)}$ es analítica en el círculo $|z| < R$ y es igual a la unidad en valor absoluto en los puntos de la circunferencia $|z| = R$. Debido a esto $\left|\frac{b_{2n}(z)}{b_{1n}(z)}\right| \leqslant 1$ en el círculo $|z| < R$ y, por consiguiente, $\left|\frac{b_2(z)}{b_1(z)}\right| \leqslant 1$ en este círculo. Haciendo $\frac{b_2(z)}{b_1(z)} = b(z)$, escribamos la fórmula (5.2:1) en la forma siguiente:

$$f(z) = \frac{b(z)\, g_2(z)}{g_1(z)}, \tag{5.2:2}$$

donde cada una de las funciones $b(z)$, $g_2(z)$ y $g_1(z)$ no supera en valor absoluto la unidad y $g_1(z)$ no posee ceros en el interior del círculo $|z| < R$.

Por consiguiente,

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{|g_1(z)|} \quad \text{y} \quad \ln^+|f(z)| = \ln^+\frac{1}{|g_1(z)|} = \ln\frac{1}{|g_1(z)|}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\frac{1}{g_1(\rho e^{i\alpha})}\right| d\alpha = \ln\left|\frac{1}{g_1(0)}\right|.$$

(Aquí se ha tenido en cuenta que $\ln\frac{1}{|g_1(z)|}$ es una función armónica en el círculo $|z| < R$). De la última acotación se deduce que $f(z)$ pertenece a la clase N, con lo cual se termina toda la demostración.

Está claro que las funciones de la clase N pueden no estar acotadas en valor absoluto. Para el caso del círculo unidad la función $f(z) = \exp\frac{k}{1-z}$ $(k > 0)$ representa un ejemplo sencillo; cuando $z = x > 0$ tiende hacia el punto $z = 1$, ésta tiende al infinito. Escribámosla de la forma

$$f(z) = \frac{1}{\exp\frac{k}{z-1}} = \frac{1}{h_1(z)}.$$

Aquí

$$|h_1(\rho e^{i\alpha})| = \left|\exp\frac{k}{\rho e^{i\alpha}-1}\right| = \exp \operatorname{Re}\left(\frac{k}{\rho e^{i\alpha}-1}\right) =$$

$$= \exp\left(k\,\frac{\rho\cos\alpha - 1}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha}\right) < 1,$$

ya que $\frac{\rho\cos\alpha-1}{1+\rho^2-2\rho\cos\alpha} < 0$ para $\rho < 1$. Así, pues, hemos observado que $f(z)$ es el cociente de dos funciones acotadas (en este ejemplo $h_2(z) \equiv 1$); por consiguiente, $f(z)$ pertenece a la clase N.

Este ejemplo muestra que para algunas funciones de la clase N el máximo de sus módulos $M(\rho)$ puede crecer cuando $\rho \to R$ igual que $e^{\frac{k}{R-\rho}}$ $(k > 0)$ (en nuestro ejemplo

$$R = 1 \text{ y } M(\rho) = \max_{|z|=\rho}\left|\exp\frac{k}{1-z}\right| = e^{\frac{k}{1-\rho}}).$$

Conviene observar que para cada función de la clase N se puede señalar un número positivo k tal que para $M(\rho)$ se cumple la desigualdad

$$M(\rho) \leqslant e^{\frac{k}{R-\rho}}. \tag{5.2:3}$$

En efecto, en la demostración de la primera parte del teorema del presente apartado se estableció la existencia de una función armónica no negativa $u(z)$ que es mayorante para $\ln^+|f(z)|$ y, *a fortiori*, para $\ln|f(z)|$. Por lo tanto, para ρ', $\rho<\rho'<R$, tendremos:

$$\ln|f(\rho e^{i\alpha})|\leqslant u(\rho e^{i\alpha})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho' e^{i\alpha'})\frac{\rho'^2-\rho^2}{\rho'^2+\rho^2-2\rho'\rho\cos(\alpha'-\alpha)}\,d\alpha'\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\rho'^2-\rho^2}{\rho'^2+\rho^2-2\rho\rho'}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho' e^{i\alpha'})\,d\alpha'=\frac{\rho'+\rho}{\rho'-\rho}\,u(0).$$

Como esta desigualdad es válida para cualquier $\rho'<R$, se puede pasar aquí a límites para $\rho'\to R$, de donde

$$\ln|f(\rho e^{i\alpha})|\leqslant\frac{R+\rho}{R-\rho}\,u(0)<\frac{2Ru(0)}{R-\rho}\ ;$$

por consiguiente,

$$\ln M(\rho)=\max_{0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi}\ln|f(\rho e^{i\alpha})|<\frac{2Ru(0)}{R-\rho}$$

y, finalmente,

$$M(\rho)<e^{\frac{K}{R-\rho}},$$

donde $K=2Ru(0)$.

De este resultado se deduce, por ejemplo, que la función $\exp\dfrac{1}{(R-z)^{1+\varepsilon}}$ no puede pertenecer a la clase N para ningún $\varepsilon>0$, ya que para ella $M(\rho)=e^{\frac{1}{(R-\rho)^{1+\varepsilon}}}$.

La desigualdad obtenida de la forma (5.2:3) es solamente una condición necesaria para la pertenencia de la función a la clase N. No obstante ésta no es suficiente, como muestra el ejemplo de la función $\exp\dfrac{\pi i}{1-z}$, la cual no pertenece [a la clase N (véase la pág. 236) pero satisface a la condición

$$M(\rho)\leqslant e^{\frac{\pi}{1-\rho}}.$$

§ 6. PROPIEDADES DE FRONTERA DE LAS FUNCIONES DE FORMA ACOTADA

6.1. En este párrafo examinaremos las propiedades de frontera de las funciones de forma acotada en el círculo $|z|<R$, es decir, las propiedades que están relacionadas con el comportamiento de la función $f(z)$ cuando z se aproxima a los puntos de circunferencia $\Gamma_R: |z|=R$.

Supongamos primero que $f(z)$ es una función analítica en el círculo K_R: $|z|<R$ y que está acotada en valor absoluto: $|f(z)|\leqslant M$.

Aplicando la fórmula la Poisson (4.2:14), hallamos:

$$f(re^{i\theta})-f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(\rho e^{i\alpha})-f(0)]\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)+r^2}\,d\alpha,$$

$$r<\rho<R.$$

Integrando por partes y observando que $\int_0^{2\pi}[f(\rho e^{i\alpha})-f(0)]\,d\alpha=0$, obtenemos:

$$f(re^{i\theta})-f(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\alpha}[f(\rho e^{it})-f(0)]\,dt\right\}\frac{2r\rho(\rho^2-r^2)\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}{[\rho^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)+r^2]^2}\,d\alpha.$$

Hagamos:

$$\int_0^{\alpha}[f(\rho e^{it})-f(0)]\,dt=F_\rho(\alpha); \tag{6.1:1}$$

entonces

$$f(re^{i\theta})=f(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_\rho(\alpha)\frac{2r\rho(\rho^2-r^2)\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}{[\rho^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)+r^2]^2}\,d\alpha. \tag{6.1:2}$$

Está claro que el núcleo de la última integral es la derivada del núcleo de Poisson respecto del parámetro α. Obsérvese que la familia de funciones $\{F_\rho(\alpha)\}$, $0<\rho<R$, es en nuestras condiciones equicontinua:

$$|F_\rho(\alpha_2)-F_\rho(\alpha_1)|=\left|\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}f(\rho e^{it})\,dt\right|<M\,|\alpha_2-\alpha_1|;$$

además, satisface a las condiciones:

$$F_\rho(0)=F_\rho(2\pi)=0. \tag{6.1:3}$$

Por consiguiente, existe una sucesión $\{\rho_n\}$, $\rho_n<\rho_{n+1}$, $\rho_n\to R$, tal que $\{F_{\rho_n}(\alpha)\}$ converge uniformemente en el segmento $[0, 2\pi]$ hacia una función $F(\alpha)$ que satisface a las condiciones:

$$|F(\alpha_2)-F(\alpha_1)|\leqslant M\,|\alpha_2-\alpha_1|,\quad F(0)=F(2\pi)=0. \tag{6.1:4}$$

Evidentemente, $F(\alpha)$ se puede prolongar a todo el eje numérico como función continua periódica de período 2π.

Pasando al límite en la fórmula (6.1:2) (sobre la sucesión $\{\rho_n\}$), resulta:

$$f(re^{i\theta})=f(0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\alpha)\frac{2Rr(R^2-r^2)\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}{[R^2-2Rr\cos(\alpha-\theta)+r^2]^2}\,d\alpha. \tag{6.1:5}$$

Esta fórmula se aplicará para el estudio de los valores frontera radiales de la función $f(z)$, es decir, de los valores

$$\lim_{r\to R} f(re^{i\theta}).$$

Demostremos que existe el límite $\lim\limits_{r\to R} f(re^{i\theta_0})$ para cada θ_0 para el cual $F(\theta)$ tenga derivada $F'(\theta_0)=A$ $(\neq\infty)$. Sin restringir generalidad se puede suponer que $\theta_0=0$, puesto que se llega a este caso mediante la rotación: $z=\zeta e^{i\theta_0}$.

Apliquemos la fórmula (6.1:2) para $\rho=R$ a la función $f(re^{i\theta})=\frac{A}{R}re^{i\theta}$; observando que en este caso $F_R(\alpha)=A\int\limits_0^\alpha e^{it}\,dt=\frac{A}{i}(e^{i\alpha}-1)$, hallaremos que

$$\frac{A}{R}re^{i\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{A}{i}(e^{i\alpha}-1)\frac{2Rr(R^2-r^2)\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}{[R^2-2Rr\cos(\alpha-\theta)+r^2]^2}\,d\alpha. \qquad (6.1:5')$$

Restando miembro a miembro (6.1:5') de (6.1:5) tendremos:

$$f(re^{i\theta})=f(0)+\frac{Are^{i\theta}}{R}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_0(\alpha)\frac{2Rr(R^2-r^2)\operatorname{sen}(\alpha-\theta)}{[R^2-2Rr\cos(\alpha-\theta)+r^2]^2}\,d\alpha, \qquad (6.1:6)$$

donde $F_0(\alpha)=F(\alpha)-\frac{A}{i}(e^{i\alpha}-1)$ satisface a las condiciones:

$$F_0(0)=F_0(2\pi)=0 \ \text{ y } \ F_0'(0)=0. \qquad (6.1:7)$$

Hagamos $\theta=0$ y, teniendo en cuenta que $F_0(\alpha)$ es periódica, escribamos (6.1:6) en la forma:

$$f(r)=f(0)+A\frac{r}{R}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_0(\alpha)\frac{2Rr(R^2-r^2)\operatorname{sen}\alpha}{(R^2-2Rr\cos\alpha+r^2)^2}\,. \qquad (6.1:8)$$

En virtud de (6.1:7), para cualquier $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que $|F(\alpha)|<\varepsilon|\alpha|$ para $|\alpha|<\delta$. Dividamos la integral del segundo miembro de la fórmula (6.1:8) en tres sumandos: $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta}$, $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}$, $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}$. Está claro que el primero y tercer sumandos tienden a cero cuando $r\to R$. En lo que se refiere al segundo, éste (aplicando el método de integración por partes) se puede acotar del modo siguiente:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\right|\leqslant\varepsilon\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\alpha\,\frac{2Rr(R^2-r^2)\operatorname{sen}\alpha}{(R^2-2Rr\cos\alpha+r^2)^2}\,d\alpha=$$

$$=-\frac{\varepsilon}{\pi}\,\frac{\delta(R^2-r^2)}{R^2-2Rr\cos\delta+r^2}+\varepsilon\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{(R^2-r^2)\,d\alpha}{R^2-2Rr\cos\alpha+r^2}<$$

$$<\varepsilon\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos\alpha+r^2}\,d\alpha=\varepsilon.$$

Como ε es arbitrariamente pequeño, de la fórmula (6.1:8) sacamos la conclusión que

$$\lim_{r\to R} f(r) = f(0) + A. \qquad (6.1:9)$$

que es lo que se quería demostrar.

No queda más que observar que la función $F(\alpha)$ satisface a la condición de Lipschitz (6.1:4) en el segmento $[0, 2\pi]$ y, por consiguiente, posee derivada finita en casi todo este segmento *) (véase, por ejemplo, I. P. Natansón. Teoría de funciones de variable real, И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, изд. 2-е, переработанное, М., 1957, гл. IX).

Resumiendo, quede demostrado el siguiente teorema de Fatou: *una función $f(z)$ que es analítica y está acotada en valor absoluto en el círculo $|z| < R$ $(+\infty)$, posee valores frontera radiales en casi toda la circunferencia $|z| = R$.*

En otras palabras, el conjunto de puntos de esta circunferencia en los que no existen valores frontera radiales se puede encerrar en el interior de un sistema de arcos (finito o infinito y numerable) cuya suma de longitudes es arbitrariamente pequeña.

Hagamos la notación $\lim_{r\to R} f(re^{i\theta}) = f(Re^{i\theta})$; entonces, según la fórmula (6.1:9),

$$A = F'(0) = f(Re^{i\theta}) - f(0)$$

en casi todo el segmento $[0, 2\pi]$.

Por esta razón, para la función $F(\alpha)$ (que es absolutamente continua, debido a (6.1:3)) obtenemos la expresión

$$F(\alpha) = \int_0^{\alpha} [f(Re^{it}) - f(0)]\, dt.$$

Poniendo en la fórmula (6.1:5) o integrando por partes, hallamos

$$f(re^{i\theta}) = f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(Re^{i\alpha}) - f(0)]\, \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\alpha-\theta) + r^2}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\alpha})\, \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\alpha-\theta) + r^2}\, d\theta. \qquad (6.1:10)$$

Por consiguiente, una función analítica $f(re^{i\theta})$ que está acotada en valor absoluto, se expresa mediante sus valores frontera radiales por la integral de Poisson (la integral se debe entender aquí en el sentido de integral de Lebesgue). Este resultado también fue señalado por P. Fatou. Posteriormente fue extendido (por F. Riesz) a la clase H_1, definida como la clase de funciones analíticas $f(z)$

*) Se dice que una propiedad A se verifica en casi todo un conjunto E, si A es válida para todos los elementos de E a excepción, posiblemente, de un conjunto de medida nula (*Nota del T.*).

para las cuales

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\alpha})|\, d\alpha \leqslant C(f) < +\infty, \qquad 0 < r < R.$$

Se puede demostrar que la clase H_1 está contenida como una parte propia en la clase de todas las funciones de forma acotada.

6.2. El teorema de Fatou se puede completar demostrando que *para una función analítica $f(z)$ que está acotada en valor absoluto, no solamente existen los valores frontera radiales en casi toda la circunferencia Γ_R: $|z| = R$, sino que también los valores frontera angulares.* Más exactamente, demostraremos que

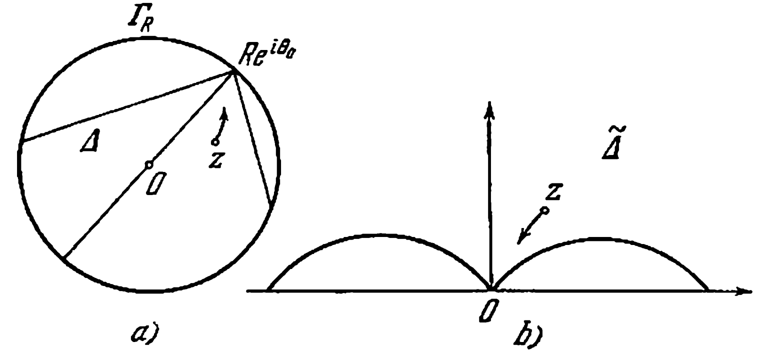


FIG. 34.

si desde un punto $Re^{i\theta_0}$, en el cual la función acotada $f(z)$ posee el valor frontera radial A, se trazan dos cuerdas cualesquiera de la circunferencia Γ_R, entonces en el triángulo curvilíneo Δ (fig. 34,*a*) limitado por estas cuerdas y el arco correspondiente de Γ_R, se verifica la relación:

$$\lim_{\substack{z \to Re^{i\theta_0} \\ z \in \Delta}} f(r) = A.$$

Realicemos una transformación conforme del círculo $|z| < R$ en el semiplano superior, de modo que Γ_R se transforme en el eje real, que el punto $Re^{i\theta_0}$ vaya al origen de coordenadas y que el punto diametralmente opuesto vaya al punto del infinito. Entonces el diámetro de la circunferencia Γ_R que pasa por $Re^{i\theta_0}$ se transformará en el semieje imaginario y el recinto Δ, en el recinto $\tilde{\Delta}$ representado en la fig. 34,*b*). Está claro que la proposición expuesta se deduce del siguiente teorema:

Sea $f(z)$ una función analítica y acotada en valor absoluto ($|f(z)| \leqslant M$) en el semiplano superior. Si existe $\lim_{y \to 0} f(iy) = A$, entonces en cualquier ángulo D formado por dos rayos del semiplano superior que partan del punto $z = 0$, existe el límite:

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in D}} f(z) = A.$$

D e m o s t r a c i ó n. Sin restringir generalidad se puede suponer que $A = 0$ (es suficiente sustituir $f(z)$ por $f(z) - A$). Demostremos primero el teorema para un caso particular, cuando el ángulo D está limitado por las bisectrices del primero y segundo cuadrantes coordenados. Sea ε algún número positivo. Tomemos $2\delta > 0$ de modo que se cumpla la condición: $|f(iy)| < \varepsilon$ si $0 < y < 2\delta$. Para cualquier punto interior $z_0 = x_0 + iy_0$ del triángulo POQ (fig. 35) el cuadrado T_{z_0} : $|x - x_0| \leqslant |x_0|$, $|y - y_0| \leqslant |x_0|$, evidentemente, pertenecerá al semiplano superior y uno de sus lados estará situado en el segmento OS del eje imaginario. Esto significa que en el lado CF del cuadrado $|f(z)| < \varepsilon$ y en cada uno de los otros tres $|f(z)|$ será menor que M

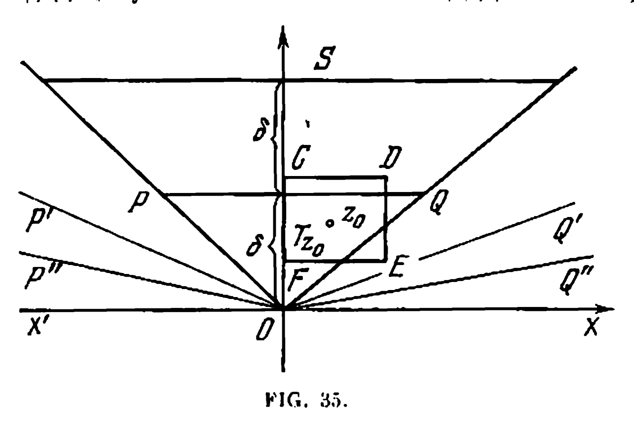


FIG. 35.

Realicemos ahora una sucesión de transformaciones del plano z haciéndolo girar cada vez alrededor del punto z_0 el ángulo $\frac{\pi}{2}$ en sentido positivo. Como resultado, $f(z)$ se transformará sucesivamente en las funciones $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, $f_4(z) = f(z)$, . . . Todas éstas son funciones analíticas en T_{z_0} y en cada uno de los lados de T_{z_0} el módulo de una de ellas será menor que ε y los módulos de las demás serán menores que M. Formemos el producto: $F(z) = f_1(z) \cdot f_2(z) \times \times f_3(z) \cdot f_4(z)$; como $f_j(z_0) = f(z_0)$, $j = 1, 2, 3, 4$, según el principio del módulo máximo se tiene: $|F(z_0)| = |f(z_0)|^4 \leqslant M^3 \cdot \varepsilon$, es decir, $|f(z_0)| \leqslant \leqslant M^{3/4} \cdot \varepsilon^{1/4}$. Esta acotación se cumple uniformemente en cada punto interior del triángulo POQ; por lo tanto, como $f(z)$ es continua, la acotación se extiende también a todos los puntos del contorno (a excepción, posiblemente, del punto O) Así, pues, $|f(z)| \leqslant M^{3/4} \cdot \varepsilon^{1/4}$ si $z \in \overline{POQ}$ $(z \neq 0)$; de aquí se deduce que $\lim f(z) = 0$ cuando z tiende a 0 manteniéndose dentro o en los lados del ángulo POQ. En particular, $\lim f(z) = 0$ cuando z tiende a 0 sobre los rayos QO o PO.

Evidentemente, el caso particular considerado puede enunciarse de la forma siguiente: si una función $f(z)$ que es analítica y está acotada en valor absoluto en un ángulo con el vértice en el punto $z = 0$, tiende a 0 cuando $z \to 0$ manteniéndose en la bisectriz del ángulo, entonces esta función tiene el mismo límite 0 cuando $z \to 0$ manteniéndose en un ángulo de magnitud doblemente menor con la misma bisectriz. En efecto, transformando conformemente el ángulo dado en el semiplano superior (el punto $z = 0$ se queda inmóvil en este caso), se reduce este caso al que acabamos de considerar. Pero entonces, como $\lim f(z) =$

$= 0$ en los rayos OQ y OP, sacamos la conclusión que $\lim f(z) = 0$ cuando $z \to 0$ manteniéndose dentro o en los lados del ángulo $P'OQ'$ formado por las bisectrices de los ángulos QOX y POX', y luego, dentro o en los lados del ángulo $P''OQ''$ formado por las bisectrices de los ángulos $Q'OX$ y $P'OX'$, etc. Con esto se termina la demostración del teorema.

6.3. Demostremos ahora el siguiente teorema de unicidad para los valores frontera de una función analítica acotada:

Teorema de los hermanos Riesz. *Si los valores frontera radiales de una función $f(z)$, que es analítica y es de forma acotada en K_R: $|z| < R$, se anulan en un conjunto E_R de puntos de la circunferencia Γ_R: $|z| = R$, de medida positiva, entonces $f(z) \equiv 0$.*

Demostremos el teorema por reducción a lo absurdo. Sea $f(z) \not\equiv 0$; supongamos además que $f(0) \neq 0$ $\left(\text{si } f(z) \text{ tiene un cero de orden } k \text{ en el punto } z = 0, \text{ entonces en lugar de } f(z) \text{ se puede considerar } \frac{f(z)}{z^k}\right)$. Designemos con $\mathscr{E}$ el conjunto de todos los puntos α del segmento $[0, 2\pi]$ que corresponden a los puntos $Re^{i\alpha} \in E_R$; evidentemente, mes $\mathscr{E} > 0$ (R mes $\mathscr{E}$ = mes E_R) *). Como por la hipótesis del teorema:

$$\lim_{\alpha \in \mathscr{E},\ \rho \to R} f(\rho e^{i\alpha}) = 0,$$

resulta, debido al teorema de D. F. Egórov (véase I. P. Natansón, Teoría de funciones de variable real, cap. cuarto, § 3 И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, гл. четвертая, § 3, изд. 2-е, 1957), que existe un conjunto cerrado $\mathscr{E}' \subset \mathscr{E}$, también de medida positiva, en el cual la familia de funciones de α: $\{f(\rho e^{i\alpha})\}$ tiende a 0 uniformemente cuando $\rho \to R$. En tal conjunto $\mathscr{E}'$ la familia $\left\{\ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha})|}\right\}$ tiende uniformemente a ∞. Por ello

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^- |f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha})|}\, d\alpha \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathscr{E}'} \ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha})|}\, d\alpha$$

también tiende a ∞ para $\rho \to R$. Pero ya se vio en el ap. 5.1 que de la condición

$$\overline{\lim_{\rho \to R}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha < +\infty,$$

que caracteriza a las funciones de forma acotada, se deduce que

$$\overline{\lim_{\rho \to R}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^- |f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha < +\infty.$$

De la contradicción obtenida se deduce que el teorema de unicidad que se demuestra es justo.

---

*) mes $\mathscr{E}$ denota la medida del conjunto $\mathscr{E}$ (*Nota del T.*).

Este teorema fue demostrado por primera vez por los hermanos M. y. F. Riesz en el año 1916 (publicado en el año 1918). Independientemente de ellos, los teoremas frontera de unicidad más generales fueron obtenidos por N. N. Luzin y I. I. Priválov (publicados en el año 1919). Obsérvese que si a $f(z)$ no se le impone ninguna condición, entonces de la anulación de sus valores frontera radiales en un conjunto de puntos de la circunferencia de medida positiva no se deduce todavía que la misma función es idénticamente nula.

6.4. Los teoremas principales de este párrafo se extienden inmediatamente a una clase más general de funciones, para la cual se conserva la denominación de clase de funciones de forma acotada (R. Nevanlinna). Precisando, a una función $f(z)$ que es analítica en el círculo $|z|<R$, a excepción posiblemente de polos, la llamaremos *función de forma acotada*, si ella puede expresarse en forma de un cociente de dos funciones analíticas que están acotadas en valor absoluto:

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}. \tag{6.4:1}$$

Sea $\{b_h\}$ la sucesión de todos los polos de $f(z)$ en el círculo K_R: $|z|<R$, donde cada polo se repite tantas veces cual sea su orden de multiplicidad. Como la sucesión $\{b_h\}$ tiene que estar contenida en la sucesión de ceros de la función $h(z)$, la cual está acotada en valor absoluto, tiene que ser

$$\sum_{k=1}^{\infty}(R-|b_k|)<+\infty \tag{6.4:2}$$

(véase ap. 5.1). Hemos obtenido la primera condición necesaria a la que satisface cada función de forma acotada. Está claro que ésta se cumple de un modo trivial para cada función que tiene solamente una cantidad finita de polos en K_R y, en paricular, para la que no tiene ninguno.

Ahora, de (6.4:1) obtenemos:

$$\ln|f(z)|=\ln|g(z)|+\ln\frac{1}{|h(z)|}\leqslant\ln^+|g(z)|+\ln^-|h(z)|,$$

de donde

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|g(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^-|h(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha.$$

Como $g(z)\in N$ y $h(z)\in N$, de aquí se deduce (véase 5.1) que

$$\overline{\lim_{\rho\to R}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha<+\infty. \tag{6.4:3}$$

Esta es la segunda condición necesaria a la que tiene que satisfacer toda función de forma acotada. Demostremos que el conjunto de estas condiciones es suficiente para que la función $f(z)$ sea de forma acotada, es decir, admita una expresión de la forma (6.4:1).

Debido a la condición (6.4:2) se puede construir una función $h_1(z)$ (el producto de Blaschke) que esté acotada en valor absoluto y cuyos ceros sean todos los puntos de la sucesión $\{b_k\}$ y solamente éstos (ap. 4.2); como $|h_1(z)|\leqslant 1$.

se tiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|h_1(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha=0, \qquad 0<\rho<R \tag{6.4:4}$$

Hagamos ahora

$$f(z)\cdot h_1(z)=g_1(z). \tag{6.4:5}$$

Por la construcción, $g(z)$ es una función analítica en el círculo K_R; además.

$$\ln^+|g_1(z)|\leqslant\ln^+|f(z)|+\ln^+|h_1(z)|$$

(véase 5.1) y, por consiguiente, en virtud de (6.4:3) y (6.4:4):

$$\lim_{\rho\to R}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|g_1(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha<+\infty. \tag{6.4:6}$$

De aquí se deduce que $g_1(z)\in N$, es decir (véase 5.2)

$$g_1(z)=\frac{g(z)}{h_2(z)}, \tag{6.4:7}$$

donde $g(z)$ y $h_2(z)$ son funciones analíticas y acotadas en valor absoluto en K_R. Haciendo $h_1(z)\,h_2(z)=h(z)$, obtenemos definitivamente de las fórmulas (6.4:5) y (6.4:7):

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)},$$

donde $g(z)$ y $h(z)$ son funciones analíticas y acotadas en valor absoluto en K_R.

La clase general de funciones de forma acotada, definida en este apartado, la designaremos con la letra A. La clase N, examinada en el § 5, es una parte propia de A: $N\subset A$. Evidentemente, N se puede caracterizar como la subclase de A que reúne a todas las funciones analíticas que no tienen polos en el círculo K_R.

Supongamos que $f(z)\in A$ y que $f(z)\not\equiv 0$; entonces

$$f(z)=\frac{g(z)}{h(z)},$$

donde $g(z)$ y $h(z)$ son funciones analíticas y acotadas en valor absoluto en K_R y $g(z)\not\equiv 0$ y $h(z)\not\equiv 0$. Según el teorema de Fatou, $g(z)$ y $h(z)$ poseen valores frontera angulares en casi toda la circunferencia Γ_R: $|z|=R$. Según el teorema de los hermanos Riesz, estos valores son distintos de cero en casi toda la circunferencia. De aquí se deduce que $f(z)\in A$, $f(z)\not\equiv 0$, *posee en casi toda la circunferencia* Γ_R *valores frontera angulares distintos de cero.*

CAPITULO
SEPTIMO

FUNCIONES ENTERAS Y MEROMORFAS

§ 1. CRECIMIENTO DE UNA FUNCION ENTERA. ORDEN Y TIPO

1.1. Según la definición, una función que es uniforme y analítica en todo el plano, se llama entera. Tal función se expresa por una serie de potencias que es convergente en todos los puntos:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots \quad (1.1:1)$$

donde, en virtud de la fórmula de Cauchy-Hadamard,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \quad (1.1:2)$$

En el punto del infinito la función entera puede ser regular, entonces $f(z)$ es constante, puede tener un polo de orden $k \geqslant 1$, entonces $f(z)$ es un polinomio de grado k, y, finalmente, puede tener un punto singular esencial. En el último caso ésta se llama función trascendente entera. Son ejemplos de funciones trascendentes enteras, la función exponencial e^z, las funciones trigonométricas sen z y cos z, y otras.

Aquí estudiaremos principalmente las funciones trascendentes enteras. La característica más importante de tales funciones es el máximo del módulo

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Este es una función creciente de r, que en virtud del teorema de Liouville satisface a la condición

$$\lim_{r\to\infty} M(r) = \infty. \quad (1.1:3)$$

Está claro que $M(r)$ (para una función trascendente entera) crece más rápidamente que la potencia de r con cualquier exponente fijo.

Además, se cumple la relación

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \infty. \qquad (1.1:4)$$

En efecto, suponiendo que

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{\ln r} = \mu < \infty,$$

tendremos que, para cualquier número finito $\mu' > \mu$, existe una sucesión $\{r_n\}$ que tiende hacia el infinito, tal que para cada r_n se cumple la desigualdad

$$\ln M(r_n) < \mu' \ln r_n, \quad \text{o bien,} \quad M(r_n) < r_n^{\mu'}.$$

Por lo tanto, para los coeficientes de la serie (1.1:1) obtenemos en virtud de las desigualdades de Cauchy:

$$|a_k| \leqslant \frac{M(r_n)}{r_n^k} < r_n^{\mu'-k}.$$

Como r_n se puede tomar aquí lo grande que se quiera, de aquí se deduce que todos los coeficientes de la serie de Taylor para los cuales $k > \mu' > \mu$, son iguales a cero y, por consiguiente, $f(z)$ es un polinomio de grado no superior a $[\mu]$ ($[\mu]$ es la parte entera de μ).

De lo demostrado se deduce que la función potencial r^{μ} no es inmediatamente útil para la acotación del crecimiento de una función trascendente entera. Por esta razón se recurre a la función más simple entre las de crecimiento rápido, precisamente, a la función exponencial.

Si existe un número positivo μ tal que para todos los valores de r suficientemente grandes se cumple la desigualdad

$$M(r) < e^{r^{\mu}}, \qquad (1.1:5)$$

se dice que la función entera $f(z)$ es de o r d e n f i n i t o. En caso contrario, es decir, si para cualquier $\mu > 0$ existen valores arbitrariamente grandes de r para los cuales $M(r)$ supera a $e^{r^{\mu}}$, se dice que la función entera es de o r d e n i n f i n i t o.

El ejemplo más simple de función de orden finito es e^z, y de orden infinito, e^{e^z}.

Examinemos las funciones de orden finito. Consideremos el extremo inferior de aquellos valores de μ para los cuales se cumple la desigualdad (1.1:5) comenzando desde valores suficientemente grandes de $r > r(\mu)$.

Este extremo inferior se llama o r d e n (se supone que es el orden de crecimiento) de la función entera y se designa por ρ.

Así, pues,

$$\rho = \inf \mu \geqslant 0.$$

Para las funciones de orden infinito se hace $\rho = \infty$. Debido a la definición, para cualquier $\varepsilon > 0$ tiene que cumplirse la desigualdad

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \qquad (1.1:6)$$

para $r > R(\varepsilon)$; por otra parte, existen valores arbitrariamente grandes de r: $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, que satisfacen a la desigualdad

$$M(r_n) > e^{r_n^{\rho-\varepsilon}}. \qquad (1.1:7)$$

De las desigualdades (1.1:6) y (1.1:7) se deduce que

$$\frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} < \rho + \varepsilon \quad \text{para} \quad r > R(\varepsilon)$$

y que

$$\frac{\ln \ln M(r_n)}{\ln r_n} > \rho - \varepsilon$$

para r_n arbitrariamente grandes. Por lo tanto,

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r}. \qquad (1.1:8)$$

Esta expresión puede servir de definición del orden de la función entera.

Si $f(z)$ es de orden finito ρ y existe un número positivo K tal que

$$M(r) < e^{Kr^{\rho}}, \qquad (1.1:9)$$

entonces se dice que $f(z)$ es una función de t i p o f i n i t o. En caso contrario, es decir, si para cualquier $K > 0$ existen valores de r arbitrariamente grandes para los cuales $M(r)$ es superior a $e^{Kr^{\rho}}$, se dice que la función de orden ρ es de t i p o i n f i n i t o (o m a x i m a l).

Detengámonos en las funciones de tipo finito. El extremo inferior de aquellos valores de K para los cuales se cumple la desigualdad (1.1:9) para valores suficientemente grandes de r, se llama t i p o de la función entera y se designa por σ. Así, pues,

$$\sigma = \inf K \geqslant 0.$$

Entre las funciones de tipo finito se distinguen las funciones de t i p o n o r m a l ($\sigma > 0$) y las funciones de t i p o m i n i m a l ($\sigma = 0$).

Para las funciones de tipo maximal se hace $\sigma = \infty$. Debido a la definición, para cualquier $\varepsilon > 0$ tiene que cumplirse la desigualdad

$$M(r) < e^{(\sigma+\varepsilon)r^{\rho}} \qquad (1.1:10)$$

para $r > R(\varepsilon)$; por otra parte, existen valores arbitrariamente grandes de r: $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, que satisfacen a la desigualdad

$$M(r_n) > e^{(\sigma-\varepsilon)r_n^\rho}. \tag{1.1:11}$$

De las desigualdades (1.1:10) y (1.1.11) se deduce que

$$\frac{\ln M(r)}{r^\rho} < \sigma+\varepsilon \quad \text{para} \quad r > R(\varepsilon)$$

y $\dfrac{\ln M(r_n)}{r_n^\rho} > \sigma-\varepsilon$ para r_n arbitrariamente grandes. Por esta razón

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r^\rho}. \tag{1.1:12}$$

Esta expresión puede servir de definición del tipo de la función entera.

Evidentemente, e^z es una función entera de orden $\rho=1$ y tipo $\sigma=1$. Para $\operatorname{sen} z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, se tiene:

$$|\operatorname{sh} y| \leqslant |\operatorname{sen} z| \leqslant \sqrt{\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x} \leqslant \operatorname{ch} y.$$

Por lo tanto,

$$\frac{e^r-1}{2} < \operatorname{sh} r \leqslant M(r) = \max_{|z|=r} |\operatorname{sen} z| \leqslant \operatorname{ch} r = \frac{e^r+e^{-r}}{2} < \frac{e^r+1}{2},$$

de donde $\rho = 1$ y $\sigma = 1$. Para $\cos z$ resultan los mismos valores de ρ y σ.

1.2. Expresemos el orden y el tipo de una función entera mediante los coeficientes de la serie de potencias (1.1:1). Supongamos que $f(z)$ es una función de orden finito. Entonces, para $r > R = R(K, \mu)$, se tiene:

$$M(r) < e^{Kr^\mu}, \tag{1.2:1}$$

donde $\mu > \rho$, y para una función de orden ρ y tipo finito σ: $\mu = \rho$ y $K > \sigma$. Por consiguiente, en virtud de las desigualdades de Cauchy para los coeficientes de la serie de potencias

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n} < \frac{e^{Kr^\mu}}{r^n} \quad \text{para} \quad r > R.$$

La función $\dfrac{e^{Kr^\mu}}{r^n}$ (como muestra un cálculo sencillo, donde hay que igualar a cero la derivada logarítmica) alcanza el mínimo para $r = \left(\dfrac{n}{\mu K}\right)^{\frac{1}{\mu}}$; este mínimo es igual a $\left(\dfrac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}$. Eligiendo

$N = N(K, \mu)$ de modo que $\left(\frac{n}{\mu K}\right)^{\frac{1}{\mu}}$ supere a $R(K, \mu)$ para $n > N$, obtenemos:

$$|a_n| < \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}} \quad \text{para} \quad n > N. \tag{1.2:2}$$

Así, pues, las desigualdades (1.2:2) son consecuencia de las desigualdades (1.2:1). Observando que para una función entera $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y, por consiguiente, $\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \to$ $\to +\infty$, obtenemos primero de (1.2:2)

$$\mu > \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} + \frac{\ln \frac{1}{e\mu K}}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} \tag{1.2:3}$$

y luego:

$$\mu \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}.$$

Como se puede tomar por μ cualquier número mayor que ρ, de aquí se deduce que

$$\rho \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} \tag{1.2:4}$$

En resumen, para una función de orden finito ρ, el valor

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} = \alpha \tag{1.2:5}$$

también es finito y no es superior a ρ.

Supongamos ahora que $f(z)$ es una función de tipo finito σ. Entonces, en la desigualdad (1.2:1) se puede hacer $\mu = \rho$ y se puede tomar por K cualquier número mayor que σ. Para estos valores de μ y K, obtenemos de (1.2:2):

$$n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} < (e\rho K)^{\frac{1}{\rho}},$$

de donde

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant (e\rho K)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Como en el segundo miembro puede ponerse en lugar de K cualquier número mayor que σ, obtenemos:

$$(e\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}} \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|}. \qquad (1.2:6)$$

En resumen, para una función de orden finito ρ y tipo finito σ, el valor

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} = \beta \qquad (1.2:7)$$

también es finito y no es superior a $(e\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}}$.

Ahora demostraremos que, en la realidad, en las relaciones (1.2:4) y (1.2:6) no se cumplen las desigualdades, de modo que siempre

$$\alpha = \rho \quad \text{y} \quad \beta = (e\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Sin hacer ninguna suposición respecto de la función $f(z)$ supongamos que para algunos valores de μ y K se cumplen las desigualdades (1.2:2). Entonces

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{1}{\mu}} \qquad (n > N),$$

de donde se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, es decir, la función $f(z)$ es entera. En virtud de la misma desigualdad, para cualquier $r > 0$ y $n > N$ se tiene:

$$\sqrt[n]{|a_n|\, r^n} < \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{1}{\mu}} r.$$

El segundo miembro de esta desigualdad para $n > [2^{\mu} e\mu K r^{\mu}] = n(r)$ tiene un valor menor que $\frac{1}{2}$. Tomando $R = R(\mu, K) > 1$ tan grande que para $r > R$ se cumpla la desigualdad $n(r) = [2^{\mu} e\mu K r^{\mu}] > N = N(K, \mu)$, se puede afirmar que para todos los valores indicados de r y para $n > n(r)$ se cumplen las desigualdades:

$$\sqrt[n]{|a_n|\, r^n} < \frac{1}{2}, \quad \text{o sea} \quad |a_n|\, r^n < \frac{1}{2^n}.$$

Teniendo esto en cuenta, acotemos superiormente $M(r)$. Se tiene:

$$M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|=r} \left| \sum_0^{\infty} a_n z^n \right| \leqslant \sum_0^{\infty} |a_n|\, r^n =$$

$$= \sum_0^{n(r)} |a_n|\, r^n + \sum_{n(r)+1}^{\infty} |a_n|\, r^n$$

y, por consiguiente, para $r > R$

$$M(r) < \sum_{0}^{n(r)} |a_n| r^n + \sum_{n(r)+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \sum_{0}^{n(r)} |a_n| r^n + 1.$$

Pero

$$\sum_{0}^{n(r)} |a_n| r^n = \sum_{0}^{N} |a_n| r^n + \sum_{N+1}^{n(r)} |a_n| r^n < r^N \sum_{0}^{N} |a_n| +$$
$$+ [n(r) - N] \max_{n=N+1,\ldots,n(r)} |a_n| r^n;$$

puesto que $\max\limits_{N+1 \leqslant n \leqslant n(r)} |a_n| r^n \leqslant \max\limits_{N+1 \leqslant n} |a_n| r^n$, y basándose en la desigualdad (1.2:2), cierta para $n \geqslant N+1$, obtenemos:

$$\max_{N+1 \leqslant n \leqslant n(r)} |a_n| r^n \leqslant \max_{N+1 \leqslant n} \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}} r^n \leqslant \max_{1 \leqslant n} \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}} r^n.$$

Fácilmente se comprueba que $\max\limits_{1 \leqslant n} \left(\frac{e\mu K}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}} r^n$ se alcanza para $n = \mu K r^\mu$ y es igual a e^{Kr^μ}; por consiguiente,

$$\max_{N+1 \leqslant n \leqslant n(r)} |a_n| r^n < e^{Kr^\mu},$$

y como $1 < e^{Kr^\mu}$, resulta:

$$M(r) < r^N \sum_{0}^{N} |a_n| + [n(r) + 1 - N] e^{Kr^\mu} <$$
$$< r^N \sum_{0}^{N} |a_n| + (2^\mu e\mu K r^\mu + 1 - N) e^{Kr^\mu} =$$
$$= e^{Kr^\mu} \left(2^\mu e\mu K r^\mu + 1 - N + r^N e^{-Kr^\mu} \sum_{0}^{N} |a_n|\right).$$

Está claro que para cualquier $\varepsilon > 0$ la expresión que figura entre paréntesis es menor que $e^{\varepsilon r^\mu}$ para r suficientemente grande. Por lo tanto,

$$M(r) < e^{(K+\varepsilon) r^\mu} \quad \text{para} \quad r > R'(\varepsilon) > R. \qquad (1.2:8)$$

Queda demostrado que de las desigualdades para los coeficientes (1.2:2) se deduce como consecuencia la desigualdad (1.2:8) para el máximo del módulo de la función.

Supongamos ahora que los coeficientes de la serie de potencias (1.2:1) son tales que la magnitud α (1.2:5) posee un valor finito.

Entonces para cualquier $\mu > \alpha$ se tiene, para $n > n(\mu)$:

$$\frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} < \mu,$$

o bien,

$$|a_n| < \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}.$$

Hemos obtenido una desigualdad del tipo (1.2:2), en la cual $e\mu K = 1$, o sea, $K = \frac{1}{e\mu}$. Por consiguiente, según lo demostrado, el máximo del módulo de la función $f(z)$ satisface, para $r > R'(\varepsilon)$, a la desigualdad

$$M(r) < e^{\left(\frac{1}{e\mu}+\varepsilon\right) r^{\mu}}.$$

De aquí se deduce que el orden ρ de la función $f(z)$ no es superior a μ, y como μ es un número cualquiera, mayor que α, se tiene:

$$\rho \leqslant \alpha.$$

De aquí junto con la relación obtenida anteriormente $\rho \geqslant \alpha$ (véase (1.2:4)) resulta:

$$\rho = \alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}. \qquad (1.2:9)$$

Hemos obtenido la expresión del orden de una función entera mediante los coeficientes de la serie de potencias. En particular, se observa que si uno de los números α y ρ es finito, entonces el otro también lo es; de aquí se deduce que si uno de ellos es infinito, el otro también lo es. En otras palabras, la relación (1.2:9) es válida también para las funciones de orden infinito.

Supongamos ahora que para los coeficientes de la serie de potencias no sólo es finito α (y, por consiguiente, $f(z)$ es de orden finito $\rho = \alpha$), sino que también la magnitud β (1.2:7). Expresando β en la forma $(e\rho\sigma')^{\frac{1}{\rho}}$, es decir, haciendo $\sigma' = \frac{\beta^{\rho}}{e\rho}$, tendremos para cualquier $K > \sigma'$ y para $n > n(K)$:

$$n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} < (e\rho K)^{\frac{1}{\rho}},$$

o bien,

$$|a_n| < \left(\frac{e\rho K}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}.$$

Esta es una desigualdad del tipo (1.2:2) para $\mu=\rho$; según lo demostrado, de aquí se deduce para $M(r)$ una desigualdad de la forma (1.2:8):

$$M(r)<e^{(K+\varepsilon)r^{\rho}}, \qquad r>R'(\varepsilon).$$

Como el orden de la función $f(z)$ es ρ, de la última desigualdad se deduce que el tipo σ de la función $f(z)$ es finito y satisface a la desigualdad

$$\sigma\leqslant K,$$

o bien, observando que K es cualquier número mayor que σ':

$$\sigma\leqslant\sigma'=\frac{\beta^{\rho}}{e\rho},$$

es decir,

$$(\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}\leqslant\beta.$$

Más arriba (fórmula (1.2:6)) se demostró que $(\sigma e\rho)^{\frac{\rho}{\rho}}\geqslant\beta$, por consiguiente,

$$(\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}=\beta=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{|a_n|}. \qquad (1.2:10)$$

Hemos obtenido la expresión del tipo de una función entera mediante los coeficientes de la serie de potencias (y mediante su orden ρ, el cual, a su vez, se expresa mediante los coeficientes).

De lo expuesto anteriormente se deduce que la fórmula (1.2:10) es válida también para las funciones de orden finito, pero de tipo infinito (maximal).

Obsérvese que si para una función entera $f(z)$ se supone solamente que es finita la magnitud

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\mu}}\sqrt[n]{|a_n|}=\beta, \qquad (1.2:11)$$

donde μ es un número positivo, respecto del cual no se supone que es el orden de la función, del mismo modo que no se supone que $f(z)$ es una función de orden finito, entonces de aquí se deduce que $f(z)$ es una función de orden μ y tipo $\frac{\beta^{\mu}}{e\mu}$, o bien $f(z)$ es una función de orden inferior a μ.

En efecto, de la hipótesis hecha se deduce que para cualquier $\beta'>\beta$, para $n>N'$, se cumple la desigualdad

$$n^{\frac{1}{\mu}}\sqrt[n]{|a_n|}<\beta'$$

o sea,

$$|a_n| < \left(\frac{\beta'^{\mu}}{n}\right)^{\frac{n}{\mu}}.$$

Esta es una desigualdad del tipo (1.2:2) para $e\mu K = \beta'^{\mu}$; de ella se deduce para $M(r)$ una desigualdad del tipo (1.2:8)

$$M(r) < \exp\left[\left(\frac{\beta'^{\mu}}{e\mu} + \varepsilon\right) r^{\mu}\right]$$

y, por consiguiente, el orden ρ de la función $f(z)$ no es superior a μ. Si éste es igual a μ, entonces de la relación (1.2:11) se deduce, como ya se demostró anteriormente, que el tipo σ de la función $f(z)$ es $\frac{\beta^{\mu}}{e^{\mu}}$.

Entre las funciones trascendentes enteras las más simples son las de tipo exponencial. Así se llaman las funciones de primer orden y tipo finito, y también las funciones de orden inferior al primero. De la observación que acabamos de hacer se deduce que las funciones de tipo exponencial se determinan completamente por una relación de la forma

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n \sqrt[n]{|a_n|} = \beta < \infty.$$

Precisando, las funciones respectivas serán de primer orden y de tipo $\sigma = \frac{\beta}{e}$, o bien de orden inferior al primero.

Aplicando las fórmulas (1.2:9) y (1.2:10) es fácil mostrar un ejemplo de función entera de un orden arbitrario ρ y tipo σ. Así, pues, haciendo $a_n = \left(\frac{e\rho\sigma}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}$ $(n \geqslant 1)$, donde $\rho > 0$ y $\sigma > 0$, obtenemos el siguiente ejemplo de función entera de orden ρ y tipo σ:

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{e\rho\sigma}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}} z^n.$$

Como se deduce de las fórmulas (1.2:9), para una función de orden nulo tiene que cumplirse la condición:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} = 0.$$

De aquí se deduce que es suficiente tomar

$$|a_n| = \frac{1}{n^{n\varepsilon_n}},$$

donde ε_n es una sucesión arbitraria de números positivos, convergente hacia cero. Por ejemplo, cualquier función de la forma

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{n1+\delta}}\qquad(\delta>0)$$

es una función de orden nulo.

Finalmente, para obtener un ejemplo de función de orden infinito, es suficiente someter los números $|a_n|$ a la condición

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}}=\infty,$$

es decir, tomar

$$|a_n|=\frac{1}{n^{\alpha_n\cdot n}}.$$

donde α_n es una sucesión de números positivos convergente hacia cero, pero no muy rápidamente (de modo que se cumpla la condición necesaria

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha_n}}=0,$$

es decir, que sea $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\ln n=\infty$). Por ejemplo, se puede suponer que $\alpha_n=\frac{1}{(\ln n)^{1-\delta}}$ $(0<\delta<1)$. Entonces obtenemos la función

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{z^n}{\exp[n(\ln n)^{\delta}]}.$$

1.3. La función $M(r)$, determinando el crecimiento de la función $f(z)$ en todo el plano, no proporciona datos algunos sobre el comportamiento de la función en tal o cual recinto no acotado y, en particular, en algún ángulo con el vértice en el origen de coordenadas.

Examinemos, por ejemplo, la función exponencial e^z $(\rho=1,\ \sigma=1)$. Como $|e^z|=e^x=e^{r\cos\vartheta}$, en cada ángulo de la forma $-\frac{\pi}{2}+\varepsilon<\vartheta<\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ el módulo de la función satisface a la condición $e^r>|e^z|>e^{r\,\mathrm{sen}\,\varepsilon}$ y, por consiguiente, tiende al infinito cuando $r\to\infty$. En los ángulos de la forma $\frac{\pi}{2}+\varepsilon<\vartheta<\frac{3\pi}{2}-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ se tiene: $|e^z|<e^{-r\,\mathrm{sen}\,\varepsilon}$, y por consiguiente, e^z tiende a cero cuando $r\to\infty$. Así, pues, en este ejemplo existen dos ángulos, cada uno de ellos de magnitud π (los semiplanos de la derecha y de la izquierda), tales que en los ángulos situados junto

con sus lados en el interior de uno de ellos, la función tiende a ∞, mientras que en el interior del otro tiende a 0.

La función $f(z) = e^{P(z)}$, donde $P(z)$ es un polinomio de grado n:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0, \ n \geqslant 1)$$

representa un ejemplo similar de carácter más general. Haciendo $a_k = \sigma_k e^{i\alpha_k}$ y $z = re^{i\vartheta}$, obtenemos:

$$|f(z)| = \left| \exp\left[\sum_0^n \sigma_k r^k e^{i(\alpha_k + k\vartheta)}\right]\right| = \exp\left[\sum_0^n \sigma_k r^k \cos(\alpha_k + k\vartheta\right] =$$

$$= \exp\left\{\sigma_n r^n \left[\cos(\alpha_n + n\vartheta) + \sum_0^{n-1} \frac{\sigma_k \cos(\alpha_k + k\vartheta)}{\sigma_n r^{n-k}}\right]\right\}.$$

La suma $\sum\limits_0^{n-1} \frac{\sigma_k \cos(\alpha_k + k\vartheta)}{\sigma_n r^{n-k}}$ tiende a cero cuando $r \to \infty$; por consiguiente, la magnitud que figura entre corchetes para cualquier $\varepsilon > 0$ y para valores suficientemente grandes de $r \ (r > R(\varepsilon))$, será menor que $1 + \varepsilon$. Por ello, $|f(z) < e^{(1+\varepsilon)\sigma_n r^n}$ si $r > R(\varepsilon)$.

Por otra parte, haciendo $\vartheta = -\frac{\alpha_n}{n}$ obtenemos $\cos(\alpha_n + n\vartheta) = 1$ y, por consiguiente, para los mismos valores de r la magnitud que figura entre corchetes será mayor que $1 - \varepsilon$. Por lo tanto,

$$|f(re^{-i\frac{\alpha_n}{n}})| > e^{(1-\varepsilon)\sigma_n r^n}, \quad \text{si} \quad r > R(\varepsilon).$$

Confrontando estas desigualdades sacamos la conclusión que

$$e^{(1-\varepsilon)\sigma_n r^n} < M(r) < e^{(1+\varepsilon)\sigma_n r^n},$$

si $r > R(\varepsilon)$, por lo cual $f(z)$ es una función de orden entero n y tipo σ_n.

Dividamos el plano en $2n$ ángulos iguales: $g_0, g_1, \ldots, g_{2n-1}$ con el vértice común en el origen de coordenadas, tomando por g_j el ángulo $-\frac{\alpha_n}{n} + (2j-1)\frac{\pi}{2n} < \vartheta < -\frac{\alpha_n}{n} + (2j+1)\frac{\pi}{2n} (j = 0, 1, \ldots, 2n-1)$, y tomemos en el interior de g_j el ángulo γ_j de menor magnitud:

$$-\frac{\alpha_n}{n} + (2j-1)\frac{\pi}{2n} + \frac{\varepsilon}{n} < \vartheta < -\frac{\alpha_n}{n} + (2j+1)\frac{\pi}{2n} - \frac{\varepsilon}{n},$$

donde $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Entonces, para los puntos del ángulo γ_j, tendremos:

$$j\pi - \frac{\pi}{2} + \varepsilon < \alpha_n + n\vartheta < j\pi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon$$

y, por consiguiente,

$$|\cos(\alpha_n + n\vartheta)| > \operatorname{sen} \varepsilon;$$

además, si j es par resulta $\cos(\alpha_n + n\vartheta) > \operatorname{sen} \varepsilon$, y si j es impar, se tiene:

$$\cos(\alpha_n + n\vartheta) < -\operatorname{sen} \varepsilon.$$

Expresemos $|f(z)|$ para $z \in g_j$ en la forma

$$|f(z)| = \exp\left\{\sigma_n \cos(\alpha_n + n\vartheta) r^n \left[1 + \sum_0^{n-1} \frac{\sigma_k \cos(\alpha_k + k\vartheta)}{\sigma_n \cos(\alpha_n + n\vartheta) r^{n-k}}\right]\right\}.$$

La magnitud $\left|\sum_0^{n-1} \frac{\sigma_k \cos(\alpha_k + k\vartheta)}{\sigma_n \cos(\alpha_n + n\vartheta) r^{n-k}}\right| < \frac{1}{\operatorname{sen} \varepsilon} \sum_0^{n-1} \frac{\sigma_k}{\sigma_n r^{n-k}}$ puede hacerse menor que ε para $r > R(\varepsilon)$. Por consiguiente, para j par y $r > R(\varepsilon)$ tendremos:

$$|f(z)| > \exp[\sigma_n \operatorname{sen} \varepsilon r^n (1 - \varepsilon)],$$

es decir, $f(z)$ tiende a ∞ dentro de los ángulos γ_j de índice par. Para j impar y $r > R(\varepsilon)$ se tiene:

$$|f(z)| < \exp[-\sigma_n \operatorname{sen} \varepsilon r^n (1 - \varepsilon)],$$

o sea, $f(z)$ tiende a 0 dentro de los ángulos γ_j de índice impar.

Vemos, pues, que para la función $e^{P(z)}$ existen $2n$ ángulos iguales g_j de magnitud $\frac{\pi}{n}$ cada uno de ellos ($j = 0, 1, \ldots, 2n - 1$) con el vértice común en el origen de coordenadas, tales que en los ángulos que están situados junto con sus lados en el interior de g_j la función tiende a ∞ si j es par, y a 0 si j es impar.

El teorema de Phragmén-Lindelöf (ap. 3.3, cap. VI) proporciona datos capitales sobre el comportamiento de una función entera de orden finito en el interior de un ángulo si se conoce su comportamiento en los lados del mismo. En lo que se refiere a las funciones enteras, del teorema se deduce la proposición siguiente:

Si $f(z)$ es una función entera de orden no superior a ρ, la cual está acotada en valor absoluto en los lados de un ángulo g de magnitud $\pi\alpha$ con el vértice en el origen de coordenadas:

$$|f(z)| \leq C \text{ en los lados del ángulo } g,$$

y si $\alpha < 1/\rho$, entonces el módulo $|f(z)|$ está acotado también en el interior del ángulo por la misma constante C.

Del teorema 1 del ap. 3.3 del cap. VI se deduce que para una función de orden ρ y tipo minimal la proposición formulada también

es válida cuando $\alpha = \frac{1}{\rho}$. En efecto, la condición

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln M(r)}{r^{\frac{1}{\alpha}}} = 0,$$

que expresa que el orden de $f(z)$ es menor que $\frac{1}{\alpha}$ o es igual a $\frac{1}{\alpha}$, pero entonces el tipo de $f(z)$ es igual a cero (véase la fórmula (1.1:12)), es un caso particular de la condición 2) del teorema 1 del ap. 3.3 del cap. VI.

Del teorema de Phragmén-Lindelöf se deduce que si desde el origen de coordenadas se ha trazado un sistema de rayos que divide al plano en ángulos no mayores que $\frac{\pi}{\rho}$ cada uno $\left(\rho \geqslant \frac{1}{2}\right)$, entonces al menos en uno de estos rayos la función trascendente entera $f(z)$ de orden inferior a ρ no tiene que estar acotada en valor absoluto. Suponiendo lo contrario hallaríamos, según lo demostrado, que la función está acotada en cada uno de los ángulos comprendidos entre rayos contiguos y, por consiguiente, está acotada en valor absoluto en todo el plano, lo cual es imposible, si $f(z) \not\equiv$ const.

Como ejemplo, consideremos la función $e^{P(z)}$, donde $P(z)$ es un polinomio de grado n. Aquí $\rho = n$, y si trazamos un sistema de rayos que divida al plano en ángulos de magnitud menor que $\frac{\pi}{n}$, entonces al menos uno de los rayos de este sistema caerá dentro de cada uno de los ángulos g_j de índice par, en los cuales $e^{P(z)}$ tiende al infinito cuando $z \to \infty$.

Para una función $f(z) \not\equiv$ const de orden $\rho < \frac{1}{2}$ o de orden $\rho = \frac{1}{2}$ y de tipo minimal sacamos la conclusión, según lo anterior, que ella tiene que ser no acotada en cada rayo que parta del origen de coordenadas. Para las funciones de orden $\frac{1}{2}$ y tipo $\sigma > 0$ ya no vale esta afirmación, como muestra el ejemplo de la función $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\sigma\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$ la cual tiende a cero cuando z tiende al infinito sobre la parte positiva del eje real.

En general, el teorema de Phragmén-Lindelöf deja de ser cierto para los ángulos de magnitud $\frac{\pi}{\rho}$ si se consideran funciones de orden ρ (pero no de tipo minimal). Así, en el caso $f(z) = \operatorname{sen} z$, donde $\rho = 1$, la función está acotada en todo el eje real, el cual se puede considerar como los lados de cada uno de los dos ángulos de magnitud $\frac{\pi}{\rho} = \pi$: de los semiplanos superior e inferior. No obstante, el módulo $|\operatorname{sen} z|$

no está acotado en el semiplano superior ni tampoco en el semiplano inferior.

1.4. Para estudiar más detalladamente el comportamiento de las funciones enteras se introduce la característica de su crecimiento sobre cada uno de los rayos que parten del origen de coordenadas. Sea $f(z)$ una función entera de orden finito $\rho > 0$ y de tipo finito σ. Entonces, para cada rayo que forme un ángulo θ con la parte positiva del eje real, se considera la magnitud

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\rho}}. \tag{1.4:1}$$

Esta función es uniforme y periódica, de período 2π. Se llama **indicatriz de crecimiento de la función** $f(z)$.

Debido a la relación

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho}} = \sigma < \infty$$

se tiene:

$$h(\theta) \leqslant \sigma,$$

es decir, $h(\theta)$ está acotada superiormente.

Teorema. *Si θ_1 y θ_2 satisfacen a las condiciones*

$$0 < \theta_2 - \theta_1 < \min\left(\frac{\pi}{\rho}, 2\pi\right)$$

y a y b son unos números finitos tales que $h(\theta_1) \leqslant a$ y $h(\theta_2) \leqslant b$, entonces en todo el intervalo (θ_1, θ_2) se cumple la desigualdad

$$h(\theta) \leqslant A\cos\theta\rho + B\operatorname{sen}\theta\rho, \tag{1.4:2}$$

donde A y B se determinan por el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} A\cos\theta_1\rho + B\operatorname{sen}\theta_1\rho &= a, \\ A\cos\theta_2\rho + B\operatorname{sen}\theta_2\rho &= b. \end{aligned}\right\} \tag{1.4:3}$$

Además, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene:

$$\ln|f(re^{i\theta})| < (A\cos\theta\rho + B\operatorname{sen}\theta\rho + \varepsilon)\, r^{\rho} \tag{1.4:4}$$

para

$$\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2 \quad \text{y} \quad r > R(\varepsilon).$$

Demostración. Sea η un número positivo arbitrario. Definamos $\alpha = \alpha(\eta)$ y $\beta = \beta(\eta)$ mediante las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \alpha\cos\theta_1\rho + \beta\operatorname{sen}\theta_1\rho &= a + \eta, \\ \alpha\cos\theta_2\rho - \beta\operatorname{sen}\theta_2\rho &= b + \eta. \end{aligned}\right\} \tag{1.4:3'}$$

Esto es posible, ya que el determinante del sistema $\operatorname{sen}(\theta_2-\theta_1)\rho \neq 0$. Evidentemente,

$$\lim_{\eta\to 0} \alpha(\eta) = A \quad \text{y} \quad \lim_{\eta\to 0} \beta(\eta) = B.$$

Introduzcamos la función auxiliar

$$F_\eta(z) = f(z) \exp[-(\alpha - i\beta) z^\rho].$$

Esta es uniforme (si se hace $z^\rho = (re^{i\theta})^\rho = r^\rho(\cos\theta\rho + i \operatorname{sen}\theta\rho)$ y analítica en el recinto angular g: $0 < r < \infty$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$, y satisface en este recinto, para $r > R_1(\eta)$, a la desigualdad

$$|F_\eta(re^{i\theta})| = |f(z)| \exp[-(\alpha\cos\theta\rho + \beta \operatorname{sen}\theta\rho) r^\rho] <$$
$$< \exp[(\sigma+1) r^\rho - (\alpha\cos\theta\rho + \beta\operatorname{sen}\theta\rho) r^\rho] < \exp(Kr^\rho), \quad (1.4{:}5)$$

donde $K = K(\eta)$. Además,

$$|F_\eta(re^{i\theta_1})| < \exp[(a+\eta) r^\rho - (\alpha\cos\theta_1\rho + \beta\operatorname{sen}\theta_1\rho) r^\rho] = 1,$$
$$|F_\eta(re^{i\theta_2})| < \exp[(b+\eta) r^\rho - (\alpha\cos\theta_2\rho + \beta\operatorname{sen}\theta_2\rho) r^\rho] = 1$$

para $r > R_2(\eta)$, es decir, el módulo $|F_\eta(z)|$ está acotado en los lados del ángulo g:

$$|F_\eta(re^{i\theta_1})| < C, \quad |F_\eta(re^{i\theta_2})| < C \qquad (0 < r < \infty), \quad (1.4{:}6)$$

donde $C = C(\eta)$.

De (1.4:5) y (1.4:6) se deduce que a la función $F_\eta(z)$ en el recinto g, el cual representa un ángulo de magnitud $\theta_2 - \theta_1 < \frac{\pi}{\rho}$, se le puede aplicar el teorema de Phragmén-Lindelöf. Obtenemos:

$$|F_\eta(z)| \leqslant C_\eta, \quad z \in \overline{g},$$

de donde

$$\ln|f(re^{i\theta})| \leqslant \ln C_\eta + (\alpha\cos\theta\rho + \beta\operatorname{sen}\theta\rho) r^\rho, \qquad re^{i\theta} \in \overline{g}. \quad (1.4{:}7)$$

Para un $\varepsilon > 0$ dado, fijemos un número $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tan pequeño que se cumplan las desigualdades

$$|\alpha(\eta) - A| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |\beta(\eta) - B| < \frac{\varepsilon}{3},$$

y hallemos después un valor $R(\varepsilon)$ tal, que para $r > R(\varepsilon)$ se cumpla la desigualdad

$$\left| \frac{\ln C_\eta}{r^\rho} \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces para $\theta_1 < \theta < \theta_2$ y $r > R(\varepsilon)$ tendremos según la desigualdad (1.4:7):

$$\ln|f(re^{i\theta})| < (A\cos\theta\rho + B\operatorname{sen}\theta\rho + \varepsilon) r^\rho,$$

o sea, la relación (1.4:4). De esta se deduce luego que

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho} \leqslant A\cos\theta\rho + B\,\mathrm{sen}\,\theta\rho + \varepsilon$$

y como ε es arbitrariamente pequeño, resulta:

$$h(\theta) \leqslant A\cos\theta\rho + B\,\mathrm{sen}\,\theta\rho \qquad (\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2).$$

El teorema queda demostrado.

Determinando A y B de las ecuaciones (1.4:3) y sustituyendo los valores hallados en la desigualdad (1.4:2), obtenemos:

$$h(\theta) \leqslant a\frac{\mathrm{sen}\,[(\theta_2-\theta)\rho]}{\mathrm{sen}\,[(\theta_2-\theta_1)\rho]} + b\frac{\mathrm{sen}\,[(\theta-\theta_1)\rho]}{\mathrm{sen}\,[(\theta_2-\theta_1)\rho]} \qquad (\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2). \qquad (1.4:8)$$

En particular, en la bisectriz del ángulo g

$$\theta_2-\theta = \theta-\theta_1 = \frac{\theta_2-\theta_1}{2}$$

se tiene:

$$h\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\rho\right)}\frac{a+b}{2}. \qquad (1.4:8')$$

Demostremos que *la indicatriz* $h(\theta)$ *tiene un valor finito para cualquier* θ:

$$h(\theta) > -\infty \qquad (1.4:9)$$

Supongamos lo contrario y sea $h(\theta_0) = -\infty$. Fijemos algún número natural $m > \rho$ y apliquemos la desigualdad (1.4:8') a la bisectriz del ángulo: $\theta_0 < \theta < \theta_0 + \frac{\pi}{m}$. Resulta:

$$h\left(\theta_0+\frac{\pi}{2m}\right) \leqslant \frac{1}{\cos\frac{\pi\rho}{2m}}\cdot\frac{a+b}{2},$$

donde a y b son unos números finitos cualesquiera que satisfacen a las condiciones:

$$a \geqslant h(\theta_0) = -\infty \quad \text{y} \quad b \geqslant h(\theta_1).$$

Fijando b, pasemos al límite en la desigualdad hallada para $a \to -\infty$. Obtenemos: $h\left(\theta_0+\frac{\pi}{2m}\right) = -\infty$. Reiterando este mismo razonamiento hallaremos que, en general,

$$h\left(\theta_0+k\frac{\pi}{2m}\right) = -\infty, \qquad k = 0, 1, \ldots, 4m-1.$$

En virtud de la definición de la indicatriz $h(\theta)$, la función $f(z)$ tiene que estar acotada en cada rayo $\theta = \theta_0 + k\frac{\pi}{2m}$ $(k = 0, 1, \ldots, 4m - 1)$, de donde se deduce que está completamente acotada, es decir, $f(z) \equiv$ const (dos rayos contiguos forman un ángulo $\frac{\pi}{2m} < \left. < \frac{\pi}{\rho} \right)$. Esto contradice a que la función $f(z)$ es entera de orden $\rho > 0$. Así, pues, la relación (1.4:9) queda demostrada. De ésta se deduce que en el teorema principal de este apartado siempre se puede hacer:

$$a = h(\theta_1), \qquad b = h(\theta_2).$$

Entonces la desigualdad (1.4:8) adquiere la forma siguiente:

$$h(\theta) \leqslant \frac{\operatorname{sen}[(\theta_2 - \theta)\rho]}{\operatorname{sen}[(\theta_2 - \theta_1)\rho]} h(\theta_1) + \frac{\operatorname{sen}[(\theta - \theta_1)\rho]}{\operatorname{sen}[(\theta_2 - \theta_1)\rho]} h(\theta_2). \quad (1.4:10)$$

De ésta se deduce el corolario importante:

La indicatriz de crecimiento de una función de orden finito es una función continua en todos los puntos.

En efecto, fijando arbitrariamente θ_0, hagamos en la relación (1.4:10) $\theta_1 = \theta_0$ y pasemos a límites para $\theta \to \theta_0$. Obtenemos.

$$\overline{\lim_{\theta\to\theta_0,\ \theta>\theta_0}} h(\theta) \leqslant h(\theta_0).$$

Haciendo en (1.4:10) $\theta_2 = \theta_0$ y pasando a límites para $\theta \to \theta_0$, hallamos:

$$\overline{\lim_{\theta\to\theta_0,\ \theta<\theta_0}} h(\theta) \leqslant h(\theta_0).$$

Así, pues,

$$\overline{\lim_{\theta\to\theta_0}} h(\theta) \leqslant h(\theta_0). \quad (1.4:11)$$

Hagamos ahora en (1.4:10) $\theta = \theta_0$ y pasemos a límites una vez para $\theta_1 \to \theta_0$ y otra vez para $\theta_2 \to \theta_0$. Obtendremos:

$$h(\theta_0) \leqslant \underline{\lim_{\theta_1\to\theta_0,\ \theta_1<\theta_0}} h(\theta_1); \quad h(\theta_0) \leqslant \underline{\lim_{\theta_2\to\theta_0,\ \theta_2>\theta_0}} h(\theta_2),$$

o sea,

$$\underline{\lim_{\theta\to\theta_0}} h(\theta) \geqslant h(\theta_0). \quad (1.4:12)$$

Confrontando (1.4:11) y (1.4:12), hallamos:

$$\overline{\lim_{\theta\to\theta_0}} h(\theta) = \underline{\lim_{\theta\to\theta_0}} h(\theta) = h(\theta_0),$$

como se quería demostrar.

Demostremos ahora que *si* $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, *entonces no pueden existir dos valores* θ' *y* θ'' *tales que*

$$\theta'' - \theta' = \frac{\pi}{\rho},$$

y

$$h(\theta') < 0 \quad \text{y} \quad h(\theta'') < 0.$$

Supongamos que existen tales valores. Entonces, haciendo en (1.4:8'):

$$\theta_1 = \theta' + \varepsilon, \quad \theta_2 = \theta'' - \varepsilon, \quad a = h(\theta' + \varepsilon), \quad b = h(\theta'' - \varepsilon) \left(0 < \varepsilon < \frac{\theta'' - \theta'}{2}\right)$$

tendremos:

$$h\left(\frac{\theta' + \theta''}{2}\right) \leqslant \frac{h(\theta' + \varepsilon) + h(\theta'' - \varepsilon)}{2\cos\left[\left(\frac{\theta'' - \theta'}{2} - \varepsilon\right)\rho\right]} = \frac{h(\theta' + \varepsilon) + h(\theta'' - \varepsilon)}{2\operatorname{sen}(\varepsilon\rho)}.$$

Cuando $\varepsilon \to 0$ el segundo miembro, en virtud de las hipótesis hechas y de la continuidad demostrada de $h(\theta)$, tiene que tender a $-\infty$, lo cual es imposible. De aquí se deduce lo que se afirmaba. En particular, para $\rho = \frac{1}{2}$ no existe ningún valor de θ para el cual sea $h(\theta) < 0$.

Obsérvese que para $0 < \rho < \frac{1}{2}$ tampoco puede existir ningún valor de θ para el cual $h(\theta) < 0$. En efecto, a lo largo del rayo correspondiente la función $f(z)$ tiene que estar acotada, lo cual para las funciones de orden menor que $\frac{1}{2}$, no idénticamente constantes, es imposible (véase el apartado anterior). Así, pues, para una función de orden no superior a $\frac{1}{2}$ la indicatriz de crecimiento es no negativa: $h(\theta) \geqslant 0$.

Supongamos ahora que $\rho > \frac{1}{2}$ y que θ_0 es el valor de θ para el cual $h(\theta_0) < 0$. Como para algunos valores de θ tiene que ser: $h(\theta) \geqslant 0$, existe un intervalo (θ', θ'') que contiene a θ_0 en el cual $h(\theta) < 0$ y en cuyos extremos $h(\theta') = h(\theta'') = 0$. Está claro que $0 < \theta' - \theta'' \leqslant \frac{\pi}{\rho}$; en efecto, suponiendo que $\theta' - \theta'' > \frac{\pi}{\rho}$ se podrían señalar tales valores θ_1 y θ_2 del intervalo (θ_1, θ_2) para los cuales $\theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{\rho}$. Pero $h(\theta_1) < 0$ y $h(\theta_2) < 0$, y por lo tanto, resulta una contradicción con la propiedad establecida anteriormente de la indicatriz de crecimiento.

Supongamos, para precisar, que θ' es el extremo del intervalo (θ', θ'') más próximo a θ_0; entonces $0 < \theta_0 - \theta' = \delta \leqslant \frac{\pi}{2\rho}$. Apliquemos la fórmula (1.4:10), sustituyendo en ella θ_1 por $\theta' - \delta + \varepsilon$ y θ_2 por $\theta' + \delta - \varepsilon = \theta_0 - \varepsilon$, siendo $0 < \varepsilon < \delta$. (Esta fórmula es aplicable al caso dado, ya que

$$(\theta' + \delta - \varepsilon) - (\theta' - \delta + \varepsilon) = 2\delta - 2\varepsilon < \frac{\pi}{\rho}.)$$

Obtenemos:

$$h(\theta') = 0 \leqslant \frac{1}{\cos|(\delta - \varepsilon)\rho|} \frac{h(\theta' - \delta + \varepsilon) + h(\theta' + \delta - \varepsilon)}{2},$$

de donde

$$h(\theta' - \delta + \varepsilon) \geqslant -h(\theta' + \delta - \varepsilon).$$

Como esta relación es válida para cualquier $\varepsilon > 0$ y $h(\theta)$ es continua, resulta que también es válida en el límite, cuando $\varepsilon \to 0$. Por lo tanto

$$h(\theta' - \delta) \geqslant -h(\theta' + \delta) = -h(\theta_0).$$

Pero $h(\theta' - \delta) \leqslant \sigma$, donde σ es el tipo de la función $f(z)$; por consiguiente,

$$h(\theta_0) \geqslant -\sigma.$$

Así, pues, para $\rho > \frac{1}{2}$ se tiene:

$$\sigma \geqslant h(\theta) \geqslant -\sigma. \qquad (1.4:13)$$

Como ya se vio, para $\rho \leqslant \frac{1}{2}$ esta desigualdad se sustituye por otra más fuerte:

$$\sigma \geqslant h(\theta) \geqslant 0. \qquad (1.4:13')$$

Obsérvese que para las funciones de tipo minimal, de una y otra desigualdad resulta

$$h(\theta) \equiv 0.$$

Demostremos, finalmente, que en todos los casos

$$\max h(\theta) = \sigma. \qquad (1.4:14)$$

En efecto, si se supone que $\max h(\theta) = \sigma_1 < \sigma$, entonces en el teorema principal de este apartado se puede hacer $a = b = \sigma_1$, después de lo cual la desigualdad (1.4:4), en la que sustituimos A y B por sus valores de las ecuaciones (1.4:3), toma la forma

$$\ln|f(re^{i\theta})| < \left\{ \frac{\cos\left[\left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2} - \theta\right)\rho\right]}{\cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\rho\right)} \sigma_1 + \varepsilon \right\} r^{\rho}$$

para $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ y $r > R(\varepsilon)$. Hagamos $\frac{\theta_2+\theta_1}{2} = \theta_0$ y $\frac{\theta_2-\theta_1}{2} = \delta$; entonces en el segmento $[\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$ tendremos:

$$\ln|f(re^{i\theta})| < \left[\frac{\cos(\theta_0-\theta)\rho}{\cos\delta\rho}\sigma_1 + \varepsilon\right] r^\rho$$

para $r > R(\varepsilon)$.

La expresión comprendida entre corchetes tiende al límite σ_1 para $\delta \to 0$ y $\varepsilon \to 0$ (uniformemente respecto de θ_0 y θ) y, por consiguiente, para valores suficientemente pequeños de $\delta = \delta_0$ y $\varepsilon = \varepsilon_0$ puede hacerse menor que σ_2 siendo $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma$. En resumen,

$$\ln|f(re^{i\theta})| < \sigma_2 r^\rho \quad \text{para} \quad \theta_0 - \delta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \delta_0 \quad \text{y} \quad r > R_0 = R_0(\theta_0). \tag{1.4:15}$$

Evidentemente, δ_0 se puede tomar igual a $\frac{\pi}{2m}$, donde m es un número natural suficientemente grande. Entonces en todos los ángulos

$$\frac{k\pi}{m} \leqslant \theta \leqslant \frac{(k+1)\pi}{m} \qquad (k = 0, \ldots, m-1)$$

se cumple la desigualdad (1.4:15) para valores de r suficientemente grandes, de donde se deduce que

$$\ln|f(re^{i\theta})| < \sigma_2 r^\rho \quad \text{para} \quad r > R$$

y

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^\rho} \leqslant \sigma_2,$$

lo cual es imposible.

La gráfica de la indicatriz de crecimiento de una función entera en coordenadas polares r y θ:

$$r = h(\theta)$$

se llama *indicatriz de esta función*.

El lector puede convencerse fácilmente de que las indicatrices de crecimiento $h(\theta)$ para las funciones

1) e^{az}, donde $a = \alpha e^{i\varphi}$, 2) $\operatorname{sen} z$, 3) $\cos z$, 4) e^{z^n} (n es natural) son:

1) $\alpha\cos(\theta+\varphi)$, 2) y 3) $|\operatorname{sen}\theta|$, 4) $\cos n\theta$.

Las curvas correspondientes [1) es una circunferencia doblemente recorrida, construida sobre el segmento, que une los puntos O y $\bar{a}$, como diámetro; 2) y 3) son dos circunferencias tangentes en el origen de coordenadas, con centros en el eje imaginario y diámetros iguales a 1; 4) es una rosa de $2n$ hojas] están representadas en la fig. 36.

1.5. Como un ejemplo de las leyes que se pueden demostrar para las funciones enteras partiendo del estudio de su crecimiento, expon-

gamos unas cuantas proposiciones elementales que, para el caso de las funciones de orden finito, establecen el llamado teorema pequeño de Picard.

T e o r e m a 1. *Si una función entera $f(z)$ no toma cierto valor A ($\neq \infty$) en ningún punto del plano, entonces $f(z)$ tiene la forma*

$$f(z) = A + e^{g(z)}, \tag{1.5:1}$$

donde $g(z)$ es una función entera.

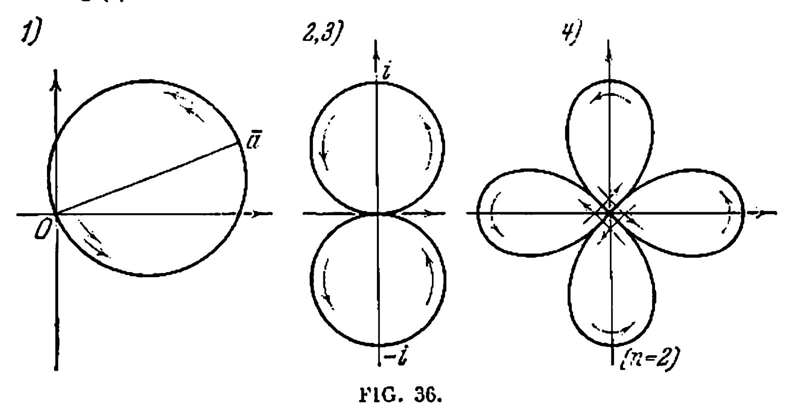


FIG. 36.

D e m o s t r a c i ó n. Como $f(z) - A$ no se anula, la función $\frac{f'(z)}{f(z) - A} = h(z)$ es analítica en todo el plano, es decir, es una función entera. Pero

$$\frac{f'(z)}{f(z) - A} = \frac{d}{dz} \operatorname{Ln}[f(z) - A],$$

por consiguiente,

$$[\operatorname{Ln}[f(z) - A]]_0^z = \int_0^z h(z)\,dz$$

de donde

$$f(z) - A = \exp\left\{\int_0^z h(z)\,dz + \ln[f(0) - A]\right\} = e^{g(z)}$$

siendo también

$$g(z) = \int_0^z h(z)\,dz + \ln[f(0) - A]$$

una función entera.

Demostremos ahora unos lemas que de por sí mismo tienen un valor capital.

L e m a 1. *Si la parte real* $u(r, \vartheta)$ *de una función* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, *que es analítica en un entorno* $|z| < R < \infty$ *del origen de coordenadas, satisface para todos los valores* ρ, $0 < \rho < R$, *a una desigualdad de la forma*

$$u(\rho, \vartheta) \leqslant U \qquad (1.5:2)$$

(aquí no se toma $u(\rho, \vartheta)$ en valor absoluto, de modo que, en particular, U puede ser un número negativo), *entonces los coeficientes de la serie de potencias satisfacen a las desigualdades*:

$$|a_m| \leqslant \frac{2(U-\alpha_0)}{R^m}, \qquad m = 1, 2, \ldots, \qquad (1.5:3)$$

donde

$$\alpha_0 = \operatorname{Re}(a_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r, \vartheta)\, d\vartheta.$$

D e m o s t r a c i ó n. Sea $f(z) = u(r, \vartheta) + iv(r, \vartheta)$; entonces para la función $U - f(z) = U - u(r, \vartheta) - iv(r, \vartheta)$ el desarrollo de Taylor tiene la forma $U - a_0 - \sum_1^\infty a_m z^m$. Por consiguiente, los números $-a_m = \alpha_m + i\beta_m$ para $m \geqslant 1$ pueden expresarse en la forma siguiente (véase (1.2:6) y (1.2:7) cap. sexto, en las cuales se debe sustituir $u(\rho, \alpha)$ por $U - u(\rho, \alpha)$):

$$-a_m = \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} [U - u(\rho, \alpha)]\, e^{-im\alpha}\, d\alpha,$$

de donde

$$|a_m| \leqslant \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} |U - u(\rho, \alpha)|\, d\alpha = \frac{2U}{\rho^m} - \frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha)\, d\alpha.$$

Pero

$$\frac{1}{\pi\rho^m}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha)\, d\alpha = \frac{2}{\rho^m}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho, \alpha)\, d\alpha = \frac{2u(0)}{\rho^m} = \frac{2\alpha_0}{\rho^m};$$

de donde resulta:

$$|a_m| \leqslant \frac{2(U-\alpha_0)}{\rho^m} \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

para cualquier $\rho < R$. Pasando aquí a límites para $\rho \to R$, obtenemos las desigualdades (1.5:3).

Lema 2. *Si la parte real $u(r, \vartheta)$ de una función entera $f(z)$ satisface para todos los valores de r, comenzando desde cierto r_0, a una desigualdad de la forma*

$$u(r, \vartheta) \leqslant r^{\mu} \qquad (r > r_0), \tag{1.5:4}$$

donde $\mu > 0$, entonces $f(z)$ es un polinomio de grado no superior a $[\mu]$.

Demostración. En virtud del principio del módulo máximo para las funciones armónicas, para todos $\rho < r$ se tiene: $u(\rho, \vartheta) \leqslant r^{\mu}$; por ello, según el lema 1

$$|a_m| \leqslant 2\frac{r^{\mu}-\alpha_0}{r^m}.$$

Si $m \geqslant [\mu]+1$ y r crece indefinidamente, resulta

$$a_{[\mu]+1} = a_{[\mu]+2} = \ldots = 0$$

y, por consiguiente,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{[\mu]} z^{[\mu]},$$

como se quería demostrar.

Teorema 2. *Si una función entera $f(z)$, que no toma cierto valor $A\ (\neq \infty)$ en ningún punto del plano, es de orden finito ρ, entonces ρ necesariamente es un número entero y $f(z)$ posee la forma*

$$f(z) = A + e^{P(z)},$$

donde $P(z)$ es un polinomio de grado ρ.

Demostración. Debido al teorema 1 $f(z)$ puede expresarse en la forma

$$f(z) = A + e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera. Pero, para cualquier $\varepsilon > 0$ y $r > R(\varepsilon)$, se cumple la desigualdad

$$|f(z)| < e^{r^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}},$$

de donde

$$|e^{g(z)}| < |A| + e^{r^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

Eligiendo $R'(\varepsilon) \geqslant R(\varepsilon)$ de modo que para $r > R'(\varepsilon)$ sea

$$|A| + e^{r^{\rho+\frac{\varepsilon}{2}}} < e^{r^{\rho+\varepsilon}},$$

y observando que $|e^{g(z)}| = e^{\operatorname{Re}[g(z)]}$, obtenemos:

$$e^{\operatorname{Re}[g(z)]} < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \quad \text{para} \quad r > R'(\varepsilon).$$

Por consiguiente, para estos mismos valores de r

$$\operatorname{Re}[g(z)] < r^{\rho+\varepsilon},$$

de donde, según el lema 2, $g(z)$ es un polinomio $P(z)$ de grado no superior a $[\rho+\varepsilon]$.

Por otra parte, está claro que si $f(z)$ es una función de orden ρ, entonces $f(z) - A = e^{P(z)}$ también es una función del mismo orden, y como el orden de la función $e^{P(z)}$ es igual al grado n del polinomio $P(z)$ (cosa que se vio al comienzo del ap. 1.3), resulta que $\rho = n$ es un número entero y $P(z)$ es un polinomio de grado ρ. Con esto se termina la demostración.

Teorema 3. *Si una función entera $f(z)$ toma un valor A ($\neq \infty$) en un número finito de puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m$ con los órdenes de multiplicidad $k_1, k_2, \ldots, k_m$, entonces $f(z)$ es de la forma*

$$f(z) = A + (z-z_1)^{k_1} \ldots (z-z_m)^{k_m} e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera.

En efecto, en virtud de las condiciones del teorema la función $\frac{f(z)-A}{(z-z_1)^{k_1}\ldots(z-z_m)^{k_m}}$ es entera y no se anula en ningún punto del plano. De aquí que, según el teorema 1, ésta es de la forma $e^{g(z)}$, donde $g(z)$ es una función entera.

Por lo tanto,

$$\frac{f(z)-A}{(z-z_1)^{k_1}\ldots(z-z_m)^{k_m}} = e^{g(z)},$$

de donde

$$f(z) = A + (z-z_1)^{k_1} \ldots (z-z_m)^{k_m} e^{g(z)}.$$

Teorema 4. *Si respecto de una función entera $f(z)$ que satisface a la condición del teorema precedente, se sabe que es de orden finito ρ, entonces ρ tiene que ser un número entero y la función $f(z)$ es de la forma*

$$f(z) = A + (z-z_1)^{k_1} \ldots (z-z_m)^{k_m} e^{P(z)},$$

donde $P(z)$ es un polinomio de grado ρ.

En efecto, según el teorema 3, $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = A + (z-z_1)^{k_1} \ldots (z-z_m)^{k_m} e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera. Como

$$|e^{g(z)}| = e^{\operatorname{Re}[g(z)]} < \frac{|f(z)|+|A|}{|z-z_1|^{k_1}\ldots|z-z_m|^{k_m}} < |f(z)|+|A|,$$

si $|z-z_1|>1, \ldots, |z-z_m|>1$ y además para todos los valores de r suficientemente grandes: $|f(z)|+|A| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}$, resulta

$$\operatorname{Re}[g(z)] < r^{\rho+\varepsilon},$$

de donde, del lema 2 se deduce que $g(z)$ es un polinomio $P(z)$ de grado no superior a ρ.

Por otra parte, es evidente que si $f(z)$ es una función de orden ρ, entonces

$$\frac{f(z)-A}{(z-z_1)^{k_1}\ldots(z-z_m)^{k_m}}=e^{P(z)}$$

es una función del mismo orden. En efecto, ya se ha observado que

$$|e^{P(z)}|=|e^{g(z)}|<r^{\rho+\varepsilon} \quad \text{para} \quad r>R(\varepsilon),$$

y, por consiguiente, el orden de $e^{P(z)}$ no es superior a ρ. Pero éste no puede ser inferior a ρ, pues en caso contrario tendríamos para algún α positivo que

$$|e^{P(z)}|<e^{r^{\rho-2\alpha}} \quad \text{para} \quad r>R'(\alpha)$$

y, por lo tanto,

$$|f(z)|<|A|+e^{r^{\rho-2\alpha}}(r+|z_1|)^{k_1}\ldots(r+|z_m|)^{k_m}$$

para $r>R'(\varepsilon)$.

Es evidente que la razón de la magnitud que figura en el segundo miembro de la desigualdad a $e^{r^{\rho-\alpha}}$ tiende a cero cuando $r\to\infty$. Por ello, para $r>R''(\alpha)>R'(\alpha)$ tendremos:

$$|f(z)|<e^{r^{\rho-\alpha}},$$

lo cual es incompatible con la hipótesis del teorema según la cual el orden de la función $f(z)$ es ρ.

Así, pues, el orden de la función $e^{P(z)}$ también es igual a ρ y, por consiguiente, ρ es un número entero que coincide con el grado del polinomio $P(z)$. El teorema 4 queda demostrado.

Teorema 5. *Para una función trascendente entera $f(z)$ de orden finito ρ, el conjunto de sus A-puntos es infinito para cualquier A. Es excepcional solamente el caso en que ρ es un número entero positivo y la función $f(z)$ es de la forma*

$$f(z)=A_0+p(z)\,e^{P(z)}, \tag{1.5:5}$$

donde $p(z)$ y $P(z)$ son polinomios. En este caso, para $A=A_0$ y sólo para este valor único, resulta un conjunto finito de A-puntos (que coinciden con los ceros del polinomio $p(z)$).

En otras palabras: *para una función entera de orden finito no puede existir más de un valor excepcional $A=A_0$ para el cual el conjunto de A-puntos de la función sea finito.*

Obsérvese que la condición de que el orden ρ sea finito en este teorema está dictada solamente por el método elemental elegido de demostración. En la realidad, el teorema 5, conocido por el nombre

de teorema pequeño de Picard, es válido para las funciones enteras de cualquier orden, finito o infinito.

Empezando la demostración, señalemos que si la función $f(z)$ tiene para cierto $A = A_0$ ($\neq \infty$) solamente un conjunto finito de A-puntos: $z_1, \ldots, z_m$, con los órdenes de multiplicidad $k_1, \ldots, k_m$, entonces según el teorema 4, ρ tiene que ser un número entero y $f(z)$ es de la forma

$$f(z) = A_0 + (z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_m)^{k_m} e^{P(z)}, \tag{1.5:6}$$

donde el grado del polinomio $P(z)$ es igual a $\rho > 0$. Por lo tanto, si ρ no es un número entero positivo, el conjunto de A-puntos de la función entera es infinito para cualquier A ($\neq \infty$).

No queda más que demostrar que cuando ρ es un número entero positivo y $f(z)$ tiene la forma especial (1.5:6), no existe un número B_0 distinto de A_0 ($B_0 \neq \infty$), para el cual el conjunto de A-puntos sea también finito.

Demostrando el teorema por reducción a lo absurdo, supongamos que el conjunto de A-puntos de la función $f(z)$ es también finito para cierto $B_0 \neq A_0$. Entonces, según el teorema 4, $f(z)$ tiene que ser de la forma

$$f(z) = B_0 + (z - \zeta_1)^{l_1} \ldots (z - \zeta_n)^{l_n} e^{Q(z)}, \tag{1.5:7}$$

donde $Q(z)$ también es un polinomio de grado ρ. De (1.5:6) y (1.5:7) resulta la identidad

$$p(z) e^{P(z)} - q(z) e^{Q(z)} = C, \tag{1.5:8}$$

donde

$$p(z) = (z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_m)^{k_m}, \quad q(z) = (z - \zeta_1)^{l_1} \ldots (z - \zeta_n)^{l_n}$$

y

$$C = B_0 - A_0 \neq 0.$$

Al principio del ap. 1.3 se estableció que para la función $e^{P(z)}$ todo el plano se divide en 2ρ ángulos iguales de magnitud $\frac{\pi}{\rho}$ con el vértice común en el punto $z = 0$: $g_0, \ldots, g_{2\rho-1}$, y tales que dentro de los ángulos de índice par la función $e^{P(z)}$ tiende a ∞, y dentro de los ángulos de índice impar tiende a 0. Para la función $e^{Q(z)}$ existen ángulos similares de la misma magnitud $\frac{\pi}{\rho}$ y con el mismo vértice $z = 0$: $f_0, \ldots, f_{2\rho-1}$. Cualquiera que sea la posición relativa de los ángulos g_j y f_j, siempre se puede afirmar que el ángulo g_1, por ejemplo, tiene puntos interiores comunes con alguno de los ángulos f_j de índice par, o sino coincide tatalmente con un ángulo f_j de índice impar.

En el primer caso, es decir, cuando g_1 tiene puntos interiores comunes con cierto ángulo f_{2s}, existe un ángulo γ con el vértice en el origen

de coordenadas, que junto con sus lados está situado en el interior de g_1 y en el interior de f_{2s}. Pero entonces, para cierto ε, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, en los puntos del ángulo γ se verifican las desigualdades siguientes (véase la pág. 264):

$$|e^{P(z)}| < \exp[-\sigma_\rho \operatorname{sen} \varepsilon \cdot r^\rho (1-\varepsilon)]$$

(σ_ρ es el módulo del coeficiente de z^ρ en el polinomio $P(z)$),

$$|e^{Q(z)}| > \exp[\tau_\rho \operatorname{sen} \varepsilon \cdot r^\rho (1-\varepsilon)]$$

(τ_ρ es el módulo del coeficiente de z^ρ en el polinomio $Q(z)$).

Por lo tanto, en los puntos del ángulo γ el módulo del primer miembro de la igualdad (1.5:8) satisface a la desigualdad

$$|p(z)e^{P(z)} - q(z)e^{Q(z)}| > (r - |\zeta_1|)^{l_1} \ldots$$
$$\ldots (r - |\zeta_m|)^{l_m} \exp[\tau_\rho \operatorname{sen} \varepsilon r^\rho (1-\varepsilon)] - (r + |z_1|)^{k_1} \ldots$$
$$\ldots (r + |z_m|)^{k_m} \exp[-\sigma_\rho \operatorname{sen} \varepsilon r^\rho (1-\varepsilon)]$$

y como el minuendo del segundo miembro tiende a ∞ cuando $r \to \infty$ y el sustraendo tiende a cero, todo el primer miembro de la igualdad (1.5:8) tiene que tender a ∞ en los puntos del ángulo γ, lo cual representa una contradicción evidente, pues esta magnitud es constante ($\equiv C$).

No queda más que examinar el caso en que g_1 coincide con algún ángulo f_{2s-1} de índice impar. Ahora, en el ángulo γ con el vértice en el origen de coordenadas, situado junto con sus lados dentro de $g_1 = f_{2s-1}$, debido a las desigualdades establecidas en la pág. 267, tendremos para cierto ε, $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$:

$$|e^{P(z)}| < \exp[-\sigma_\rho \operatorname{sen} \varepsilon r^\rho (1-\varepsilon)], \quad |e^{Q(z)}| < \exp[-\tau_\rho \operatorname{sen} \varepsilon r^\rho (1-\varepsilon)].$$

Por consiguiente, para el módulo del primer miembro de (1.5:8) obtenemos la acotación siguiente:

$$|p(z)e^{P(z)} - q(z)e^{Q(z)}| < (r + |z_1|)^{k_1} \ldots$$
$$\ldots (r + |z_m|)^{k_m} \exp[-\sigma_\rho \operatorname{sen} \varepsilon \cdot r^\rho (1-\varepsilon)] + (r + |\zeta_1|)^{l_1} \ldots$$
$$\ldots (r + |\zeta_n|)^{l_n} \exp[-\tau_\rho \operatorname{sen} \varepsilon \cdot r^\rho (1-\varepsilon)].$$

Aquí el segundo miembro tiende a 0 cuando $r \to \infty$; por lo tanto, el primer miembro tiene que tender a 0 cuando $r \to \infty$, lo cual es imposible, puesto que esta magnitud es constante y diferente de cero.

De la contradicción obtenida se deduce que el teorema 5 es cierto*).

Como ilustración del último teorema, calculemos la cantidad de raíces de la ecuación $\operatorname{sen} z - Az = 0$ para cualquier $A \neq \infty$. Si $A = 0$ resulta la ecuación $\operatorname{sen} z = 0$, la cual posee un conjunto infinito de raíces: $z = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Observamos que para cualquier número complejo $A \neq 0$ el conjunto de raíces de la ecuación considerada coincide con el conjunto de A-puntos de la función entera $g(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$ Bien se ve que ésta es una función entera de orden $\rho = 1$; como el orden es un número entero, no está descartado que para cierto $A = A_0 \neq 0$ el conjunto de A-puntos de la función $g(z)$ y, por consiguiente, el conjunto de raíces de la ecuación $\operatorname{sen} z - Az = 0$ sea finito.

Para aclarar esta cuestión hasta el fin, introduzcamos la función entera

$$h(z) = \frac{\operatorname{sen} \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}} = 1 - \frac{\zeta}{2!} + \frac{\zeta^2}{4!} + \ldots,$$

cuyo orden es igual a $\frac{1}{2}$ (lo cual se comprueba fácilmente, expresando $\operatorname{sen} \sqrt{\zeta}$ mediante la función exponencial, o bien aplicando la fórmula

*) D. A. Raikov me indicó otra demostración sencilla de que una relación de la forma (1.5:8)

$$p(z) \exp P(z) - q(z) \exp Q(z) \equiv C \neq 0$$

es imposible cuando al menos uno de los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$ no es idénticamente constante. Suponiendo cierta esta identidad, derivando hallamos:

$$[p'(z) + p(z) P'(z)] \exp P(z) - [q'(z) + q(z) Q'(z)] \exp Q(z) \equiv 0. \qquad (*)$$

Si se supone que

$$q'(z) + q(z) Q'(z) \equiv 0 \qquad (\text{y } p'(z) + p(z) P'(z) \equiv 0),$$

de aquí sale que $q(z) \equiv \text{const}$ $(p(z) \equiv \text{const})$, pues en caso contrario el polinomio $Q'(z) \equiv -\frac{q'(z)}{q(z)}$ tendría polos en todos los ceros de $q(z)$, lo cual es imposible; por esta razón, $Q(z) \equiv \text{const}$ $(P(z) \equiv \text{const})$. Pero esto contradice a las hipótesis hechas respecto de $P(z)$ y $Q(z)$.

Volviendo a la relación (*) deducimos que

$$\exp[Q(z) - P(z)] = \frac{p'(z) + p(z) P'(z)}{q'(z) + q(z) Q'(z)}$$

y, por consiguiente, la función racional que figura en el segundo miembro no tiene polos ni ceros en el plano finito, es decir, es constante. Por ello $Q(z) - P(z) \equiv \text{const}$, y de la relación (1.5:8) resulta:

$$p(z) - C' q(z) \equiv C \exp[-P(z)],$$

de donde $P(z) \equiv \text{const}$, y de nuevo resulta una contradicción con las hipótesis hechas respecto de $P(z)$ y $Q(z)$.

que expresa el orden ρ de una función entera mediante los coeficientes de la serie de potencias).

Haciendo $z = \sqrt{\zeta}$, escribamos la ecuación $\operatorname{sen} z - Az = 0$ en la forma

$$\frac{\operatorname{sen} \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}} = A.$$

Está claro que a cada raíz $\zeta \neq 0$ de esta ecuación le van a corresponder dos raíces distintas de la primera ecuación. Por lo tanto, el conjunto de raíces de la primera ecuación será infinito si es infinito el conjunto de raíces de la segunda. Pero las raíces de la segunda ecuación son los A-puntos de la función entera $\frac{\operatorname{sen} \sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}$ de orden fraccionario $\rho = \frac{1}{2}$. En virtud del teorema demostrado, el conjunto de tales puntos es infinito.

Definitivamente, obtenemos que la ecuación

$$\operatorname{sen} z - Az = 0$$

posee un conjunto infinito de raíces para cualquier A $(\neq \infty)$.

§ 2. DESARROLLO EN PRODUCTO INFINITO. RELACION ENTRE EL CRECIMIENTO DE UNA FUNCION ENTERA Y SUS CEROS

2.1. Una función trascendente entera $f(z)$ puede no tener ningún cero, o tener solamente una cantidad finita de ellos, o finalmente, poseer un conjunto infinito de ceros. En el primer caso la función se expresa en la forma

$$f(z) = e^{g(z)},$$

en el segundo caso, en la forma

$$f(z) = (z - z_1)^{k_1} \ldots (z - z_m)^{k_m} e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ también es una función entera, $z_1, \ldots, z_m$ son los ceros, distintos entre sí, de la función $f(z)$ y $k_1, \ldots, k_m$ son los órdenes respectivos de estos ceros.

Consideremos una función entera $f(z)$ que posea un conjunto infinito de ceros. Sea $z = 0$ un cero λ-múltiple de la función; si $f(0) \neq 0$ se supondrá que $\lambda = 0$. Como $f(z)$ tiene solamente una cantidad finita de ceros en cada círculo $|z| < R < \infty$, éstos pueden numerarse en el orden no decreciente de sus módulos. Esto se hará repitiendo cada cero tantas veces como indique su orden de multi-

plicidad. Resulta una sucesión de números

$$\underbrace{0, \ldots, 0}_{\lambda}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots, \tag{2.1:1}$$

donde $|\alpha_n| \leqslant |\alpha_{n+1}|$ y $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n| = \infty$.

Demostremos el teorema siguiente:

T e o r e m a d e W e i e r s t r a s s. *Cualquiera que sea la sucesión, de números complejos* (2.1:1), *no decrecientes en valor absoluto, que converja hacia el infinito, siempre existe una función entera $f(z)$ cuyos ceros coinciden con los números de esta sucesión.*

D e m o s t r a c i ó n. Construyamos la sucesión de funciones enteras

$$g_n(z) = z^\lambda \prod_{1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{P_k(z)}, \tag{2.1:2}$$

donde $P_k(z)$ son unos polinomios, y demostremos que mediante una elección adecuada de los polinomios $P_k(z)$, la sucesión converge uniformemente en todo círculo $|z| < R$ de radio finito hacia una función $f(z)$ que satisface a todas las condiciones del teorema. Obsérvese que la elección misma de las funciones $g_n(z)$ es completamente natural. Está claro que los ceros de la función $g_n(z)$ son:

$$0, \ldots, 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n,$$

es decir, son los primeros términos de la sucesión (2.1:1). Además, cada uno de los números indicados se toma tantas veces cuantas el mismo aparece en la sucesión dada. Por consiguiente, $g_n(z)$ posee generalmente ceros múltiples de los órdenes dados. En lo que se refiere a los factores de la forma $e^{P_k(z)}$, éstos, sin agregar nuevos ceros, sirven para garantizar la convergencia uniforme de la sucesión (2.1:2).

Comenzando a construir los polinomios $P_k(z)$, fijemos arbitrariamente un círculo $|z| < R$ y supongamos que $N(R) + 1$ denota el índice, comenzando desde el cual todos los puntos α_n están situados fuera de un círculo de doble radio:

$$|\alpha_n| > 2R \quad \text{para} \quad n > N(R). \tag{2.1:3}$$

Representemos $g_n(z)$ en la forma

$$g_n(z) = g_{N(R)}(z) \prod_{N(R)+1}^{n} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{P_k(z)} =$$

$$= g_{N(R)}(z) \exp\left\{ \sum_{N(R)+1}^{n} \left[\operatorname{Ln}\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) + P_k(z) \right] \right\}.$$

Si $|z|<R$, entonces, en virtud de (2.1:3), $\left|\frac{z}{\alpha_k}\right|<\frac{1}{2}$ para $k>N(R)$. Por consiguiente, $\text{Ln}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)$ se puede desarrollar en serie de potencias

$$\text{Ln}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)=\ln\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)+2m\pi i=$$
$$=2m\pi i-\frac{z}{\alpha_k}-\frac{z^2}{2\alpha_k^2}-\ldots-\frac{z^k}{k\alpha_k^k}-\ldots$$

Como $\text{Ln}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)$ figura bajo el signo de la función exponencial, se puede hacer aquí $m=0$, es decir, tomar los valores principales de los logaritmos, sin que cambie por esto el resultado.

El polinomio $P_k(z)$ lo elegiremos de tal modo que difiera sólo en el signo de la suma de los primeros k términos de la serie de potencias de la función $\text{Ln}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)$, es decir, haremos

$$P_k(z)=\frac{z}{\alpha_k}+\frac{z^2}{2\alpha_k^2}+\ldots+\frac{z^k}{k\alpha_k^k}\qquad(k=1,\,2,\,3,\,\ldots)$$

Entonces tendremos:

$$\ln\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)+P_k(z)=-\frac{z^{k+1}}{(k+1)\,\alpha_k^{k+1}}-\ldots,$$

de donde

$$\left|\ln\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)+P_k(z)\right|\leqslant\frac{1}{k+1}\left|\frac{z}{\alpha_k}\right|^{k+1}+\frac{1}{k+2}\left|\frac{z}{\alpha_k}\right|^{k+2}+$$
$$+\ldots<\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+2}}+\ldots=\frac{1}{2^k}.$$

Así, pues, habiendo elegido los polinomios $P_k(z)$ del modo indicado, la serie

$$\sum_{N(R)+1}^{\infty}\left[\ln\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)+P_k(z)\right]$$

converge uniformemente en el círculo $|z|\leqslant R$ y, por consiguiente, representa en el mismo una función analítica $\varphi_R(z)$. Por ello, la sucesión

$$g_n(z)=g_{N(R)}(z)\exp\left\{\sum_{N(R)+1}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)+P_k(z)\right]\right\}$$

también converge uniformemente en el interior del círculo $|z|<R$ (aquí se tiene en cuenta que la función exponencial es continua) y, por consiguiente, representa en el mismo una función analítica

$f(z) = g_{N(R)}(z) \exp[\varphi_R(z)]$. Como en este razonamiento el radio R del círculo era arbitrario, resulta que la sucesión $\{g_n(z)\}$, con la elección indicada de los polinomios $\{P_k(z)\}$, es uniformemente convergente en el interior de cualquier círculo con el centro en el origen de coordenadas y, por consiguiente, $f(z) = \lim_{n\to\infty} g_n(z)$ es analítica en todo el plano, es decir, es una función entera. Esta en cada círculo $|z| < R$ tiene la forma $f(z) = g_{N(R)}(z)\cdot\exp[\varphi_R(z)]$ y como $\exp[\varphi_R(z)]$ no se anula en este círculo, resulta que $f(z)$ tiene los ceros comunes con $g_{N(R)}(z)$.

Pero los ceros del polinomio $g_{N(R)}(z)$ son todos aquellos puntos de la sucesión (2.1:1) que están situados en el círculo $|z| \leqslant 2R$. Por consiguiente, en el interior del círculo $|z| < R$ son ceros de $f(z)$ todos los puntos de la sucesión (2.1:1) que están situados en el mismo y sólo ellos.

De lo dicho se deduce que la función construida $f(z)$ satisface a todas las condiciones del teorema. El teorema queda demostrado.

La función obtenida en la demostración del teorema de Weierstrass tiene la forma del límite del producto

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} z^\lambda \prod_1^n \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \exp\left(\frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^k}{k\alpha_k^k}\right).$$

Ordinariamente, para escribir esta última expresión se omite la notación del límite, empleando el símbolo del producto infinito $\prod\limits_1^\infty$:

$$f(z) = z^\lambda \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \exp\left(\frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^k}{k\alpha_k^k}\right).$$

2.2. Empleando el teorema de Weierstrass, fácilmente se demuestra la siguiente proposición:

Teorema. *Toda función entera $f(z)$ con los ceros*

$$0, \ldots, 0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$$

se puede expresar en la forma

$$f(z) = e^{g(z)} z^\lambda \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \exp\left(\frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^k}{k\alpha_k^k}\right), \qquad (2.2:1)$$

donde $g(z)$ es una función entera.

En efecto, formemos según el teorema de Weierstrass la función entera

$$\varphi(z) = z^\lambda \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \exp\left(\frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^k}{k\alpha_k^k}\right),$$

cuyos ceros son los de $f(z)$ y sólo ellos. Entonces el cociente $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ representará una función entera sin ceros. Según el teorema 1 del ap. 1.5, ésta tendrá que tener la forma

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)}=e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera, de donde se deduce la fórmula (2.2:1).

La fórmula (2.2:1) se simplifica considerablemente para las funciones enteras de orden finito. Para esto, estudiemos primero la relación existente entre los ceros y el crecimiento de la función entera en el caso de funciones trascendentes enteras cualesquiera. Esta relación se deduce de la desigualdad de Jentzsch (ap. 4.1, cap. 6).

Escribámosla en la forma:

$$\int_0^R \frac{n(r)\,dr}{r}\leqslant \ln\frac{M(R)}{|f_{(0)}^{(\lambda)}/\lambda!\,|\,R^{\lambda}}$$

(véase la fórmula (4.1:9′), cap. 6). Aquí $n(r)$ denota la cantidad de ceros de la función $f(z)$ (excluyendo el punto $z=0$) situados en el círculo cerrado $|z|\leqslant r$. Tomando arbitrariamente θ, $0<\theta<1$, obtenemos:

$$\int_0^R \frac{n(r)\,dr}{r}>\int_{\theta R}^R \frac{n(r)\,dr}{r}\geqslant n(\theta R)\int_{\theta R}^R \frac{dr}{r}=\ln\frac{1}{\theta}\,n(\theta R).$$

Por lo tanto,

$$n(\theta R)<\frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}}\cdot\ln\frac{M(R)}{|f_{(0)}^{(\lambda)}/\lambda!\,|\,R^{\lambda}}.$$

Escribamos esta desigualdad en la forma

$$\frac{n(\theta R)}{\ln M\gg(R)}<\frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}}-\frac{\ln[|f_{(0)}^{(\lambda)}/\lambda!\,|\,R^{\lambda}]}{\ln\frac{1}{\theta}\ln M(R)},$$

lo cual es legítimo para todos los valores de R suficientemente grandes. Aumentando R indefinidamente y observando que

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\ln R}{\ln M(R)}=0$$

(véase (1.1:4)), obtenemos:

$$\varlimsup_{R\to\infty}\frac{n(\theta R)}{\ln M(R)}\leqslant\frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}}. \tag{2.2:2}$$

Resumiendo, la cantidad $n(\theta R)$ de ceros de una función trascendente entera en un círculo cerrado $|z| \leqslant \theta R$, donde $0 < \theta < 1$, no supera asintóticamente (es decir, en el límite) a una parte fraccionaria determinada de $\ln M(R)$, que depende solamente de θ.

Supongamos, en particular, que $f(z)$ es una función de orden finito. Entonces existen unos números positivos K y μ, tales que

$$\ln M(R) < KR^{\mu}$$

para todos los valores suficientemente grandes de R; por esta razón, de la desigualdad (2.2:2) sacamos la conclusión que

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{n(\theta R)}{KR^{\mu}} \leqslant \frac{1}{\ln\frac{1}{\theta}},$$

o bien, sustituyendo θR por R:

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{n(R)}{R^{\mu}} \leqslant \frac{K}{\theta^{\mu}\ln\frac{1}{\theta}}.$$

Aquí θ es un número arbitrario del intervalo $(0, 1)$; sirvámonos de esto para hacer que el segundo miembro de la desigualdad tome el valor mínimo. Este se alcanza para $\theta = e^{-\frac{1}{\mu}}$ y es igual a $Ke\mu$, por lo cual

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{n(R)}{R^{\mu}} \leqslant Ke\mu. \tag{2.2:2'}$$

Si el orden de la función es igual a ρ, entonces se puede hacer aquí $\mu = \rho+\varepsilon$ y $K=1$ para cualquier $\varepsilon > 0$; resulta:

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{n(R)}{R^{\rho+\varepsilon}} \leqslant e(\rho+\varepsilon).$$

Suponiendo que $\rho > 0$ y que la función $f(z)$ es además de tipo σ, hagamos en la relación (2.2:2') $\mu = \rho$ y $K = \sigma + \varepsilon$; entonces tendremos:

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{n(R)}{R^{\rho}} \leqslant (\sigma+\varepsilon)e\rho, \quad \text{o sea} \quad \overline{\lim_{R\to\infty}} \frac{n(R)}{R^{\rho}} \leqslant \sigma e\rho.$$

Supongamos que la función $f(z)$ tiene un conjunto infinito de ceros (sólo este caso tiene interés; en caso contrario las desigualdades obtenidas son triviales). Hagamos $|\alpha_n| = R$, entonces tendremos: $n \leqslant n(R)$ y, por consiguiente, las desigualdades en cuestión sólo se hacen más estrictas si se sustituyen en ellas $n(R)$ por n y R por $|\alpha_n|$. En resumen, para una función de orden finito se verifican

las siguientes desigualdades:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{|\alpha_n|^{\mu}}\leqslant Ke\mu$$

y luego

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{|\alpha_n|^{\rho+\varepsilon}}\leqslant e(\rho+\varepsilon)\quad(\rho\geqslant 0),\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{n}{|\alpha_n|^{\rho}}\leqslant \sigma e\rho$$

$$(\rho>0,\ \sigma\geqslant 0),\tag{2.2:2''}$$

donde ε es un número positivo cualquiera.

De la primera de las desigualdades (2.2:2″) se deduce que

$$\frac{1}{|\alpha_n|^{\rho+\varepsilon}}<\frac{e(\rho+2\varepsilon)}{n}$$

o bien

$$\frac{1}{|\alpha_n|^{\rho+2\varepsilon}}<[e(\rho+2\varepsilon)]^{\frac{\rho+2\varepsilon}{\rho+\varepsilon}}\frac{1}{n^{\frac{\rho+2\varepsilon}{\rho+\varepsilon}}}$$

para todos los valores de n suficientemente grandes.

Por lo tanto, la serie

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha_n|^{\lambda}}\tag{2.2:3}$$

es convergente si $\lambda\geqslant\rho+2\varepsilon$ o sea, (como ε es arbitrariamente pequeño), es convergente si $\lambda>\rho$.

Sea, en general, $\{\zeta_n\}$ una sucesión arbitraria de números complejos distintos de cero, no decreciente en valor absoluto, que converja hacia el infinito. Examinemos la serie

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\zeta_n|^{\lambda}},\tag{2.2:4}$$

donde λ es un número no negativo.

Si esta serie es convergente para cierto $\lambda_0>0$, entonces, evidentemente, será convergente también para todos los valores mayores de λ $\left(\text{puesto que los números } \frac{1}{|\zeta_n|} \text{ son menores que la unidad, comenzando desde uno de ellos en adelante}\right)$. Consideremos el extremo inferior de aquellos valores de λ para los cuales la serie es convergente. Este extremo inferior es un número no negativo y se llama **exponente de convergencia de la sucesión** $\{\zeta_n\}$ designándose con τ:

$$\tau=\inf\lambda\left(\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\zeta|^{\lambda}}<\infty\right).$$

Si la serie (2.2:4) es divergente para cualquier $\lambda > 0$, entonces se supone que $\tau = \infty$ y se dice que el exponente de convergencia de la sucesión $\{\zeta_n\}$ es infinito.

Fácilmente se comprueba que para la sucesión $\{e^n\}$ el exponente de convergencia es igual a cero, para la sucesión $\{n^{\frac{1}{\tau}}\}$ éste tiene el valor de τ, y para la sucesión $\{\ln (n+1)\}$ es infinito.

Demostremos que en todos los casos el exponente de convergencia puede calcularse por la fórmula

$$\tau = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln |\zeta_n|}. \tag{2.2:5}$$

Supongamos que $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln |\zeta_n|} = \alpha \neq \infty$; entonces

$$\frac{\ln n}{\ln |\zeta_n|} < \alpha + \varepsilon \quad \text{para} \quad n > n(\varepsilon),$$

de donde $\frac{1}{|\zeta_n|} < n^{-\frac{1}{\alpha+\varepsilon}}$ y, por consiguiente, la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{|\zeta_n|^{\lambda}}$ es convergente para $\lambda > \alpha + \varepsilon$. Como ε es arbitrariamente pequeño, ésta es convergente para cualquier $\lambda > \alpha$, por lo cual $\tau \leqslant \alpha$.

En particular, si α es finito, resulta que τ también lo es. Supongamos ahora que τ es finito y demostremos que entonces α también lo es y no es superior a τ. En efecto, la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{|\zeta_n|^{\tau+\varepsilon}}$ tiene que ser convergente para cualquier $\varepsilon > 0$. Como sus términos no crecen, de aquí se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\zeta_n|^{\tau+\varepsilon}} = 0 \text{ *)}.$$

---

*) En efecto, supongamos que la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \gamma_n$, donde $\gamma_n \geqslant \gamma_{n+1} > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ es convergente. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$ tiene que existir un $N(\varepsilon)$ tal que para $m > N(\varepsilon)$ y cualquier p natural se cumple la desigualdad

$$\gamma_{m+1} + \ldots + \gamma_{m+p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Haciendo aquí $p = m$ y observando que $\gamma_{m+1} + \ldots + \gamma_{2m} \geqslant m\gamma_{2m}$, obtenemos que $2m\gamma_{2m} < \varepsilon$ para $m > N(\varepsilon)$; exactamente igual, para $p = m+1$ hallaremos que: $\gamma_{m+1} + \ldots + \gamma_{2m+1} \geqslant (m+1)\gamma_{2m+1}) > \left(m + \frac{1}{2}\right)\gamma_{2m+1}$, de donde $(2m+1)\gamma_{2m+1} < \varepsilon$ para $m > N(\varepsilon)$. Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} n\gamma_n = 0.$$

Por lo tanto, para todos los valores de n suficientemente grandes tendremos:

$$\frac{\ln n}{\ln|\zeta_n|} \leqslant \tau + \varepsilon,$$

de donde, para $n \to \infty$, hallamos:

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\zeta_n|} \leqslant \tau + \varepsilon.$$

Como aquí ε es arbitrariamente pequeño, se tiene: $\alpha \leqslant \tau$. Comparando con la desigualdad hallada anteriormente, resulta:

$$\tau = \alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\zeta_n|},$$

como se quería demostrar.

Ya se vio que las magnitudes τ y α son finitas simultáneamente y, por consiguiente, son infinitas a la vez. Por ello, la relación establecida es válida también para valores infinitos de τ y α.

Volvamos a examinar los ceros de una función entera. Se demostró que la serie (2.2:3) es convergente para todos los valores $\lambda > \rho$. De aquí se deduce que *el exponente de convergencia τ de la sucesión de los ceros de una función entera de orden ρ es finito y no es superior a ρ*:

$$\tau \leqslant \rho. \tag{2.2:6}$$

Este resultado pertenece a Hadamard. Designemos con $\varkappa$ el mayor número entero para el cual la serie (2.2:3) es divergente. Como τ es el exponente de convergencia de la sucesión $\{\alpha_k\}$, resulta que $\varkappa \leqslant \tau$ y, por consiguiente, $\varkappa \leqslant [\tau] \leqslant [\rho]$. En virtud de la definición del número $\varkappa$, la serie (2.2:3) tiene que ser convergente para $\lambda = \varkappa + 1$:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^{\varkappa+1}} < \infty$$

y ser divergente para $\lambda = \varkappa$:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^{\varkappa}} = \infty.$$

Definamos los polinomios $p_k(z)$, suponiendo que son idénticamente nulos cuando $\varkappa = 0$ y son iguales a

$$p_k(z) = \frac{z}{\alpha_k} + \frac{z^2}{2\alpha_k^2} + \ldots + \frac{z^\varkappa}{\varkappa\alpha_k^\varkappa}$$

cuando $\varkappa \geqslant 1$, y demostremos que el producto

$$z^{\lambda} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{p_k(z)} = z^{\lambda} \prod_{1}^{\infty} [1 + v_k(z)]$$

representa una función entera cuyos ceros coinciden con los de la función $f(z)$. Con este fin, tomemos un círculo arbitrario $|z| < R$, y sea $|\alpha_k| > 2R$ para $k > N(R)$. Entonces tendremos $\left|\frac{z}{\alpha_k}\right| < \frac{1}{2}$ y

$$|\ln[1 + v_k(z)]| = \left|\ln\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) + p_k(z)\right| = \left|-\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n\alpha_k^n} + \sum_{1}^{\varkappa} \frac{z^n}{n\alpha_k^n}\right| =$$

$$= \left|-\frac{z^{\varkappa+1}}{\alpha^{\varkappa+1}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{p-1}}{(\varkappa+p)\alpha_k^{p-1}}\right| < \frac{R^{\varkappa+1}}{|\alpha_k|^{\varkappa+1}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p-1}} = \frac{2R^{\varkappa+1}}{|\alpha_k|^{\varkappa+1}}.$$

Pero la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|^{\varkappa+1}}$ es convergente; por esta razón la serie $\sum\limits_{N(R)+1}^{\infty} |\ln[1 + v_k(z)]|$ es absoluta y uniformemente convergente en el círculo $|z| < R$. Esto significa (véase el t. I, ap. 4.3, cap. tercero) que el producto infinito $\prod\limits_{N(R)+1}^{\infty} [1 + v_k(z)]$ es absolutamente convergente en el círculo indicado y representa en el mismo una función analítica $\varphi_R(z)$ que no se anula. Definitivamente, obtenemos que el producto $z^{\lambda} \prod\limits_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{p_k(z)}$ es absolutamente convergente en el círculo $|z| < R$ y representa en el mismo una función analítica

$$\varphi(z) = z^{\lambda} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{p_k(z)},$$

que se anula en aquéllos, y sólo en aquellos puntos de este círculo, en los cuales se anula la función $f(z)$ (los ceros de ambas funciones poseen los mismos órdenes de multiplicidada, respectivamente). Como $\varphi(z)$ posee las propiedades señaladas en cualquier círculo $|z| < R$, resulta que $\varphi(z)$ es una función entera cuyos ceros coinciden con los de la función $f(z)$.

Formando el cociente $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ y observando que éste representa una función entera que carece de ceros, sacamos la conclusión que

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = e^{g(z)},$$

donde $g(z)$ es una función entera, o bien, definitivamente,

$$f(z) = e^{g(z)} z^{\lambda} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^{\varkappa}}{\varkappa \alpha_k^{\varkappa}}}. \qquad (2.2{:}7)$$

Esta fórmula es válida para cualquier función entera de orden finito ρ. La ventaja de ella ante la fórmula general (2.2:1) se debe a que los grados de los polinomios que figuran en el exponente de cada factor no crecen indefinidamente junto con k, sino que conservan un mismo valor $\varkappa \leqslant [\tau] \leqslant [\rho]$. En el caso particular $\varkappa = 0$ (esto ocurre cuando $\rho < 1$, o cuando $\rho \geqslant 1$ pero $\tau < 1$, o finalmente, cuando $\tau = 1$ y la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|}$ es convergente), se puede suponer que los polinomios $p_k(z)$ son nulos. Entonces la fórmula (2.2:7) toma una forma muy sencilla:

$$f(z) = e^{g(z)} z^{\lambda} \sum_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_h}\right). \qquad (2.2{:}8)$$

2.3. En este apartado nos ocuparemos del estudio ulterior de las funciones de orden finito. El objetivo fundamental es demostrar la siguiente proposición:

Teorema de Hadamard. *Si las fórmulas* (2.2:7) *y* (2.2:8) *representan una función entera de orden finito* ρ, *entonces la función* $g(z)$ *que figura en ellas es un polinomio de grado no superior a* $[\rho]$.

Demostración. Hagamos $p_k(z) = \frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^{\varkappa}}{\varkappa \alpha_k^{\varkappa}}$, si $\varkappa \geqslant 1$ y $p_k(z) = 0$ si $\varkappa = 0$, y para $R > 1$ arbitrario escribamos las fórmulas (2.2:7) y (2.2:8) en la forma siguiente:

$$f(z) = z^{\lambda} \sum_{1}^{\nu(R)} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \left[e^{g(z) + \sum_{1}^{\nu(R)} p_k(z)} \sum_{\nu(R)+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_h}\right) e^{p_k(z)}\right],$$

donde $\nu(R)$ denota el subíndice mayor de los números α_k cuyos módulos no son superiores a R, de modo que $|\alpha_k| \leqslant R$ si $k \leqslant \nu(R)$

y $|\alpha_{\nu(R)+1}| > R$. Para abreviar, designemos con $g_R(z)$ la expresión comprendida entre corchetes. Entonces, para $|z| = 2R$ tendremos:

$$M(2R) \geqslant |f(z)| \geqslant (2R)^{\lambda} \prod_{1}^{\nu(R)} \left(\frac{2R}{R} - 1\right) |g_R(z)| \geqslant |g_R(z)|,$$

de donde

$$\max_{|z|=2R} |g_R(z)| \leqslant M(2R).$$

Como $g_R(z)$ es una función analítica (entera), en el círculo $|z| < R$, debido al principio del módulo máximo, tendremos:

$$|g_R(z)| \leqslant M(2R). \qquad (2.3:1)$$

La función $g_R(z)$ puede representarse en el círculo $|z| < R$ en la forma

$$g_R(z) = e^{h_R(z)},$$

donde

$$h_R(z) = g(z) + \sum_{1}^{\nu(R)} p_k(z) + \sum_{\nu(R)+1}^{\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) + p_k(z)\right]$$

es una función analítica en este círculo.

Obsérvese que la serie $\sum_{\nu(R)+1}^{\infty} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) + p_k(z)\right]$ es uniformemente convergente en el círculo $|z| < R$, puesto que para valores suficientemente grandes de $n > N(R)$ los módulos de sus términos no superan a los términos de la serie convergente

$$\sum_{1}^{\infty} 2 \frac{R^{\varkappa+1}}{|\alpha_k|^{\varkappa+1}}$$ (véase la pág. 289).

De la desigualdad (2.3:1) se deduce que

$$\operatorname{Re}[h_R(z)] < \ln M(2R) \quad \text{para} \quad |z| < R,$$

y, por consiguiente, en virtud del lema 1, ap. 1.5, los coeficientes de Taylor de la función $h_R(z)$ satisfacen a las desigualdades

$$|c_n| = \left|\frac{h_R^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant 2\frac{[\ln M(2R) - \alpha_0]}{R^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

donde

$$\alpha_0 = \operatorname{Re} c_0 = \operatorname{Re}[h_R(0)].$$

Pero pueden obtenerse los números c_n sumando los coeficientes de z^n en los desarrollos de Taylor de los sumandos separados que

forman $h_R(z)$ (véase el t. I, ap. 7.1, cap. tercero). Tomando $n > \rho \geqslant \geqslant \tau \geqslant \varkappa$ y observando que $p_k(z)$ son polinomios de grado $\varkappa$, obtenemos:

$$c_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} - \sum_{k=\nu(R)+1}^{\infty} \frac{1}{n\alpha_k^n}.$$

Por consiguiente, para $n > \rho$ se tiene:

$$\left|\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant |c_n| + \sum_{k=\nu(R)+1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|^n} \leqslant \frac{2[\ln M(2R) - \alpha_0]}{R^n} + \sum_{\nu(R)+1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|^n}.$$

Cuando R tiende aquí a ∞ (para n fijado), hallaremos que el segundo miembro de la desigualdad tiende a cero. En efecto, para $\rho + \varepsilon < n$ y para valores suficientemente grandes de R se tiene:

$$M(2R) < e^{(2R)^{\rho+\varepsilon}},$$

es decir, $\ln M(2R) < (2R)^{\rho+\varepsilon}$ y, por consiguiente,

$$\lim_{R\to\infty} \frac{2[\ln M(2R) - \alpha_0]}{R^n} = 0.$$

Además, la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^n}$ es convergente (puesto que n es mayor que el exponente de convergencia τ) y, por consiguiente, $\lim\limits_{R\to\infty} \sum\limits_{\nu(R)+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k^n} = 0$. Definitivamente, obtenemos que $\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = 0$ si $n > \rho$, de donde se deduce que $g(z)$ es un polinomio de grado no superior a $[\rho]$. El teorema de Hadamard queda demostrado.

Como aplicación de este teorema, deduzcamos de nuevo el desarrollo de sen z en un producto infinito. Ya sabemos que todos los ceros de sen z son simples. Ordenándolos por módulos no decrecientes, tendremos:

$$0, \ -\pi, \ \pi, \ -2\pi, \ 2\pi, \ \ldots, \ -k\pi, \ k\pi, \ \ldots$$

Evidentemente, el exponente de convergencia de la sucesión de estos ceros es $\tau = 1$, y la serie $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \ldots + \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{k\pi} + \ldots$ es divergente, mientras que la serie $\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} + \ldots + \frac{1}{k^2\pi^2} + + \frac{1}{k^2\pi^2} + \ldots$ es convergente. Por esta razón, $\varkappa$ es igual aquí

a 1 y el desarrollo de sen z en un producto infinito es de la forma

$$\operatorname{sen} z = e^{g(z)} z \prod_{1}^{\infty} \left\{ \left[\left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) e^{\frac{z}{k\pi}} \right] \left[\left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) e^{-\frac{z}{k\pi}} \right] \right\} =$$

$$= e^{g(z)} z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Como el orden de sen z es igual a 1, según el teorema de Hadamard $g(z)$ es un polinomio de grado no superior al primero:

$$g(z) = A_0 + A_1 z.$$

Para determinar los coeficientes A_0 y A_1, lo más fácil es observar que $e^{g(z)} = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)}$ es una función par. Por ello, $e^{A_0 + A_1 z} \equiv$ $= e^{A_0 - A_1 z}$, de donde $e^{2A_1 z} \equiv 1$ y, por consiguiente, $A_1 = 0$. Pasando ahora al límite para $z \to 0$, obtenemos: $e^{A_0} = 1$ (o sea, $A_0 = 0$, o, en general, $A_0 = 2m\pi i$, donde m es un número entero). En resumen, $e^{g(z)} \equiv 1$ y

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Este es el resultado pedido.

2.4. Antes se estableció que, para toda función entera $f(z)$ de orden finito ρ, el exponente de convergencia τ de la sucesión de sus ceros no es superior a ρ y que si $\varkappa$ es el mayor número entero para el cual la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_n|^{\varkappa}}$ es divergente, entonces $f(z)$ puede expresarse en la forma

$$f(z) = e^{p(z)} z^{\lambda} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{p_k(z)},$$

donde $p(z)$ es un polinomio de grado no superior a $[\rho]$ y $p_k(z)$ son polinomios de grado $\varkappa$; precisamente,

$$p(z) = \frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^{\varkappa}}{\varkappa \alpha_k^{\varkappa}}, \text{ si } \varkappa \geqslant 1, \text{ y } p_k(z) \equiv 0 \text{ si } \varkappa = 0.$$

Ahora demostraremos una proposición que, hasta cierto punto, es inversa respecto de la anterior.

Teorema de Borel. *Supongamos que la función entera $f(z)$ admite el desarrollo*

$$f(z) = e^{p(z)} z^{\mu} \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{p_k(z)}, \qquad (2.4:1)$$

donde el exponente de convergencia de la sucesión de los ceros $\{\alpha_k\}$ es un número finito τ, $p_k(z)$ son los polinomios definidos igual que antes y, finalmente, $p(z)$ es un polinomio de grado n. En estas condiciones, $f(z)$ es una función de orden finito ρ, coincidiendo este orden con el mayor de los números τ y n:

$$\rho = \max(\tau, n).$$

Además, si $\tau < n$, o si la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|^{\tau}}$ es convergente, $f(z)$ es una función de tipo finito.

Demostración. El teorema de Borel permite acotar superiormente el módulo de la función entera (2.4:1). Para obtener el resultado pedido, acotemos primero el módulo de cada término del producto. Haciendo $\frac{z}{\alpha_k} = \zeta$, representemos $\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{p_k(z)}$ en la forma

$$\varphi(\zeta) = (1-\zeta) \exp\left(\zeta + \frac{\zeta^2}{2} + \ldots + \frac{\zeta^{\varkappa}}{\varkappa}\right).$$

Para $|\zeta| \leqslant \frac{1}{2}$ se tiene:

$$|\varphi(\zeta)| \leqslant \left|\exp\left[\ln(1-\zeta) + \zeta + \ldots + \frac{\zeta^{\varkappa}}{\varkappa}\right]\right| =$$

$$= \left|\exp\left[-\frac{\zeta^{\varkappa+1}}{\varkappa+1} - \frac{\zeta^{\varkappa+2}}{\varkappa+2} - \ldots\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[|\zeta|^{\varkappa+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right)\right] = e^{2|\zeta|^{\varkappa+1}} \leqslant e^{|2\zeta|^{\lambda'}},$$

donde λ' es un número arbitrario, no superior a $\varkappa + 1$. Si $|\zeta| > \frac{1}{2}$ se tiene:

$$|\varphi(\zeta)| \leqslant (1 + |\zeta|) \exp(|\zeta| + \ldots + |\zeta|^{\varkappa}) \leqslant$$

$$\leqslant (1 + |\zeta|) \exp\left[|\zeta|^{\varkappa}\left(1 + \frac{1}{|\zeta|} + \ldots + \frac{1}{|\zeta|^{\varkappa-1}}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant (1 + |\zeta|) \exp[|\zeta|^{\varkappa}(1 + 2 + \ldots + 2^{\varkappa-1})] <$$

$$< \exp[|2\zeta|^{\varkappa} + \ln(1 + |\zeta|)] \leqslant \exp[C_{\varkappa}|2\zeta|^{\lambda''}].$$

donde λ'' es un número positivo, no menor que $\varkappa$ y $C_0 = C_0\lambda'' > 1$.

De aquí que, para cada ζ y cualquier $\lambda > 0$, tal que $\varkappa \leqslant \lambda \leqslant \varkappa + 1$, se tiene:

$$|(1-\zeta)e^{\zeta+\ldots+\frac{\zeta^\varkappa}{\varkappa}}| \leqslant \exp[C|\zeta|^\lambda], \qquad (2.4:2)$$

donde $C = 2^\lambda C_0(\lambda)$.

Elíjamos λ de tal modo que la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^\lambda}$ sea convergente.

Si la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^\tau}$ es convergente, entonces $\varkappa < \tau \leqslant \varkappa + 1$ y hacemos $\lambda = \tau$; si esta serie es divergente, entonces $\varkappa \leqslant \tau < \varkappa + 1$ y λ se puede hacer igual a $\tau + \varepsilon$, donde $0 < \varepsilon < \varkappa + 1 - \tau$.

Sustituyendo en la desigualdad (2.4:2) ζ por $\frac{z}{\alpha_k}$, obtenemos para este valor λ y para cualesquiera z y k la siguiente desigualdad:

$$\left|\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)\exp\left[\frac{z}{\alpha_k}+\ldots+\frac{z^\varkappa}{\varkappa\alpha_k^\varkappa}\right]\right| < \exp\left(C\frac{|z|^\lambda}{|\alpha_k|^\lambda}\right).$$

Obsérvese también que si $p(z) = A_0 + \ldots + A_n z^n$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$

$$|z^\mu e^{p(z)}| \leqslant |z|^\mu \exp(|A_0| + \ldots + |A_n|\,|z|^n) < \exp[(|A_n|+\varepsilon)|z|^n]$$

$$\text{para } |z| > r(\varepsilon).$$

Por consiguiente,

$$|f(z)| < \exp\left[(|A_n|+\varepsilon)|z|^n + C\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^\lambda}|z|^\lambda\right] \quad \text{para} \quad |z| > r(\varepsilon). \qquad (2.4:3)$$

De aquí se deduce que $f(z)$ es una función de orden finito, siendo

$$\rho \leqslant \max(n, \lambda).$$

Pero λ o es igual a τ, o puede tomarse arbitrariamente próximo a τ. Por ello

$$\rho \leqslant \max(n, \tau).$$

Por otra parte, para una función de orden finito tiene que ser (según el teorema de Hadamard)

$$\tau \leqslant \rho \text{ y } n \leqslant [\rho] \leqslant \rho;$$

por lo tanto,

$$\rho = \max(n, \tau).$$

Obsérvese, finalmente, que cuando $n > \tau$ y, por consiguiente, $\rho = n$, se puede tomar $\tau < \lambda < n$ y según la desigualdad (2.4:3) tendremos para todos los valores suficientemente grandes de $|z|$:

$$|f(z)| < \exp(C_1 |z|^\rho),$$

de donde se deduce que el tipo de la función $f(z)$ es finito.

Si $n \leqslant \tau$, pero la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^\tau}$ es convergente, entonces se puede hacer en la desigualdad (2.4:3) $\lambda = \tau$, y de nuevo tendremos:

$$|f(z)| < \exp(C_2 |z|^\rho).$$

Por lo tanto, el tipo de $f(z)$ será finito también en el caso en que $n \leqslant \tau$ y la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^\tau}$ es convergente.

De los teoremas de Hadamard y Borel se deduce que *la existencia de un desarrollo de la forma*

$$f(z) = e^{p(z)} z^\lambda \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \exp\left(\frac{z}{\alpha_k} + \ldots + \frac{z^\varkappa}{\varkappa \alpha_k^\varkappa}\right),$$

donde $p(z)$ es un polinomio de grado n y $\varkappa$ es el mayor número entero para el cual la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^\varkappa}$ es divergente, es una característica propia de las funciones enteras de orden finito.

Está claro que si una misma función $f(z)$ admite un desarrollo más de la misma forma

$$f(z) = e^{q(z)} z^\mu \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{\beta_k}\right) \exp\left(\frac{z}{\beta_k} - \ldots + \frac{z^\nu}{\nu \beta_k^\nu}\right),$$

donde ν es el mayor número entero para el cual la serie $\sum_1^\infty \frac{1}{|\alpha_k|^\nu}$ es divergente, entonces los números β_k tienen que coincidir con los números correspondientes α_k (con un cambio adecuado del orden de numeración de los ceros que poseen módulos iguales), ν tiene que coincidir con $\varkappa$ y, finalmente, el polinomio $q(z)$ tiene que diferir de $p(z)$ solamente en un sumando de la forma $2m\pi i$ (m es un número entero).

En algunas investigaciones sobre la teoría de las funciones enteras desempeña un papel notable el mayor de los dos números enteros: n y $\varkappa$. Este número se denota con la letra p y se llama g é n e r o

de la función entera

$$p = \max(n, \varkappa).$$

Como $\rho = \max(n, \tau)$ y $\tau \geqslant \varkappa$, resulta que $\rho \geqslant p$. Pero $\tau \leqslant \varkappa + 1$ y, por consiguiente, $\rho \leqslant \max(n, \varkappa) + 1 = p + 1$. Por lo tanto,

$$p \leqslant \rho \leqslant p + 1$$

por lo cual, se cumple una de las dos relaciones:

$$p = [\rho] \quad \text{o bien} \quad p = [\rho] - 1.$$

El lector demostrará fácilmente que se cumple la última relación cuando, y sólo cuando, $n < \tau$, τ es un número entero y la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|^{\tau}}$ es convergente.

Como ejemplo, señalemos dos funciones:

$$\operatorname{sen} z = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right) \quad y \quad f(z) = \prod_{1}^{\infty} \left\{1 - \frac{z}{k\,[\ln(k+1)]^2}\right\}.$$

Para la primera de ellas $n = 0$, $\tau = \varkappa = 1$ y, por consiguiente,

$$\rho = \max(n, \tau) = 1 \quad \text{y} \quad p = \max(n, \varkappa) = 1 = \rho.$$

Para la segunda $n = 0$, $\tau = 1$, $\varkappa = 0$ y, por lo tanto, $\rho = 1$ y $p = 0$.

En resumen, las funciones pueden tener un mismo orden ($\rho = 1$) y distinto género (aquí $p = 1$ y $p = 0$).

Obsérvese que las funciones de género 0 se caracterizan completamente por la existencia de un desarrollo de la forma

$$f(z) = Cz^{\lambda} \sum_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right),$$

donde la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k}$ es convergente.

De los teoremas de Hadamard y Borel se deduce una ley importante respecto de los A-puntos de una función entera.

Sea $f(z)$ una función de orden finito ρ, donde ρ no es un número entero. Entonces, para cualquier número complejo A, la función $f(z) - A$ también es de orden ρ. Por consiguiente, son válidos los

desarrollos de la forma

$$f(z)=e^{g(z)}z^{\lambda}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)\exp\left(\frac{z}{\alpha_k}+\ldots+\frac{z^{\varkappa}}{\varkappa\alpha_k^{\varkappa}}\right),$$

$$f(z)-A=e^{\gamma(z)}z^{\mu}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\beta_k}\right)\exp\left(\frac{z}{\beta_k}+\ldots+\frac{z^{\nu}}{\nu\beta_k^{\nu}}\right),$$

donde

$$\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{\lambda},\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots$$

son los ceros de la función $f(z)$ y

$$\underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{\mu},\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots$$

son los ceros de la función $f(z)-A$.

Sean n y m los grados de los polinomios $g(z)$ y $\gamma(z)$ y supongamos que τ y τ_A son los exponentes de convergencia de las sucesiones $\{\alpha_k\}$ y $\{\beta_k\}$. Como los órdenes de las funciones $f(z)$ y $f(z)-A$ son iguales, según el teorema de Borel tiene que ser:

$$\rho=\max(n,\tau)=\max(m,\tau_A).$$

Pero en el caso considerado ρ no es un número entero, por lo cual $\rho\neq n$ y $\rho\neq m$ y, por consiguiente,

$$\rho=\tau=\tau_A.$$

En resumen, *para una función entera $f(z)$ de orden fraccionario, los exponentes de convergencia de las sucesiones de A-puntos de esta función no dependen de A y coinciden con el orden ρ de la función.*

Esta proposición representa un complemento esencial del teorema pequeño de Picard (véase el ap. 1.5 del presente capítulo). En efecto, de este último solamente se deduce que la ecuación

$$f(z)-A=0$$

posee un conjunto infinito de raíces para cualquier A; en otras palabras, *los exponentes de convergencia para la sucesión de las raíces son positivos para cualquier A*. Ahora se puede afirmar que estos exponentes tienen un mismo valor y son iguales a ρ.

Consideremos como ejemplo los A-puntos de la función $\frac{\operatorname{sen}\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ cuyo orden es igual a $\frac{1}{2}$. Por lo demostrado, se puede afirmar que para cualquier A el exponente de convergencia de la sucesión de sus

A-puntos también es igual a $\frac{1}{2}$. Supongamos, en particular, que $A = 0$. Entonces los A-puntos serán las raíces de la ecuación $\frac{\operatorname{sen} \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 0$, es decir, los términos de la sucesión π^2, $(2\pi)^2$, $(3\pi)^2$, ... Evidentemente, el exponente de convergencia es $\frac{1}{2}$.

Para las funciones de orden entero puede existir un valor excepcional $A = A_0$ para el cual el exponente de convergencia de la sucesión de los A-puntos es menor que ρ. Tal valor excepcional (denominado b o r e l i a n o) es, por ejemplo, el valor A_0 que toma la función solamente en un conjunto finito de puntos (v a l o r e x c e p c i o n a l d e P i c a r d), puesto que para los A_0-puntos correspondientes se debe considerar que $\tau_{A_0} = 0$. Puede servir de ejemplo la función e^z, la cual no toma el valor 0, o la función $p(z)\,e^{P(z)}$ (donde $p(z)$ y $P(z)$ son polinomios), la cual toma el valor 0 en un conjunto finito de puntos, que es igual al grado del polinomio $p(z)$. Pero el valor excepcional boreliano puede no ser de Picard, es decir, puede tomar la función tal valor en un conjunto infinito de puntos. Puede servir de ejemplo la función de segundo orden $e^{z^2} \operatorname{sen} z$, cuyos ceros coinciden con los de $\operatorname{sen} z$ y, por consiguiente, poseen un exponente de convergencia que es igual a la unidad. Aquí 0 es un valor excepcional boreliano, sin ser un valor excepcional de Picard. Se puede demostrar que no pueden existir dos valores excepcionales borelianos, de modo que para las funciones de orden entero también se cumple siempre la igualdad $\tau_A = \rho$, a excepción, posiblemente, de un valor $A = A_0$, para el cual se cumple la desigualdad $\tau_A < \rho$.

§ 3. DESARROLLO DE LAS FUNCIONES MEROMORFAS EN FRACCIONES SIMPLES

3.1. Las funciones meromorfas se definieron anteriormente como aquellas que se expresan en forma de un cociente de dos funciones enteras:

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \qquad (h(z) \not\equiv 0). \tag{3.1:1}$$

De aquí se deduce que en los puntos finitos del plano una función meromorfa no puede tener otras singularidades más que polos. En efecto, $f(z)$ puede tener singularidades solamente en aquellos puntos en los que $h(z)$ se anula. Si en tal punto $g(z)$ no se anula, obtenemos un polo de $f(z)$. Si $g(z)$ también se anula, entonces se deben comparar los órdenes de multiplicidad de este punto como cero de las funciones $h(z)$ y $g(z)$. Supongamos que $z = \zeta$ es un cero de orden γ de $h(z)$ y es un cero de orden δ de $g(z)$. Entonces, para

$f(z)$ tendremos:

$$f(z)=\frac{\frac{g^{(\delta)}(\zeta)}{\delta!}(z-\zeta)^{\delta}+\ldots}{\frac{h^{(\gamma)}(\zeta)}{\gamma!}(z-\zeta)^{\gamma}+\ldots}=(z-\zeta)^{\delta-\gamma}\frac{\frac{g^{(\delta)}(\zeta)}{\delta!}+\ldots}{\frac{h^{(\gamma)}(\zeta)}{\gamma!}+\ldots},$$

donde $g^{(\delta)}(\zeta)\neq 0$ y $h^{(\gamma)}(\zeta)\neq 0$, de lo que se ve que $z=\zeta$ es un punto regular para $f(z)$ si $\delta\geqslant\gamma$ y es un polo de orden $\gamma-\delta$ si $\delta<\gamma$.

Como los ceros del denominador $h(z)$ no pueden tener un punto de acumulación en ningún punto finito del plano, los polos de la función $f(z)$, comprendidos entre los ceros del denominador $h(z)$, no pueden tener tampoco ningún punto de acumulación en un punto finito del plano.

Consideremos una función uniforme arbitraria $F(z)$ que no tenga otros puntos singulares en los puntos finitos del plano más que polos. Si no tiene polos, entonces $F(z)$ es una función entera y, por consiguiente, pertenece a la clase de las funciones meromorfas. Si existe al menos un polo, pero el número de polos es finito: $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, y sus órdenes son: $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, entonces formamos el polinomio $P(z)=(z-\zeta_1)^{\gamma_1}\ldots(z-\zeta_n)^{\gamma_n}$, el cual tiene un cero de orden γ_j en el polo ζ_j del mismo orden. Está claro que el producto $F(z)\,P(z)$ es una función entera $G(z)$, de donde $F(z)=\frac{G(z)}{P(z)}$, y de nuevo nos convencemos que $F(z)$ es una función meromorfa.

Supongamos, finalmente, que $F(z)$ posee un conjunto infinito de polos. Obsérvese que en cada círculo cerrado K: $|z|\leqslant R<\infty$ sólo puede haber una cantidad finita de ellos. En efecto, en caso contrario existiría en K un punto de acumulación de polos, el cual, siendo un punto singular no aislado de la función $F(z)$, no puede ser polo. Pero la existencia de tal punto singular contradice a la definición de la función $F(z)$. Como en cada círculo de radio finito existe solamente una cantidad finita de polos de la función $F(z)$, éstos pueden ordenarse por módulos no decrecientes. Sea $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ $\ldots, \zeta_n, \ldots$ la sucesión de todos los polos de $F(z)$, distintos entre sí, y sean $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$ sus órdenes. Está claro que $\lim \zeta_n = \infty$; por consiguiente, según el teorema de Weierstrass de las funciones enteras, se puede construir una función entera $H(z)$ cuyos ceros sean solamente los puntos ζ_j y cada uno de éstos sea de orden γ_j, respectivamente. Entonces el producto $F(z)\,H(z)$ será una función entera $G(z)$ que no se anula en ninguno de los puntos ζ_j. Resulta que en este caso $F(z)$ representa también el cociente de dos funciones enteras:

$$F(z)=\frac{G(z)}{H(z)},$$

es decir, es una función meromorfa.

Las proposiciones establecidas permiten sustituir la definición admitida de función meromorfa por otra que es equivalente:

Una función uniforme $f(z)$ se llama meromorfa, si no tiene otros puntos singulares en los puntos finitos del plano más que, posiblemente, polos.

Si el conjunto de polos de una función meromorfa es infinito, entonces, como ya se vio, éste no puede tener un punto de acumulación finito y, por consiguiente, tiene un punto único de acumulación en el infinito. Así, pues, en este caso, el punto del infinito es un punto singular no aislado de la función $f(z)$; precisamente es un punto de acumulación de polos.

Supongamos ahora que $f(z)$ posee solamente una cantidad finita de polos. Entonces el punto del infinito puede ser un punto regular de $f(z)$ o un punto singular aislado de carácter uniforme, es decir, un polo o un punto singular esencial.

Demosremos que cuando $z = \infty$ es un punto regular o un polo de la función meromorfa $f(z)$, esta función es racional.

En efecto, sean $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ los polos de la función $f(z)$ (tiene que haber solamente una cantidad finita de ellos, puesto que si hubiese un conjunto infinito de éstos, el punto ∞ sería un punto de acumulación de polos y, por consiguiente, no podría ser ni punto regular ni polo) y sean $g_1(z), \ldots, g_n(z)$ sus partes principales correspondientes de los desarrollos de Laurent de la función $f(z)$:

$$g_j(z) = \frac{A_{-\gamma_j}}{(z-\zeta_j)^{\gamma_j}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-\zeta_j},$$

donde $A_{-\gamma_j} \neq 0$, de modo que γ_j es el orden del polo ζ_j.

Designemos además con $g_0(z)$ el polinomio que representa la parte principal del desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en el entorno del punto del infinito (suponiendo que $g_0(z) \equiv 0$ cuando ∞ es un purto regular de la función $f(z)$), y sea

$$\varphi(z) = f(z) - \sum_0^n g_j(z).$$

En un entorno del punto z_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ se puede representar $\varphi(z)$ en la forma

$$\varphi(z) = f(z) - g_j(z) -$$
$$- [g_0(z) + g_1(z) + \ldots + g_{j-1}(z) + g_{j+1}(z) + \ldots + g_n(z)]$$

y como el desarrollo de Laurent de la diferencia $f(z) - g_j(z)$ según las potencias de $z - \zeta_j$ no contiene términos con potencias negativas de $z - \zeta_j$ y cada una de las funciones comprendidas entre corchetes es regular en $z = z_j$, la función $\varphi(z)$ también es regular en el punto $z = z_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. De aquí se deduce que $\varphi(z)$ es una función

analítica en todos los puntos del plano, es decir, es una función entera. Pero en un entorno del punto del infinito $\varphi(z)$ se puede representar en la forma:

$$\varphi(z) = f(z) - g_0(z) - [g_1(z) + \ldots + g_n(z)],$$

y como el desarrollo de Laurent de la diferencia $f(z) - g_0(z)$ según las potencias de z no contiene potencias positivas de z y cada una de las funciones comprendidas entre corchetes es regular en el punto $z = \infty$, la función $\varphi(z)$ es regular en el punto $z = \infty$.

Pero una función entera que tiene un punto regular en el punto del infinito, es idénticamente constante.

Así, pues,

$$f(z) - \sum_0^{\infty} g_j(z) \equiv \text{const} - c,$$

de donde

$$f(z) = c + \sum_0^{n} g_j(z), \qquad (3.1:2)$$

es decir, $f(z)$ es la suma de una cantidad finita de funciones racionales y, por consiguiente, ella misma es una función racional.

Es obvio que también es válida la proposición inversa a la demostrada, puesto que una función racional o es regular en el punto del infinito, o tiene en el mismo un polo.

Por lo tanto, hemos descubierto una propiedad característica de la función racional: *una función meromorfa es racional cuando, y sólo cuando, el punto del infinito es para la misma o un punto regular o un polo.*

La fórmula (3.1:2) obtenida proporciona la expresión de una función racional arbitraria $f(z)$ en forma de una suma de funciones racionales, tales que cada una de ellas tiene un solo polo en el plano ampliado (∞ para $g_0(z)$ y z_j para $g_j(z)$). Estas funciones son las partes principales de los desarrollos de Laurent de $f(z)$ en los entornos de sus polos. Cada una de éstas se expresa en forma de una suma de potencias $\left(\text{de } z \text{ o de } \frac{1}{z - z_j}\right)$, denominadas **fracciones simples**; el desarrollo hallado se llama **desarrollo de la función racional en fracciones simples**.

Ya veremos a continuación que se pueden obtener desarrollos similares según las partes principales para cualquier función meromorfa.

3.2. En un entorno de un polo ζ de orden ν la función $f(z)$ admite un desarrollo

$$f(z) = \frac{A_{-\nu}}{(z-\zeta)^{\nu}} + \frac{A_{-\nu+1}}{(z-\zeta)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-\zeta} + A_0 + A_1(z-\zeta) + \ldots,$$

donde la función racional $\frac{A_{-\gamma}}{(z-\zeta)^{\gamma}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-\gamma}$ representa la parte principal de $f(z)$ en el punto ζ.

Demostremos que, tanto los polos de una función meromorfa como las partes principales referentes a los mismos pueden darse *a priori*, de modo que siempre existen funciones meromorfas que poseen unos polos y unas partes principales en los mismos, previamente asignados.

Teorema de Mittag-Leffler. *Sea $\{\zeta_n\}$ una sucesión de números complejos, distintos entre sí, que no decrecen en valor absoluto, convergente hacia el infinito, y sea $\{G_n(z)\}$ una sucesión de funciones racionales, cada una de las cuales es de la forma*

$$G_n(z) = \frac{A_{-\gamma_n}^{(n)}}{(z-\zeta_n)^{\gamma_n}} + \ldots + \frac{A_{-1}^{(n)}}{z-\zeta_n},$$

de modo que el punto ζ_n es un polo de la función $G_n(z)$ de orden γ_n y ésta no posee más polos. Entonces existe una función meromorfa $f(z)$ que tiene polos en los puntos ζ_n, y sólo en estos puntos, y cuyas partes principales en los puntos ζ_n coinciden con las funciones dadas $G_n(z)$.

Demostración. La función buscada $f(z)$ la obtendremos en forma de la suma de una serie

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} [G_k(z) + P_k(z)], \tag{3.2:1}$$

donde $P_k(z)$ son ciertos polinomios. Evidentemente, cualquiera que sea el polinomio $P_k(z)$, la suma $G_k(z) + P_k(z)$ es una función racional con un polo en el punto ζ_k y cuya parte principal coincide con $G_k(z)$. En los puntos finitos del plano esta función no tiene otros polos.

Demostremos que se pueden elegir los polinomios $P_n(z)$ de tal modo, que en cualquier círculo $|z| < R$ sea uniformemente convergente la serie $\sum_{N(R)+1}^{\infty} [G_k(z) + P_k(\zeta)]$, que resulta de la serie (3.2:1) al excluir unos cuantos términos primeros. Supongamos que $\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_k$ es una serie convergente de términos positivos. Si $\zeta_1 = 0$, entonces suponemos que el polinomio correspondiente $P_1(z)$ es igual a cero. Supongamos ahora que $\zeta_k \neq 0$ $(k \geqslant 1)$. Como $G_k(z)$ es una función analítica en el círculo $|z| < |\zeta_k|$, su desarrollo de Taylor

$$G_k(z) = A_0^{(k)} + A_1^{(k)} z + \ldots + A_n^{(k)} z^n + \ldots$$

es convergente en el interior del círculo indicado y es uniformemente convergente en el círculo $|z| \leqslant \frac{1}{2} |\zeta_k|$. Elijamos $n = n_k$ de tal modo que en el último círculo se cumpla la desigualdad

$$|G_k(z) - [A_0^{(k)} + \ldots + A_{n_k}^{(k)} z^{n_k}]| < \varepsilon_k,$$

y hagamos:

$$P_k(z) = -A_0^{(k)} - \ldots - A_{n_k}^{(k)} z^{n_k}.$$

Entonces

$$|G_k(z) + P_k(z)| < \varepsilon_k, \quad \text{si} \quad |z| \leqslant \frac{1}{2} |\zeta_k|. \tag{3.2:2}$$

Sea $|z| < R$ un círculo arbitrario con el centro en el origen de coordenadas y sea $N(R) + 1$ el índice, comenzando desde el cual todos los puntos ζ_k están situados fuera de un círculo de radio doblemente mayor:

$$|\zeta_k| > 2R \text{ para } k > N(R). \tag{3.2:3}$$

Consideremos la serie

$$\sum_{N(R)+1}^{\infty} [G_k(z) + P_k(z)]; \tag{3.2:4}$$

todos los polos ζ_k de sus términos satisfacen a la condición (3.2:3), por lo cual $\frac{1}{2} |\zeta_k|$ es superior a R y, por consiguiente, el círculo $|z| < R$ está contenido en cada uno de los círculos $|z| < \frac{1}{2} |\zeta_k|$. Por esto, en virtud de (3.2:2), se puede afirmar que

$$|G_k(z) + P_k(z)| < \varepsilon_k, \quad \text{si} \quad |z| < R \text{ y } k > N(R).$$

De aquí se deduce que la serie (3.2:4) es absoluta y uniformemente convergente en el círculo $|z| < R$ y, por consiguiente, representa en este círculo una función analítica $\varphi_R(z)$. Por lo tanto, para la elección hecha de los polinomios $P_k(z)$, la suma de la serie (3.2:1) también será analítica en el círculo $|z| < R$. Esta puede escribirse en la forma

$$f(z) = \sum_{0}^{N(R)} [G_k(z) + P_k(z)] + \varphi_R(z),$$

de donde se deduce que los polos de la función $f(z)$ en el círculo $|z| < R$ coinciden con los términos de la sucesión $\{\zeta_k\}$ que están situados en el círculo; además, las partes principales de la función $f(z)$ en los puntos ζ_k coinciden con $G_k(z)$.

Como esta conclusión es válida para cualquier círculo $|z| < R$, de aquí se deduce que la suma de la serie (3.2:1) es una función

meromorfa que satisface a todas las condiciones propuestas en el teorema. El teorema de Mittag — Leffler queda demostrado.

De éste, como consecuencia, se deduce la siguiente proposición:

T e o r e m a. *Una función meromorfa arbitraria $f(z)$ que posee la sucesión de polos $\{\zeta_k\}$ y la sucesión de las partes principales correspondientes $\{G_k(z)\}$, se puede expresar en forma de una serie*

$$f(z) = g(z) + \sum_{1}^{\infty} [G_k(z) + P_k(z)], \tag{3.2:5}$$

donde $g(z)$ es una función entera y $P_k(z)$ son ciertos polinomios.

Para demostrarlo, construyamos, según el teorema de Mittag — Leffler, una función meromorfa $\varphi(z)$ que tenga los mismos polos y las mismas partes principales que la función $f(z)$; obtendremos

$$\varphi(z) = \sum_{1}^{\infty} [G_k(z) + P_k(z)].$$

Es obvio que la diferencia $f(z) - \varphi(z)$ representa una función $g(z)$ que es analítica en todos los puntos finitos del plano, es decir, una función entera. De aquí que

$$f(z) = g(z) + \varphi(z) = g(z) + \sum_{1}^{\infty} [G_k(z) + P_k(z)]$$

Obsérvese que, como se deduce de la demostración del teorema de Mittag—Leffler, en cada círculo $|z| < R$ la serie $\sum_{N(R)+1}^{\infty} [G_k(z) + P_k(z)]$ es uniformemente convergente. (Para hablar de la convergencia y, en particular, de la convergencia uniforme de la serie (3.2:5), se deben separar de ella una cantidad finita de los términos primeros que tengan polos en el círculo considerado).

Como una ilustración sencilla del teorema de Mittag — Leffler, resolvamos mediante el mismo el problema siguiente:

Sea $\{\zeta_k\}$ una sucesión de números complejos distintos, no decrecientes en valor absoluto, que converge hacia el infinito, y sea $\{A_k\}$ una sucesión arbitraria de números complejos; se pide construir una función entera $\varphi(z)$ que tome los valores A_k en los puntos ζ_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

Para la resolución, construyamos primero, aplicando el teorema de Weierstrass, una función entera $h(z)$ que tenga polos simples en los puntos ζ_k y sólo en estos puntos:

$$h(z) = \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\zeta_k}\right) \exp\left(\frac{z}{\zeta_k} + \ldots + \frac{z^k}{k\zeta_k^k}\right),$$

y calculemos los valores de su derivada $h'(z)$ en los puntos ζ_k. Obtenemos una sucesión de números $\{h'(\zeta_k)\}$ distintos de cero. Por otra parte, basándose en el teorema de Mittag — Leffler, hallamos una función meromorfa $\varphi(z)$ que tenga polos simples en los puntos $\{\zeta_n\}$, y sólo en ellos, con las partes principales correspondientes $\dfrac{\frac{A_k}{h'(\zeta_k)}}{z-\zeta_k}$.

Tendremos:

$$\varphi(z)=\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{\frac{A_k}{h'(\zeta_k)}}{z-\zeta_k}+P_k(z)\right],$$

donde $P_k(z)$ son unos polinomios elegidos adecuadamente.

Está claro que el producto $h(z)\,\varphi(z)$ representa entonces una función entera $f(z)$ que satisface a las condiciones del problema:

$$f(\zeta_k)=\lim_{z\to\zeta_k}[h(z)\,\varphi(z)]=\lim_{z\to\zeta_k}\left[\frac{h(z)-h(\zeta_k)}{z-\zeta_k}\,\varphi(z)\,(z-\zeta_k)\right]=\frac{h'(\zeta_k)\,A_k}{h'(\zeta_k)}=A_k$$

$$(k=1,\,2,\,\ldots).$$

3.3. En algunos casos particulares los desarrollos de las funciones meromorfas que se obtienen según el teorema de Mittag — Leffler pueden sustituirse por otros más sencillos. Antes, en las aplicaciones de la teoría de los residuos (ap. 4.2, cap. IV), ya vimos unos cuantos ejemplos. Consideremos aquí algunas aplicaciones de la fórmula de Weierstrass a las funciones enteras. Supongamos, por ejemplo, que se necesita construir una función meromorfa $f(z)$ que tenga polos simples en los puntos de una sucesión $\{\zeta_k\}$ ($\zeta_k\neq 0$), con las partes principales correspondientes $\dfrac{1}{z-\zeta_k}$.

Construyamos según el teorema de Weierstrass una función entera $\varphi(z)$ que tenga ceros simples en los puntos ζ_k:

$$\varphi(z)=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\zeta_k}\right)\exp[P_k(z)],$$

donde $P_k(z)=\dfrac{z}{\zeta_k}+\ldots+\dfrac{z^k}{k\zeta_k^k}$. En el caso particular en que la sucesión $\{\zeta_n\}$ posee un exponente de convergencia finito τ y, por consecuencia, existe el mayor número entero $\varkappa$ para el cual la serie $\sum_{1}^{\infty}\dfrac{1}{|\zeta_k|^{\varkappa}}$ es divergente, en lugar de $P_k(z)$ se pueden tomar polino-

mios $P_{\varkappa}(z)$ de un mismo grado $\varkappa$:

$$P_k(z)=\frac{z}{\zeta_k}+\ldots+\frac{z^{\varkappa}}{\varkappa\zeta_k^{\varkappa}}$$

Entonces, en cada círculo fijado $|z|<R$, donde la serie

$$\sum_{N(R)+1}^{\infty}\left[\ln\left(1-\frac{z}{\zeta_k}\right)+P_k(z)\right]$$

es absoluta y uniformemente convergente, se tiene:

$$\operatorname{Ln}[\varphi(z)]=\sum_{1}^{N(R)}\left[\operatorname{Ln}\left(1-\frac{z}{\zeta_k}\right)+P_k(z)\right]+$$
$$+\sum_{N(R)+1}^{\infty}\left[\ln\left(1-\frac{z}{\zeta_k}\right)+P_k(z)\right],$$

de donde

$$f(z)=\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\sum_{1}^{N(R)}\left[\frac{1}{z-\zeta^k}+P_k'(z)\right]+\sum_{N(R)+1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\zeta_k}+P_k'(z)\right]=$$
$$=\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\zeta_k}+P_k'(z)\right].$$

Está claro que $f(z)=\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ es una función meromorfa con polos simples en los puntos ζ_k y con las partes principales correspondientes $\frac{1}{z-\zeta_k}$. Los polinomios que garantizan la convergencia de la serie tienen aquí una forma muy simple

$$P_k'(z)=\frac{1}{\zeta_k}+\frac{z}{\zeta_k^2}+\ldots+\frac{z^{k-1}}{\zeta_k^k},$$

y en el caso particular en que existe el número entero mayor $\varkappa$ para el cual es divergente la serie $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\zeta_k|^{\varkappa}}$ (y, por consiguiente, es convergente la serie $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\zeta_k|^{\varkappa+1}}$), se puede tomar:

$$P_k'(z)=\frac{1}{\zeta_k}+\frac{z}{\zeta_k^2}+\ldots+\frac{z^{\varkappa-1}}{\zeta_k^{\varkappa}}.$$

La función $F(z)$ más general que resuelve el problema planteado se puede expresar en la forma

$$F(z)=g(z)+\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\zeta_k}+\frac{1}{\zeta_k}+\frac{z}{\zeta_k^2}+\ldots+\frac{z^{\nu_k-1}}{\zeta_k^{\nu_k}}\right], \quad (3.3:1)$$

donde $g(z)$ es una función entera y $\nu_k = \varkappa$ o $\nu_k = k$, según que la sucesión $\{\zeta_k\}$ posea un exponente de convergencia finito o no.

Construyamos también una función meromorfa que tenga polos de segundo orden en los puntos ζ_k con las partes principales correspondientes $\frac{1}{(z-\zeta_k)^2}$. Con este fin, derivemos término a término la serie obtenida anteriormente (la cual, como se deduce del método de su obtención, es uniformemente convergente en cualquier círculo $|z|<R$, si no se tienen en cuenta una cantidad finita de términos de la serie que tienen polos en el interior del círculo). Resulta:

$$F'(z)=g'(z)+\sum_{1}^{\infty}\left[-\frac{1}{(z-\zeta_k)^2}+\frac{1}{\zeta_k^2}+\frac{2z}{\zeta_k^3}+\ldots+\frac{(\nu_k-1)\,z^{\nu_k-2}}{\zeta_k^{\nu_k}}\right].$$

Está claro que la función $\Phi(z)=-F'(z)$ satisface a las condiciones del problema. Designando la función entera $g'(z)$ mediante $h(z)$, tendremos:

$$\Phi(z)=h(z)+\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-\zeta_k)^2}-\frac{1}{\zeta_k^2}-\frac{2z}{\zeta_k^3}-\ldots-\frac{(\nu_k-1)\,z^{\nu_k-2}}{\zeta_k^{\nu_k}}\right].$$

Examinemos, en particular, el caso en que la serie $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\zeta_k|^3}$ es convergente. Entonces se puede hacer $\nu_k = 2$ $\left(\text{independientemente}\right.$ de que la serie $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{|\zeta_k|^2}$ sea divergente o convergente), y tendremos.

$$\Phi(z)=h(z)+\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-\zeta_k)^2}-\frac{1}{\zeta_k^2}\right]. \quad (3.3:2)$$

Naturalmente, para la obtención de las fórmulas indicadas no había necesidad de aplicar la fórmula de Weierstrass. Se podría haber buscado inmediatamente la función en la forma

$$g(z)=\sum_{2}^{\infty}\left(\frac{1}{z-\zeta_k}+P_k(z)\right)$$

(en el primer problema) o en la forma

$$h(z) + \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-\zeta_k)^2} + P_k(z) \right)$$

(en el segundo problema) eligiendo después los polinomios $P_k(z)$ de modo que quede garantizada la convergencia de las series.

3.4. Consideremos un recinto G del plano ampliado, (para precisar, que no contenga en su interior al punto $z = \infty$), y en el mismo, una sucesión de puntos distintos $\{\zeta_k\}$ cuyos puntos de acumulación todos pertenezcan a la frontera del recinto G. Supongamos, además, que se ha dado una sucesión de funciones racionales $\{g_n(z)\}$, cada una de las cuales tiene en el plano ampliado un polo único en el punto ζ_n de orden γ_n:

$$g_n(z) = \frac{A_{-\gamma_n}^{(n)}}{(z-\zeta_n)^{\gamma_n}} + \ldots + \frac{A_{-1}^{(n)}}{z-\zeta_n}.$$

Demostremos que *existe una función $f(z)$, uniforme y analítica en el recinto G, a excepción de los puntos $\{\zeta_n\}$, tal que en cada uno de los puntos ζ_n tiene un polo de orden γ_n con la parte principal $g_n(z)$* Esta proposición, perteneciente también a Mittag — Leffler, representa, evidentemente, una generalización del teorema del ap. 3.2, que corresponde al caso en que el recinto G es todo el plano finito, de modo que la frontera de G se reduce a un punto: al del infinito.

Sea ρ_n la distancia desde ζ_n hasta la frontera Γ del recinto G. Si G no coincide con el plano finito (lo cual se va a suponer), entonces $0 < \rho_n < +\infty$. Sin restringir generalidad se puede exigir que se cumpla la condición $\lim \rho_n = 0$. Para ello es suficiente cambiar adecuadamente la numeración de los puntos $\{\zeta_n\}$. Primero hay que numerar de nuevo aquellos que distan de Γ no menos que 1, después todos los restantes para los cuales esta distancia no es menor que 1/2, luego aquellos para los cuales la distancia hasta Γ no es menor que 1/3, etc.

Designemos con a_n el punto de Γ más próximo a ζ_n (si hay unos cuantos, se toma uno de ellos). Entonces $|\zeta_n - a_n| = \rho_n$ y en el recinto $|\zeta - a_n| > \rho_n$ la función $g_n(z)$, la cual se anula en el punto $z = \infty$, se puede desarrollar en una serie de Laurent de la forma:

$$g_n(z) = \frac{C_1^{(n)}}{z-a_n} + \frac{C_2^{(n)}}{(z-a_n)^2} + \ldots \tag{3.4:1}$$

Fijemos una sucesión de números positivos $\{\varepsilon_n\}$ tal que la serie $\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_n$ sea convergente. Como la serie (3.4:1) es uniformemente con-

vergente para $|z - a_n| \geqslant 2\rho_n$, existen unos números m_n tales que

$$\left| g_n(z) - \sum_{j=1}^{m_n} \frac{C_j^{(n)}}{(z-a_n)^j} \right| < \varepsilon_n \quad \text{para} \quad |z-a_n| \geqslant 2\rho_n. \qquad (3.4{:}2)$$

Formemos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ g_n(z) - \sum_{j=1}^{m_n} \frac{C_j^{(n)}}{(z-a_n)^j} \right\}. \qquad (3.4{:}3)$$

Sea F un subconjunto cerrado acotado arbitrario del recinto G y sea ρ la distancia entre F y Γ. Entonces, para $n > N(\rho)$ tendremos $\rho_n < \frac{\rho}{2}$ y, por consiguiente, todos los puntos de F pertenecen al recinto $|z - a_n| > 2\rho_n$; $a_n \in \Gamma$. Por ello, para $n > N(\rho)$ se cumplen las desigualdades (3.4:2) en todos los puntos de F. Por lo tanto la serie (3.4:3) es uniformemente convergente en cada $F \subset G$ y representa en el recinto G una función uniforme y analítica $f(z)$ con los polos en los puntos ζ_n y con las partes principales correspondientes $g_n(z)$. El teorema queda demostrado.

De éste se puede deducir una generalización del teorema de Weierstrass respecto de la existencia de una función entera con los ceros asignados. Precisamente, se verifica el siguiente teorema:

Para toda sucesión de puntos $\{\zeta_n\}$ perteneciente al recinto G y que no tenga puntos de acumulación en el interior de G, y para cada sucesión de números naturales $\{\lambda_n\}$, existe una función $h(z)$ uniforme y analítica en el recinto G, cuyos ceros coinciden con los puntos $\{\zeta_n\}$ y cada cero ζ_n es de orden λ_n.

Conservando las notaciones del teorema precedente, construyamos una función $f(z)$ que tenga los polos en los puntos ζ_n con las partes principales correspondientes $g_n = \frac{\lambda_n}{z-\zeta_n}$. En este caso, el desarrollo (3.4:1) se reduce a la progresión geométrica

$$g_n(z) = \lambda_n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\zeta_n - a_n)^{j-1}}{(z-a_n)^j}.$$

Eligiendo los números correspondientes m_n, obtenemos:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[\frac{1}{z-\zeta_n} - \sum_{j=1}^{m_n} \frac{(\zeta_n - a_n)^{j-1}}{(z-a_n)^j} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\left[\frac{1}{z-\zeta_n} - \frac{1}{z-a_n} \right) - \sum_{j=1}^{m_n - 1} \frac{(\zeta_n - a_n)^j}{(z-a_n)^{j+1}} \right].$$

Si el punto $z_0 \in G$ es distinto de los puntos $\{\zeta_n\}$, entonces, integrando desde z_0 hasta z en el recinto G, resulta:

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left[\ln \left(\frac{z_0 - a_n}{z - a_n} \cdot \frac{z - \zeta_n}{z_0 - \zeta_n} \right) + R_n(z) - R_n(z_0) \right] + 2\pi i \nu(z),$$

donde $R_n(z) = \sum_{j=1}^{m_n - 1} \frac{1}{j} \left(\frac{\zeta_n - a_n}{z - a_n} \right)^j$ y $\nu(z)$ es un número entero. Hagamos finalmente:

$$h(z) = \exp \varphi(z) = \prod_{1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{z_0 - a_n}{z - a_n} \cdot \frac{z - \zeta_n}{z_0 - \zeta_n} \right) \exp\left[R_n(z) - R_n(z_0)\right] \right\}^{\lambda_n}. \tag{3.4:4}$$

La función $h(z)$ satisface a todas las condiciones del teorema. En efecto, del método de su construcción se deduce que el producto infinito es uniformemente convergente en el interior del recinto G, y son ceros del mismo solamente los puntos ζ_n, teniendo cada uno de éstos el orden asignado λ_n.

A una función $F(z)$ que puede expresarse en el recinto G en forma del cociente de dos funciones uniformes y analíticas en este recinto, $G(z)$ y $H(z)$, la llamaremos m e r o m o r f a e n e s t e r e c i n t o. Está claro que las funciones que hasta ahora las llamábamos meromorfas son funciones meromorfas en todo el plano (finito).

Si $F(z)$ es meromorfa en G, entonces no puede tener aquí otros puntos singulares más que polos. Como estos polos tienen que estar contenidos entre los ceros de la función $H(z)$ $\left(F(z) = \frac{G(z)}{H(z)}\right)$, éstos no tienen ningún punto de acumulación en el recinto G. De aquí se deduce que los polos de la función F forman un conjunto finito o numerable de puntos del recinto G. Para convencerse de esto último es suficiente numerar primero todos los polos que distan de la frontera Γ no menos que 1, después los restantes que distan de Γ no menos que 1/2, etc.

Demostremos que cualquier función $f(z)$ que no tenga en el recinto G otros puntos singulares más que polos, es meromorfa en este recinto. Obsérvese primero que el conjunto de polos no puede tener ningún punto de acumulación en el interior de G, puesto que tal punto de acumulación tendría que ser un punto singular no aislado de la función $f(z)$, en contra de la suposición de que $f(z)$ tiene solamente puntos singulares aislados en el interior del recinto G. Si el conjunto de polos es finito y consta de los puntos $\zeta_1, \ldots$

. . ., ζ_n de órdenes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, entonces, formando el polinomio $p(z) = (z - \zeta_1)^{\alpha_1} \ldots (z - \zeta_n)^{\alpha_n}$ y multiplicándole por $f(z)$, resulta una función $g(z) = f(z)\,p(z)$ que es analítica en todos los puntos del recinto G. Por lo tanto, $f(z) = \frac{g(z)}{p(z)}$ es una función meromorfa en el recinto G. Si el conjunto de polos de la función $f(z)$ es infinito, entonces, según lo observado anteriormente, éste es un conjunto numerable $\{\zeta_n\}$ que no tiene puntos de acumulación en el interior del recinto G. Sean $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n, \ldots$ los órdenes de los polos. Formemos entonces una función $h(z)$, analítica en el recinto G, que tenga en cada punto ζ_n un cero de orden γ_n y que no tenga ningún cero distinto de los puntos ζ_n. Entonces el producto $f(z)\,h(z)$ será una función $g(z)$ analítica en el recinto G, y de nuevo tendremos que $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ es una función meromorfa en el recinto G.

De lo demostrado se deduce que *la función meromorfa en un recinto dado se puede definir también como una función que no tiene en este recinto otros puntos singulares más que polos, posiblemente*

§ 4. FUNCION GAMMA

4.1. **La función Gamma** $\Gamma(z)$ es la más simple e importante entre el conjunto infinito de funciones meromorfas, mediante las cuales se extiende el concepto de factorial $n!$ al caso de números complejos arbitrarios z. Por ciertas causas históricas esta función, introducida en la ciencia por Euler, se define de tal modo que el valor $n!$ resulta para $z = n + 1$, o sea, $\Gamma(n+1) = n!$. Por consiguiente, la relación característica para el factorial

$$n \cdot (n-1)! = n!$$

se escribe para la función Gamma así:

$$n\Gamma(n) = \Gamma(n+1).$$

Además, para $\Gamma(1)$ debe ser:

$$\Gamma(1) = 0! = 1.$$

Construyamos esta función, exigiendo ante todo que satisfaga a la relación

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

para todos los valores complejos de z. Así, pues, en la definición de la función Gamma partiremos de la ecuación funcional

$$zf(z) = f(z+1), \quad f(1) = 1. \qquad (4.1:1)$$

No obstante, esta condición todavía no es suficiente para definir completamente la función. En efecto, si $f_0(z)$ es alguna función meromorfa para la cual

$$zf_0(z) = f_0(z+1), \quad f_0(1) = 1,$$

entonces para la razón $\varphi(z) = \frac{f(z)}{f_0(z)}$ obtenemos:

$$\varphi(z) = \varphi(z+1), \quad \varphi(1) = 1$$

es decir, $\varphi(z)$ es una función meromorfa de período 1 que toma el valor 1 para $z = 1$.

Tomando tal función arbitrariamente, representamos cualquiera de las funciones $f(z)$ que satisfacen (4.1:1) en la forma:

$$f(z) = \varphi(z) f_0(z).$$

Apliquemos la relación (4.1:1) a los valores $z, z+1, \ldots, z+n-1$ (n es un número natural) y multipliquemos las igualdades obtenidas; hallaremos:

$$z(z+1)\ldots(z+n-1)f(z) = f(z+n). \tag{4.1:2}$$

De aquí, para $z = 1$ obtenemos:

$$f(n+1) = n!, \tag{4.1:3}$$

es decir, en los puntos $z = 2, 3, \ldots, n+1, \ldots$ los valores de $f(z)$ coinciden con los valores de los factoriales: $1!, 2!, \ldots, n!, \ldots$ (esto es cierto también para $z = 1$, puesto que $f(1) = 1 = 0!$). Si en la relación (4.1:2) z tiende a $-(n-1) = -m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), resulta:

$$\lim_{z\to -m} (z+m) f(z) = \frac{f(1)}{(-1)^m m!} = \frac{(-1)^m}{m!} \tag{4.1:4}$$

Por lo tanto, $f(z)$ tiene que tener polos simples en todos los puntos $z = -m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) con los residuos iguales a $\frac{(-1)^m}{m!}$

Sometamos $f(z)$ a la condición complementaria

$$f(z) \textit{ no tiene polos distintos de } z = -m$$
$$(m = 0, 1, 2, \ldots), \textit{ y no tiene ceros.} \tag{4.1:5}$$

Si alguna función $f_0(z)$ satisface a las dos condiciones (4.1:1) y (4.1:5), entonces la función $\frac{\operatorname{tg}(i+2\pi z)}{\operatorname{tg} i} f_0(z)$, por ejemplo, satisface a (4.1:1), pero no satisface a (4.1:5), puesto que ésta tiene un conjunto infinito de ceros y polos imaginarios. Sin embargo, junto con $f_0(z)$ satisface a las mismas condiciones (4.1:1) y (4.1:5) toda

función de la forma $\varphi(z) f_0(z)$, donde $\varphi(z)$ es una función entera de período 1, que toma el valor 1 en el punto $z = 1$ y carece de ceros.

Así, pues, a pesar de haber introducido la condición (4.1:5), todavía queda cierta arbitrariedad en la construcción de la función Gamma. No obstante, aplicando esta condición se puede afirmar que la función

$$F(z) = \frac{1}{f(z)} \qquad (4.1:6)$$

es entera y tiene ceros simples en los puntos $z = -m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$), no teniendo otros ceros más que los indicados.

Por ello, ésta puede expresarse en la forma siguiente:

$$F(z) = e^{g(z)} z \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}, \qquad (4.1:7)$$

donde $g(z)$ es una función entera (al elegir los factores $e^{-\frac{z}{m}}$ que garantizan la convergencia del producto se ha tenido en cuenta que la serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$ es convergente). Por consiguiente, toda función meromorfa $f(z)$ que satisface a las condiciones (4.1:1) y (4.1:5) tiene que tener la forma:

$$f(z) = e^{-g(z)} \frac{1}{z \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}}. \qquad (4.1:8)$$

Evidentemente, ésta satisface a la condición (4.1:5), independientemente de como se elija la función entera $g(z)$. Para estudiar la condición (4.1:1), expresemos la fórmula (4.1:8) en la forma:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-g(z)}}{z \prod_{1}^{n} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \exp\left[-g(z) + \sum_{1}^{n} \frac{z}{m}\right]}{z(z+1)\ldots(z+n)} \qquad (4.1:9)$$

Haciendo para abreviar

$$\frac{n! \exp\left[-g(z) + \sum_{1}^{n} \frac{z}{m}\right]}{z(z+1)\ldots(z+n)} = f_n(z).$$

obtenemos:

$$\frac{zf(z)}{f(z+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{zf_n(z)}{f_n(z+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(z+n+1)\exp\left[-g(z)+g(z+1)-\sum_1^n\frac{1}{m}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z+1}{n}\right)\exp\left[-g(z)+g(z+1)-\left(\sum_1^n\frac{1}{m}-\ln n\right)\right]$$

$$=\exp\{-g(z)+g(z+1)-C\}$$

Aquí C denota la constante conocida de Euler

$$C=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_1^n\frac{1}{m}-\ln n\right)=0{,}5772\ldots$$

En resumen, si se exige que la función entera $g(z)$ cumpla la condición

$$g(z+1)-g(z)=C+2k\pi i \quad (k \text{ es un número entero}),$$

quedará satisfecha la ecuación funcional (4.1:1).

Además, de la condición $f(1)=1$ se deduce que

$$1=\lim_{n\to\infty}f_n(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{\exp\left[-g(1)+\sum_1^n\frac{z}{m}-\ln n\right]}{1+\frac{1}{n}}=\exp(-g(1)+C).$$

de donde

$$g(1)=C+2l\pi i \quad (l \text{ es un número entero}).$$

Entre las funciones enteras que satisfacen a las condiciones halladas, la más simple es la función lineal entera

$$g_0(z)=Cz.$$

Efectuando precisamente esta sencillísima elección de la función $g(z)$, quedará definida completamente la función Gamma. Designando esta última mediante $\Gamma(z)$, según la fórmula (4.1:8) tendremos:

$$\Gamma(z)=e^{-Cz}\frac{1}{z\prod_1^\infty\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}}}. \qquad (4.1:9)$$

Para la función entera $\frac{1}{\Gamma(z)}$ resulta:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz} z \prod_{1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right) e^{-\frac{z}{m}} . \qquad (4.1:10)$$

Como aquí el exponente de convergencia τ de la sucesión de ceros es igual a 1 y el grado del polinomio Cz también es igual a 1, tendremos que, según el teorema del ap. 2.4, el orden de esta función es igual a 1.

Los relieves de las funciones $\Gamma(z)$ y $\frac{1}{\Gamma(z)}$, representados en las figuras 37 y 38 *), dan una idea visible del comportamiento de estas funciones.

De la fórmula (4.1:10) se deduce una relación importante que liga $\Gamma(z)$ y $\operatorname{sen} \pi z$:

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right) =$$

$$= -\frac{z}{\pi} \cdot \left[\pi z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{\pi^2 z^2}{m^2 \pi^2}\right)\right] = -\frac{z \operatorname{sen} \pi z}{\pi} . \qquad (4.1:11)$$

o bien

$$\frac{1}{\Gamma(z)[-z\Gamma(-z)]} = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi} .$$

Pero, según la fórmula (4.1:1), $-z\Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$, por lo cual

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi} ,$$

o sea,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi z} \qquad (4.1:11')$$

De aquí, en particular, resulta:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi,$$

y como en la fórmula (4.1:9') $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$, se tiene:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \qquad (4.1:12)$$

---

*) Los dibujos se han adaptado de las «Tablas de funciones» de Jahnke y Emde.

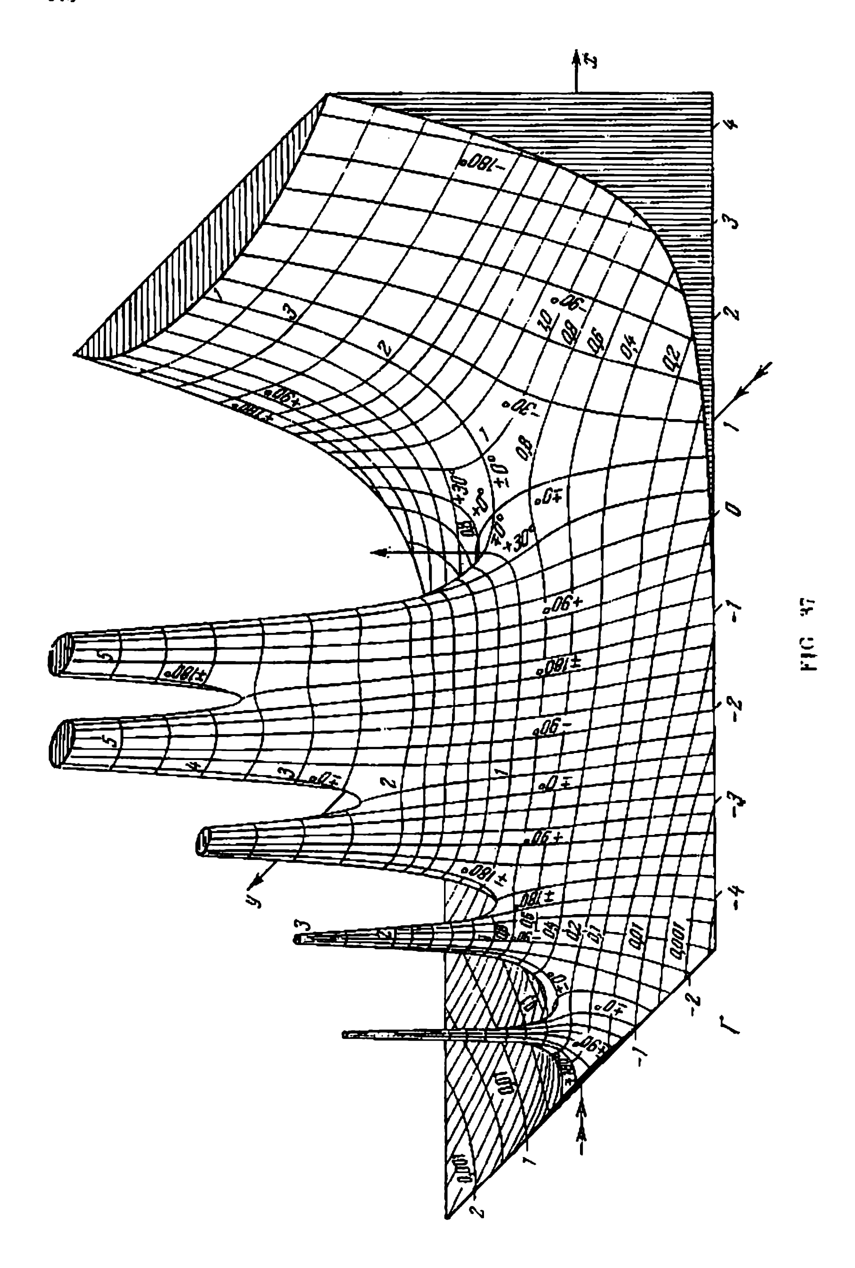


FIG. 37

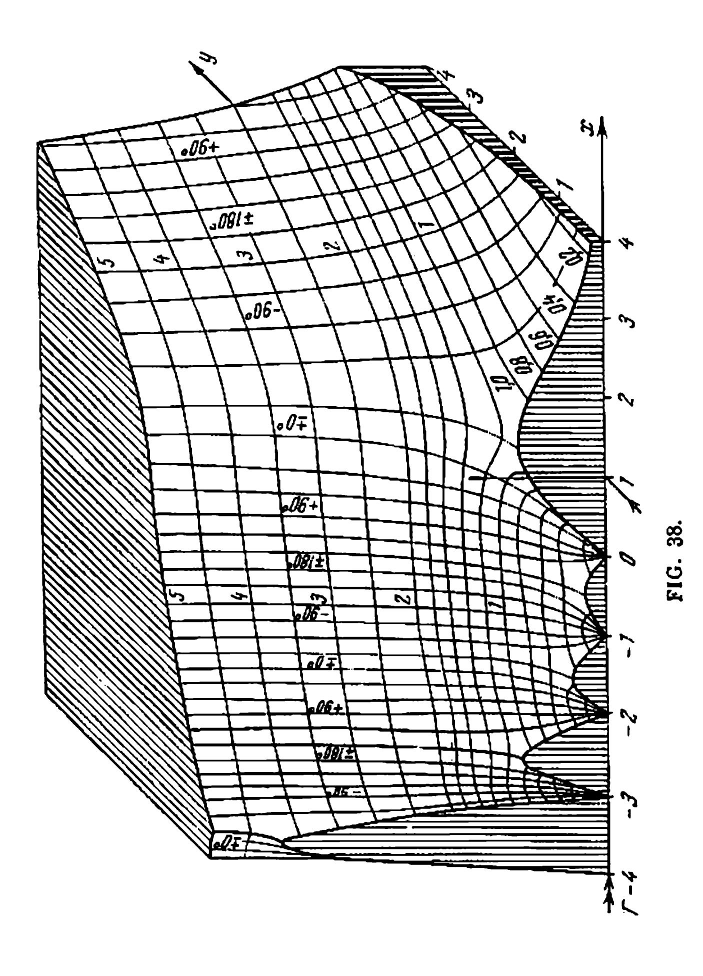


FIG. 38.

La fórmula (4.1:9) para $g(z) = Cz$ proporciona la siguiente expresión para la función Gamma:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \exp\left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{m} - C\right) z}{z(z+1)\ldots(z+n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \exp\left[\left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{m} - \ln n - C\right) + \ln n\right] z}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

y como

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{m} - \ln n - C\right) = 0 \text{ y } \exp(z \ln n) = n^z, \quad \text{resulta:}$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}. \qquad (4.1:13)$$

Esta fórmula fue obtenida por primera vez por Euler y por ello debe llevar su nombre (en los libros de estudio, ordinariamente, figura con el nombre de Gauss).

4.2. En este apartado se expondrán las expresiones integrales más importantes de la función Gamma. Demostremos ante todo que para $\operatorname{Re} z > 0$ se verifica la fórmula

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad (4.2:1)$$

donde la integración se efectúa a lo largo de la parte positiva del eje real. Esta fórmula también pertenece a Euler (integral euleriana de segunda especie).

Consideremos la integral

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad (4.2:2)$$

donde t^{z-1} denota $\exp[(z-1)\ln t]$. Como

$$|e^{-t} t^{z-1}| = e^{-t} \cdot t^{x-1},$$

esta integral es absolutamente convergente para cada z perteneciente al recinto D: $x = \operatorname{Re} z > 0$. Además, la función $\int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$ está uniformemente acotada en el interior del recinto D, es decir, en cada conjunto acotado y cerrado de puntos de este recinto. De

aquí y como $e^{-t}t^{z-1}$ es una función entera de z para cada t, $0 < t < < \infty$, sacamos la conclusión, según el ap. 1.2, cap. cuarto, t. I, que $F(z)$ es una función analítica en el semiplano D. Antes de demostrar la igualdad (4.2:1), demostremos la relación auxiliar:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt. \tag{4.2:3}$$

Efectuando la sustitución de la variable de integración $t = n\tau$ en la integral $F_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt$, obtenemos:

$$F_n(z) = n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1}\,d\tau$$

o bien, después de n integraciones por partes:

$$F_n(z) = \frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1}\,d\tau = \frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

Pero de aquí se deduce que la fórmula (4.2:3) coincide con la fórmula (4.1:13) (para $\operatorname{Re} z > 0$) y, por consiguiente, es justa. Ahora no queda más que demostrar que

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z), \quad z \in D$$

o bien que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\,dt = 0, \quad z \in D \tag{4.2:4}$$

$\left(\text{puesto que } F(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n e^{-t}t^{z-1}\,dt\right)$.

Observando que para $|t| < n$:

$$1 + \frac{t}{n} \leqslant e^{\frac{t}{n}} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{t}{n}},$$

obtenemos:

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t \ \text{ y } \ \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t};$$

por consiguiente,

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left[1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] \leqslant e^{-t}\left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right] =$$
$$= e^{-t}\frac{t^2}{n^2}\left[1 + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n-1}\right] \leqslant \frac{t^2e^{-t}}{n}.$$

Por lo tanto,

$$\left|\int_0^n \left[e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\,dt\right| < \frac{1}{n}\int_0^n e^{-t}t^{x+1}\,dt < \frac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t}t^{x+1}\,dt,$$

de donde se deduce (4.2:4). Así pues, la relación (4.2:1) queda demostrada.

Representemos la fórmula (4.2:1) en la forma siguiente:

$$\Gamma(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt,\quad \operatorname{Re} z>0. \tag{4.2:5}$$

Sustituyendo en la primera de las integrales del segundo miembro la función e^t por su desarrollo en serie de potencias e integrando término a término, obtenemos:

$$\varphi(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\,dt=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}\,dt=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,(n+z)}. \tag{4.2:6}$$

Hemos establecido esta fórmula para $\operatorname{Re} z>0$. Pero la serie obtenida es absoluta y uniformemente convergente en cada recinto acotado, del que se han excluido los puntos 0, -1, -2, ... Por lo tanto, ésta representa una función $\varphi(z)$ uniforme y analítica en todo el plano finito, a excepción de los puntos 0, -1, -2, ..., en los cuales tiene polos simples. Por consiguiente, $\varphi(z)$ es una función meromorfa. Está claro que el residuo de $\varphi(z)$ respecto del polo $-m$ es igual a $\frac{(-1)^m}{m!}$, es decir, coincide con el residuo de $\Gamma(z)$ respecto del mismo polo. Por consiguiente, la diferencia $\Gamma(z)-\varphi(z)$ es una función entera. Pero de la fórmula (4.2:5) se deduce que en el recinto D esta diferencia se expresa por la integral $\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$. Mas esta integral, como fácilmente se observa, es absolutamente convergente para cualquier z y representa una función entera en todo el plano finito. Así, pues, para cualquier z se tiene:

$$\Gamma(z)=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt. \tag{4.2:7}$$

El paso de la fórmula (4.2:5) a la fórmula (4.2:7) se funda en la sustitución de la expresión integral de la función meromorfa $\varphi(z)$, que es convergente solamente en el semiplano D, por su desarrollo en fracciones simples, el cual es convergente en todo el plano. Evidentemente, la fórmula (4.2:7) *representa el desarrollo en fracciones simples de la función* $\Gamma(z)$.

Deduzcamos otra expresión integral más para $\Gamma(z)$. Designemos con G el recinto cuya frontera es la parte negativa del eje real (incluyendo el punto $z=0$), y consideremos la integral

$$\psi_n(z) = \int\limits_{\gamma_n^{(\varepsilon)}} e^t t^{-z}\,dt, \qquad (4.2:8)$$

donde el contorno γ_n consta del segmento del semieje negativo $-n \leqslant t \leqslant -\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, de la circunferencia $|z| = \varepsilon$, recorrida en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, y, finalmente, del mismo segmento del eje negativo, recorrido en dirección del punto $t = -\varepsilon$ hacia el punto $t = -n$. Aquí se distingue el segmento $-n \leqslant t \leqslant -\varepsilon$, recorrido por primera vez, del mismo segmento recorrido por segunda vez, considerándole alternativamente como el borde inferior o superior de un corte efectuado a lo largo del semieje negativo. Definiendo la función t^{-z} en el recinto G según la fórmula $t^{-z} = \exp(-z\ln t)$, suponemos que en los puntos del borde inferior del corte $t^{-z} = \exp(-z\ln|t| + i\pi z)$ y en los puntos del borde superior $t^{-z} = \exp(-z\ln|t| - i\pi z)$.

En estas condiciones, la fórmula (4.2:8) determina una función uniforme y analítica en todo el plano finito, es decir, una función entera. Es obvio que la sucesión $\{\psi_n(z)\}$ es uniformemente convergente en cada recinto acotado del plano, puesto que para $|z| < R$ se tiene:

$$|\psi_{n+p}(z) - \psi_n(z)| \leqslant \left| \int\limits_{-(n+p)}^{-n} \exp(t - z\ln|t| + i\pi z)\,dt - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{-(n+p)}^{-n} \exp(t - z\ln|t| - i\pi z)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{-(n+p)}^{-n} \exp(t - x\ln|t| + \pi|y|)\,dt =$$

$$= 2\int\limits_{n}^{n+p} e^{-t}t^{-x}e^{\pi|y|}\,dt < 2e^{\pi R}\int\limits_{n}^{n+p} e^{-t}t^{R}\,dt,$$

de donde se deduce la convergencia uniforme de esta sucesión. Por esta razón $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(z) = \psi(z)$ es una función entera que se expresa por la integral impropia

$$\psi(z) = \int\limits_{\gamma^{(\varepsilon)}} e^t t^{-z}\,dt, \qquad (4.2:9)$$

donde $\gamma^{(\varepsilon)}$ consta de la semirrecta $-\infty < t \leqslant -\varepsilon$, de la circunferencia $|z| = \varepsilon$ y otra vez más de la misma semirrecta recorrida en sentido contrario.

Demostremos que $\psi(z)$ no depende de ε; en efecto, la diferencia de dos integrales (4.2:9), tomadas a lo largo de $\gamma^{(\varepsilon)}$ y $\gamma^{(\eta)}$ $(\varepsilon > \eta > 0)$, se expresa por la integral $\int e^t t^{-z}\,dt$ tomada a lo largo del circuito cerrado que consta de dos circunferencias $|z| = \varepsilon$ y $|z| = \eta$ y del segmento $-\varepsilon \leqslant t \leqslant -\eta$ que una estos puntos, doblemente recorrido. En virtud del teorema integral de Cauchy, esta integral es igual a cero (es suficiente representar la integral en forma de la suma de dos integrales, tomadas a lo largo de los semianillos en que el circuito considerado se divide por la parte positiva del eje real, y aplicar después el teorema a cada semianillo por separado). De aquí que la integral (4.2:9) no depende de ε.

Supongamos ahora que $x < 1$ y $|t| = \varepsilon e^{i\varphi}$, donde $\varepsilon < 1$, y que ε tiende a cero. Entonces, como $|e^t t^{-z}| = \exp\left(\varepsilon\cos\varphi + x\ln\frac{1}{\varepsilon} + \varphi y\right) < \varepsilon^{-x}e^{1+\pi|y|}$, se tiene: $\left|\int\limits_{|z|=\varepsilon} e^t t^{-z}dz\right| < 2\pi\varepsilon^{1-x}e^{1+\pi|y|} \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.

Por consiguiente, $\psi(z)$ para $\operatorname{Re} z < 1$ puede expresarse en la forma

$$\psi(z) = \int\limits_{\gamma^{(0)}} e^t t^{-z}\,dt,$$

donde $\gamma^{(0)}$ es la parte negativa del eje real recorrida dos veces en sentidos opuestos. Precisando,

$$\psi(z) = \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(t - z\ln|t| + z\pi i)\,dt - \int\limits_{-\infty}^{0} \exp(t - z\ln|t| - z\pi i)\,dt =$$

$$= e^{z\pi i}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}t^{-z}\,dt - e^{-z\pi i}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}t^{-z}\,dt = (e^{z\pi i} - e^{-z\pi i})\int\limits_{0}^{\infty} e^{-t}t^{(1-z)-1}\,dt.$$

Como, para $\operatorname{Re} z < 1$, se tiene: $\operatorname{Re}(1 - z) > 0$, resulta según la fórmula (4.2:1) que la integral $\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{(1-z)-1}\,dt$ es igual a $\Gamma(1 - z)$.

Por consiguiente,

$$\psi(z) = 2i\operatorname{sen}\pi z\,\Gamma(1 - z);$$

según la fórmula (4.1:11′), esta relación puede escribirse en la forma

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\psi(z)}{2\pi i}.$$

Esta última fórmula se ha demostrado solamente para $\operatorname{Re} z < 1$; pero, como ambas funciones $\frac{1}{\Gamma(z)}$ y $\frac{\psi(z)}{2\pi i}$ son enteras, esta igualdad tiene que subsistir en todo el plano finito. Reemplazando $\psi(z)$ por la expresión integral (4.2:9), la cual es válida para todos los valores de z, hallamos:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^{(\varepsilon)}} e^t t^{-z}\, dt. \tag{4.2:10}$$

Sustituyendo aquí z por $1-z$ y aplicando la fórmula (4.1:11'), obtenemos:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i \operatorname{sen} \pi z} \int_{\gamma^{(\varepsilon)}} e^t t^{z-1}\, dt. \tag{4.2:11}$$

Obsérvese que para cualquier α, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, el circuito $\gamma^{(\varepsilon)}$ se puede cambiar por el circuito $\gamma^{\varepsilon}(\alpha)$ que consta del rayo rectilíneo

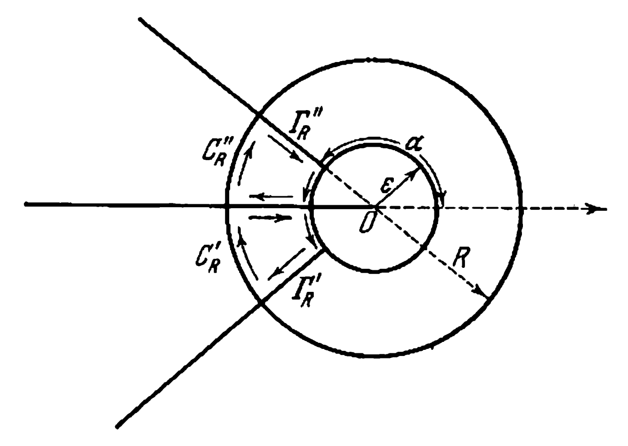


FIG. 39.

$\arg t = -\alpha$, $|t| \geqslant \varepsilon$, del arco de la circunferencia $|z| = \varepsilon$ que se define por la condición $|\arg t| \leqslant \alpha$, y del rayo rectilíneo $\arg t = \alpha$, $|t| \geqslant \varepsilon$, que es simétrico al primero respecto del eje real.

Comprobemos esto para la fórmula (4.2:10). La integral $\frac{1}{2\pi i} \int e^t t^{-z} dt$, tomada a lo largo de cada uno de los circuitos cerrados Γ_R' y Γ_R'' que tienen la forma de rectángulos curvilíneos

(fig. 39), es igual a cero. Por otra parte, las integrales $\frac{1}{2\pi i}\int e^t t^{-z}\,dt$, tomadas a lo largo de cada uno de los dos arcos C'_R y C''_R de la circunferencia $|t| = R$, que forman parte de Γ'_R y Γ''_R, tienden a cero cuando $R \to \infty$, puesto que en estos arcos se tiene:

$$|e^t t^{-z}| = \exp(R\cos\theta - x\ln R + y\theta) \leqslant$$
$$\leqslant \exp[-R\cos(\pi-\alpha) - x\ln R + 2\pi|y|].$$

Pasando al límite para $R \to \infty$ en las relaciones

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'_R} e^t t^{-z}\,dt = 0 \ \text{ y } \ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma''_R} e^t t^{-z}\,dt = 0,$$

obtenemos que la integral $\frac{1}{2\pi i}\int e^t t^{-z}\,dt$, tomada a lo largo del camino formado por el borde inferior del corte $-\infty < t \leqslant -\varepsilon$ y el arco de la circunferencia $|t| = \varepsilon$ determinado por la desigualdad $-\pi \leqslant \arg t \leqslant -\alpha$, es igual a la integral de la misma función tomada a lo largo del rayo $\arg t = -\alpha$, $|t| \geqslant \varepsilon$. Resulta una circunstancia similar para el camino que consta del borde superior del corte $-\infty \leqslant t \leqslant \varepsilon$ y del arco de la circunferencia $|t| = \varepsilon$, $\pi \geqslant \arg t \geqslant \alpha$ y del rayo $\arg t = \alpha$, $|t| \geqslant \varepsilon$.

De aquí que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{(\varepsilon)}} e^t t^{-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{(\varepsilon)}(\alpha)} e^t t^{-z}\,dt$$

para todos los z, es decir,

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^{(\varepsilon)}(\alpha)} e^t t^{-z}\,dt. \qquad (4.2{:}10')$$

Análogamente

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i\,\operatorname{sen}\pi z}\int\limits_{\gamma^{(\varepsilon)}(\alpha)} e^t t^{z-1}\,dt. \qquad (4.2{:}11')$$

4.3. Estudiemos aquí el comportamiento asintótico de la función Gamma. Previamente nos hará falta una relación elemental existente entre las sumas e integrales, que representa un caso particular de la fórmula de sumación de Euler.

Sea $f(t)$ una función, definida y continua para $t \geqslant 0$ junto con su derivada primera. Entonces, para cualquier número natural k,

se tiene:

$$f(k)-\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt=f(k)-\int_{k-1}^{k} f(t)\,d\left(t-k+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=f(k)-\frac{f(k)+f(k-1)}{2}+\int_{k-1}^{k} f'(t)\left(t-k+\frac{1}{2}\right)dt.$$

Sea $[t]$ la parte entera de t y sea $t-[t]=\{t\}$ la parte fraccionaria de t; entonces, para $k>t\geqslant k-1$, se tiene: $k=[t]+1$ y $t-k+\frac{1}{2}=\{t\}-\frac{1}{2}$. Evidentemente, $\{t\}-\frac{1}{2}$ es una función periódica de período 1, la cual es continua para todos los valores de t que no son iguales a números enteros y satisface a la desigualdad

$$-\frac{1}{2}\leqslant\{t\}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}.$$

Sustituyendo bajo el signo de la integral $\left(t-k+\frac{1}{2}\right)$ por $\{t\}-\frac{1}{2}$ (los valores de estas dos funciones son distintos solamente para $t=k$, lo cual no influye en el valor de la integral), obtenemos:

$$f(k)-\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt=\frac{f(k)-f(k-1)}{2}+\int_{k-1}^{k} f'(t)\left[\{t\}-\frac{1}{2}\right]dt.$$

Sumando las igualdades obtenidas para $k=1, 2, \ldots, n$, resulta:

$$\sum_{1}^{n} f(k)-\int_{0}^{n} f(t)\,dt=\frac{f(n)-f(0)}{2}+\int_{0}^{n} f'(t)\left[\{t\}-\frac{1}{2}\right]dt,$$

o bien

$$\sum_{0}^{n} f(k)-\int_{0}^{n} f(t)\,dt=\frac{f(0)+f(n)}{2}+\int_{0}^{n} f'(t)\left[\{t\}-\frac{1}{2}\right]dt. \qquad (4.3:1)$$

Esta es la igualdad que necesitábamos.

Apliquemos ahora la fórmula de Euler (4.1:13)

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)},$$

donde $n^z=\exp(z\ln n)$; resulta:

$$\ln\frac{1}{\Gamma(z)}=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}(\ln(z+k)-\ln(1+k))-(z-1)\ln n+2\pi i m_n\right],$$

donde m_n son números enteros

Suponiendo que el punto z está fijo y que no está situado en el semieje negativo (incluyendo también en el mismo el origen de coordenadas), apliquemos la fórmula (4.3:1) a la función $\ln(z+t)$; obtendremos:

$$\sum_0^n \ln(z+k) - \int_0^n \ln(z+t)\,dt = \frac{\ln(z)+\ln(z+n)}{2} + \int_0^n \frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{z+t}\,dt$$

o bien $\left(\text{observando que } \int_0^n \ln(z+t)\,dt = (z+n)\ln(z+n) - z\ln z - n\right)$

$$\sum_0^n \ln(z+k) = \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\ln(z+n) -$$

$$-\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - n + \int_0^n \frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{z+t}\,dt.$$

Hagamos aquí $z=1$ y restemos término a término la igualdad obtenida de la igualdad dada; obtendremos:

$$\sum_0^n (\ln(z+k) - \ln(1+k)) = \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\ln(z+n) -$$

$$-\left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(1+n) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z + \int_0^n \frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{z+t}\,dt - \int_0^n \frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{1+t}\,dt.$$

Por consiguiente,

$$\ln\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(z+n+\frac{1}{2}\right)\ln(z+n) - \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(1+n) -\right.$$

$$\left. -\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - (z-1)\ln n + I_n(z) - I_n(1) + 2\pi i m_n\right], \quad (4.3:2)$$

donde 72

$$I_n(z) = \int_0^n \frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{z+t}\,dt.$$

Escribamos en la forma que sigue el conjunto de términos entre corchetes que contienen logaritmos dependientes de n:

$$(z-1)\,[\ln(z+n) - \ln n] + \left(n+\frac{3}{2}\right)[\ln(z+n) - \ln(1+n)] =$$

$$= (z-1)\int_n^{z+n}\frac{dz}{z} + \left(n+\frac{3}{2}\right)\int_{1+n}^{z+n}\frac{dz}{z} = (z-1)\int_1^{1+z}\frac{d\zeta}{\zeta+n-1} + \int_1^z \frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)d\zeta}{\zeta+n},$$

donde la integración se puede extender, por ejemplo, a lo largo de segmentos rectilíneos. De aquí que todo este conjunto de términos tiende a $(z-1)$ cuando $n \to \infty$.

Transformemos ahora la expresión de $I_n(z)$.

Obsérvese con este fin que

$$\int_{k-1}^{k}\left(\{t\}-\frac{1}{2}\right)dt=\int_{k-1}^{k}\left(t-k+\frac{1}{2}\right)dt=0,$$

y, por consiguiente,

$$\varphi(t)=\int_{0}^{t}\left(\{t\}-\frac{1}{2}\right)dt=\int_{[t]}^{t}\left(\{t\}-\frac{1}{2}\right)dt=$$

$$=\int_{0}^{\{t\}}\left(\tau-\frac{1}{2}\right)d\tau=\frac{1}{2}\{t\}(\{t\}-1).$$

Por ello, $\varphi(t)$ es una función continua y periódica, de período 1, la cual toma valores reales que satisfacen a la desigualdad:

$$-\frac{1}{8}\leqslant\varphi(t)\leqslant 0.$$

Empleando a la integral $\int_0^n \frac{\{t\}-\frac{1}{2}}{z+t}dt$ el método de integración por partes, obtenemos:

$$I_n(z)=\frac{\varphi(t)}{z+t}\bigg|_0^n+\int_0^n\frac{\varphi(t)\,dt}{(z+t)^2}=\int_0^n\frac{\varphi(t)\,dt}{(z+t)^2},$$

de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty}I_n(z)=\int_0^\infty\frac{\varphi(t)\,dt}{(z+t)^2}.$$

Teniendo en cuenta lo dicho, se puede escribir la fórmula (4.3:2) en la forma

$$\ln\frac{1}{\Gamma(z)}=(z-1)-\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z+$$

$$+\int_0^\infty\frac{\varphi(t)\,dt}{(z+t)^2}-\int_0^\infty\frac{\varphi(t)\,dt}{(1+t)^2}+2\pi i m(z), \qquad (4.3:3)$$

donde $m(z)$ es un número entero.

Cerciorémonos primero que si g_δ: $x<\delta$, $|y|<\delta$ es una semifranja fijada de anchura 2δ que contiene a la parte negativa del

eje real, entonces, para todos los puntos z no pertenecientes a g_δ, se tiene:

$$\left|\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(z+t)^2}\right| \leqslant C'(\delta) < \infty. \qquad (4.3{:}4)$$

En efecto,

$$\left|\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(z+t)^2}\right| \leqslant \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{dt}{|z+t|^2} = \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^2+y^2}.$$

Si $x<\delta$ o $|y|\geqslant\delta$, entonces la última integral, que es igual a $\frac{1}{8|y|}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{x}{|y|}\right)$ es menor que $\frac{\pi}{8\delta}$; si $x\geqslant\delta$, entonces

$$\frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^2+y^2} \leqslant \frac{1}{8}\int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^2} = \frac{1}{8x} \leqslant \frac{1}{8\delta}.$$

Así, pues, queda demostrada la relación considerada y, además, para $C'(\delta)=\frac{\pi}{8\delta}$. De aquí se deduce que

$$\ln\frac{1}{|\Gamma(z)|} = \operatorname{Re}\left[\ln\frac{1}{\Gamma(z)}\right] = x-1-\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln|z|+y\arg z+C(z), \qquad (4.3{:}3')$$

donde $|C(z)|<\frac{\pi}{4\delta}$, si $z\overline{\in} g_\delta$.

En particular, esta fórmula se puede utilizar a lo largo de cualquier rayo fijado $\arg z=\alpha$, donde $0\leqslant|\alpha|<\pi$ (para $|z|$ suficientemente grandes). Por esta razón, a lo largo de tal rayo se tiene:

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{|\Gamma(z)|}}{|z|\ln|z|} = -\cos\alpha,$$

es decir,

$$\exp\{(-\cos\alpha+\varepsilon)|z|\ln|z|\} > \frac{1}{|\Gamma(z)|} > \exp\{(-\cos\alpha-\varepsilon)|z|\ln|z|\}$$

para todos los valores de $|z|$ suficientemente grandes. De aquí se deduce que la *función entera* $\frac{1}{\Gamma(z)}$, cuyo orden es igual a 1, *es de tipo maximal* ($\sigma=\infty$), es decir, para ésta no existen tales constantes positivas C y K de modo que se cumpla la desigualdad

$$\frac{1}{|\Gamma(z)|} < Ce^{K|z|}$$

para todos los valores de z.

Deduzcamos una cota para el módulo de $\frac{1}{|\Gamma(z)|}$ que sea válida para todos los valores de z de módulo suficientemente grande. Fijando un número $\delta > 0$ hallaremos por la fórmula (4.3:3') que en cualquier punto $z = \rho e^{i\alpha}$ situado fuera de la semifranja g_δ:

$$\ln \frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i\alpha})|} = \varphi_\rho(\alpha) + \frac{1}{2}\ln\rho + C(\rho e^{i\alpha}) - 1, \qquad (4.3:5)$$

donde

$$\varphi_\rho(\alpha) = -\rho(\ln\rho - 1)\cos\alpha + \rho\alpha \operatorname{sen}\alpha.$$

Acotemos $\max\limits_{[-\pi,+\pi]} \varphi_\rho(\alpha)$; se supondrá que ρ es suficientemente grande (en todo caso, $\rho > e^\pi$). Observando que $\varphi_\rho(\alpha)$ es una función par, examinemos su comportamiento en el segmento $[0, \pi]$. Se tiene: $\varphi_\rho'(\alpha) = \rho(\ln\rho \operatorname{sen}\alpha + \alpha\cos\alpha)$ y $\varphi_\rho(\pi) = -\varphi_\rho(0) = \rho(\ln\rho - 1)$; como $\varphi_\rho'(\pi) < 0$, se alcanza el $\max\limits_{[-\pi,\pi]} \varphi_\rho(\alpha) = \max\limits_{[0,\pi]} \varphi_\rho(\alpha)$ en un punto $\alpha_\rho \in (0, \pi)$. Fácilmente se observa que α_ρ es la única raíz de la ecuación

$$\ln\rho \operatorname{sen}\alpha_\rho + \alpha_\rho\cos\alpha_\rho = 0, \quad \text{o} \quad \operatorname{tg}\alpha_\rho = -\frac{\alpha_\rho}{\ln\rho}$$

en el intervalo $(0, \pi)$.

Hagamos $\alpha_\rho = \pi - \beta_\rho$, entonces

$$\operatorname{tg}\beta_\rho = \frac{\pi - \beta_\rho}{\ln\rho}.$$

de donde $0 < \beta_\rho < \frac{\pi}{\ln\rho}$, es decir, $\beta_\rho = \frac{\pi\vartheta_\rho}{\ln\rho}$, donde $0 < \vartheta_\rho < 1$. De la ecuación para β_ρ se deduce que $\lim\limits_{\rho\to\infty} \ln\rho \operatorname{tg}\beta_\rho = \pi$; por ello, $\lim\limits_{\rho\to\infty} \ln\rho\, \beta_\rho = \pi$, es decir, $\lim\limits_{\rho\to\infty} \vartheta_\rho = 1$. Por consiguiente, para cualquier $\varepsilon > 0$ se tiene $2\vartheta_\rho > 2 - \varepsilon$ si ρ es suficientemente grande. Obsérvese también que

$$\cos\beta_\rho = \left[1 + \frac{(\pi - \beta_\rho)^2}{(\ln\rho)^2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 + \frac{\pi^2}{(\ln\rho)^2}\left(1 - \frac{\vartheta_\rho}{\ln\rho}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{(\ln\rho)^2} + \frac{\pi^2\vartheta_\rho}{(\ln\rho)^3} + \ldots$$

Por lo tanto,

$$\max_{[-\pi,\pi]} \varphi_\rho(\alpha) = \varphi_\rho(\pi - \beta_\rho) =$$
$$= \rho\ln\rho\cos\beta_\rho\left[1 - \frac{1}{\ln\rho} + \frac{\pi^2}{(\ln\rho)^2}\left(1 - \frac{\beta_\rho}{\pi}\right)^2\right] =$$
$$= \rho\ln\rho\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{(\ln\rho)^2} + \frac{\pi^2\vartheta_\rho}{(\ln\rho)^3} + \ldots\right]\left[1 - \frac{1}{\ln\rho} + \right.$$
$$\left. + \frac{\pi^2}{(\ln\rho)^2} - \frac{2\pi^2\vartheta_\rho}{(\ln\rho)^3} + \ldots\right] =$$
$$= \rho\ln\rho\left[1 - \frac{1}{\ln\rho} + \frac{\pi^2}{2(\ln\rho)^2} - \frac{\pi^2(2\vartheta_\rho - 1)}{2(\ln\rho)^3} + \ldots\right] <$$
$$< \rho\ln\rho\left[1 - \frac{1}{\ln\rho} + \frac{\pi^2}{2(\ln\rho)^2} - \frac{\pi^2(1-\varepsilon)}{2(\ln\rho)^3}\right]$$

ara todos los valores de ρ suficientemente grandes. Por consiguiente,

$$\ln \frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i\alpha})|} < \rho \ln \frac{\rho}{e} + \frac{\pi^2 \rho}{2 \ln \rho} - \frac{\pi^2 \rho (1-\varepsilon_0)}{2 (\ln \rho)^2},$$

o sea,

$$\frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i\alpha})|} < \left(\frac{\rho}{e}\right)^{\rho} \exp\left[\frac{\pi^2}{2} \frac{\rho}{\ln \rho} - \frac{\pi^2 \rho (1-\varepsilon_0)}{2 (\ln \rho)^2}\right], \qquad (4.3:6)$$

donde $\varepsilon_0 = 2\varepsilon$, $z \bar{\in} g_\delta$ y ρ es suficientemente grande.

Supongamos ahora que $z = \rho e^{i\alpha} \in g_\delta$ siendo $\alpha = \rho \cos \alpha < -\delta$; entonces $\rho \mid \operatorname{sen} \alpha \mid < \delta$ y $-z = \rho e^{i(\alpha \pm \pi)} \bar{\in} g_\delta$. Empleemos la fórmula (4.1:11) de ésta se deduce que

$$\ln \frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i\alpha})|} = \ln \frac{1}{\pi} + \ln \rho + \ln |\operatorname{sen}(\pi \rho e^{i\alpha})| - \ln \frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i(\alpha \pm \pi)})|},$$

o bien, sustituyendo $\ln \frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i(\alpha \pm \pi)})|}$ por la fórmula: (4.3:5):

$$\ln \frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i\alpha})|} = \ln \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \ln \rho + \ln |\operatorname{sen}(\pi \rho e^{i\alpha})| - \varphi_\rho(\alpha \pm \pi) - C(\rho e^{i(\alpha \pm \pi)}) + 1.$$

Del análisis efectuado anteriormente queda claro que

$$\min_{[-\pi, \pi]} \varphi_\rho(\alpha) = -\rho (\ln \rho - 1), \quad \text{o sea,} \quad -\varphi_\rho(\alpha \pm \pi) \leqslant \rho (\ln \rho - 1).$$

Observando también que en el caso dado

$$|\operatorname{sen}(\pi \rho e^{i\alpha})| \leqslant \operatorname{ch}(\pi \rho \mid \operatorname{sen} \alpha \mid) \leqslant \operatorname{ch} \pi \delta,$$

obtenemos:

$$\ln \frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i\alpha})|} < \rho (\ln \rho - 1) + \frac{1}{2} \ln \rho + C_2(\delta)$$

para $z \in g_\delta$ y todos los valores $\rho = |z|$ suficientemente grandes. En otras palabras, en la semifranja g_ρ es válida la cota:

$$\frac{1}{|\Gamma(\rho e^{i\alpha})|} < C_3(\delta) \sqrt{\rho} \left(\frac{\rho}{e}\right)^{\rho}.$$

De aquí se deduce que la acotación (4.3:6) es aplicable también en el recinto g_δ, es decir, se puede aplicar la desigualdad (4.3:6) en todos los puntos del plano sin restricción alguna, si $|z| = \rho$ es suficientemente grande.

Volvamos a examinar la fórmula (4.3:3). Sea ε un número positivo menor que π; designemos con D_ε el recinto $|\arg z| < \pi - \varepsilon$; en este recinto

$$\lim_{z \to \infty} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)\, dt}{(z+t)^2} = 0. \qquad (4.3:7)$$

En efecto, para $\Delta > 0$ arbitrariamente grande se puede indicar un $R(\Delta, \varepsilon)$ tal que el punto z perteneciente a D_ε y situado fuera del círculo $|z| < R(\Delta, \varepsilon)$ estará también situado fuera de la

semifranja g_Δ (esto es consecuencia inmediata de que la parte g_Δ situada en D_ε representa un conjunto acotado). De aquí se deduce, según lo anterior, que

$$\left| \int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(z+t)^2} \right| < \frac{\pi}{8\Delta},$$

si $z \in D_\varepsilon$ y $|z'| > R(\Delta, \varepsilon)$; por consiguiente, la relación (4.3:7) es cierta.

Finalmente, calculemos la constante $\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(1+t)^2} = c_0$. Con este fin, obsérvese que según la fórmula (4.1:11)

$$\frac{1}{\Gamma(z)\,\Gamma(-z)} = -\frac{z \operatorname{sen} \pi z}{\pi},$$

de donde, para $z = iy$, resulta:

$$\frac{1}{\Gamma(iy)\,\Gamma(-iy)} = \frac{y \operatorname{sh} \pi y}{\pi}.$$

Pero $\Gamma(-iy) = \overline{\Gamma(iy)}$ (debido a que $\Gamma(z)$ toma valores reales para valores reales de z, como esto se deduce, por ejemplo, de la fórmula (4.1:9')); por esta razón, la relación obtenida se escribe así:

$$\frac{1}{|\Gamma(iy)|^2} = \frac{y \operatorname{sh} \pi y}{\pi}.$$

Haciendo en la fórmula (4.3:3) $z = iy$, $y > 0$, y separando en la misma las partes reales, obtenemos:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1}{|\Gamma(iy)|^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{y \operatorname{sh} \pi y}{\pi} \right) =$$

$$= -1 + \frac{1}{2} \ln y + \frac{\pi}{2} y + \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(iy+t)^2} \right] - c_0,$$

o sea

$$\frac{1}{2} \ln \frac{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}{e^{\pi y}} = -1 + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(iy+t)^2} \right] - c_0.$$

Pasando al límite para $y \to \infty$ y observando que, según lo demostrado anteriormente,

$$\lim_{y \to \infty} \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{(iy+t)^2} \right] = 0,$$

hallamos que

$$c_0 = \frac{1}{2} \ln 2\pi - 1.$$

Definitivamente, la fórmula (4.3:3) toma la forma

$$\ln \frac{1}{\Gamma(z)} = -\left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z + z - \frac{1}{2} \ln 2\pi + \int_0^\infty \frac{\varphi(t)\, dt}{(z+t)^2} + 2\pi i m(z). \quad (4.3:8)$$

Esta se llama **fórmula de Stirling**, y puede escribirse en la forma

$$\Gamma(z) = z^{z-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \exp\left[-z - \int_0^\infty \frac{\varphi(t)\, dt}{(z+t)^2}\right]. \quad (4.3:8')$$

Como en todo recinto de la forma D_ε la integral que figura entre corchetes tiende a cero, se tiene:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Gamma(z)}{z^{z-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \cdot e^{-z}} = 1, \quad z \in D_\varepsilon,$$

o bien, empleando la notación de la igualdad asintótica:

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}, \qquad z \in D_\varepsilon. \quad (4.3:8'')$$

Ordinariamente, cuando se habla de la fórmula de Stirling, se supone que se trata precisamente de esta última fórmula. Su importancia consiste en que ella proporciona una expresión asintótica de $\Gamma(z)$ mediante una combinación finita de funciones elementales. En particular, para $z = n + 1$ (n es natural) resulta $\Gamma(n + 1) = n!$ y, por consiguiente,

$$n! \sim \sqrt{2\pi} (n+1)^{n+\frac{1}{2}} e^{-n-1},$$

de donde, observando que $(n+1)^{n+\frac{1}{2}} = n^{n+\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \sim$ $\sim en^{n+\frac{1}{2}}$, obtenemos la expresión asintótica para el factorial

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (4.3:8''')$$

§ 5. FUNCIONES PERIODICAS

5.1. Las funciones periódicas forman una clase especial muy amplia de funciones meromorfas. Se dice que una función meromorfa $f(z)$ es **periódica** si existe un número ω, distinto de cero,

tal que

$$f(z+\omega)=f(z) \qquad (5.1:1)$$

para cualquier z (en particular, si la función tiene un polo en el punto z, entonces tiene que tener también un polo en el punto $z+\omega$). El número ω que posee la propiedad (5.1:1), se llama **período** de la función $f(z)$.

Sustituyendo z por $z-\omega$, de la fórmula (5.1:1) obtenemos:

$$f(z)=f(z-\omega)$$

para cualquier z. Así, pues, si ω es un período de la función $f(z)$, entonces $-\omega$ también es un período de esta función.

Sean ω_1 y ω_2 dos períodos de la función $f(z)$ (iguales o distintos entre sí). Entonces tendremos:

$$f(z+\omega_1+\omega_2)=f(z+\omega_1)=f(z),$$

de donde se deduce que $\omega_1+\omega_2$ también es un período de la función $f(z)$. En particular, si $\omega_2=-\omega_1$, se tiene que considerar que 0 también es un período de la función $f(z)$. Por inducción obtenemos que la suma $\omega_1+\ldots+\omega_n$ de cualquier número de períodos de la función $f(z)$ también es un período de esta función. De aquí se deduce que $\omega+\ldots+\omega=n\omega$ y $-\omega\ldots-\omega=-n\omega$ también son períodos de la función $f(z)$. En otras palabras, si ω es un período de $f(z)$, entonces cualquier entero múltiplo de ω también es un período de $f(z)$. El resultado general que sintetiza todas estas observaciones particulares consiste en lo siguiente: si $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *son períodos de la función* $f(z)$ *y* $m_1, \ldots, m_n$ *son unos números enteros, entonces* $m_1\omega_1+\ldots+m_n\omega_n$ *también es un período de* $f(z)$.

Demostremos que si $f(z)\not\equiv$ const, entonces, el *conjunto de todos los números complejos que son períodos de* $f(z)$ *no puede tener ningún punto de acumulación finito*. Suponiendo lo contrario, sea ω_0 un punto de acumulación del conjunto de períodos. Esto significa que existe una sucesión de períodos $\{\omega_n\}$, distintos entre sí, que converge hacia ω_0, por lo cual tendremos:

$$f(0)=f(\omega_1)=f(\omega_2)=\ldots=f(\omega_k)=\ldots,$$

es decir, $f(z)$ toma valores iguales entre sí en un conjunto de puntos que tiene un punto de acumulación finito ω_0, lo cual es imposible si $f(z)\not\equiv$ const.

Supongamos ahora que $\omega'\neq 0$ es algún período de una función $f(z)\not\equiv$ const. Entonces, también serán períodos todos los números de la forma $m\omega'$ ($m=0, \pm1, \pm2, \ldots$), los cuales están situados en una recta L que pasa por el origen de coordenadas y por el punto ω' (fig. 40). En virtud de todo lo expuesto, el segmento $[-\omega', \omega']$

de esta recta contiene solamente una cantidad finita de períodos de la función $f_1(z)$. Por lo tanto, tiene que haber en éste unos períodos ω_1 y $-\omega_1$, distintos de cero, que están más próximos al origen de coordenadas que los demás, los cuales, en particular, pueden coincidir con ω' y $-\omega'$. Así, pues, en recta L tenemos un segmento $[-\omega_1, \omega_1]$, dentro del cual no existe ningún período de $f(z)$ distinto de cero. Demostremos que cualquier período de la función $f(z)$ situado en esta misma recta es de la forma $n\omega_1$, donde n es un número entero. Supongamos lo contrario, y sea Ω un período que se representa por un punto de la recta considerada y que está situado entre

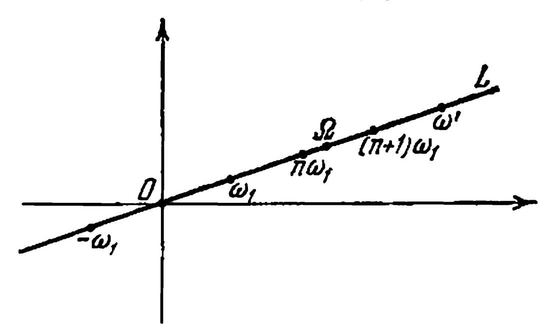


FIG. 40.

los puntos $n\omega_1$ y $(n+1)\omega_1$. Entonces $0 < |\Omega - n\omega_1| < |\omega_1|$, es decir, $\Omega - n\omega_1$ es un período de la función $f(z)$ que se representa por un punto interior del segmento $[-\omega_1, \omega_1]$ y es distinto de cero. Ha resultado una contradicción con la propiedad del último segmento, de donde se deduce que $\Omega = n\omega_1$.

Si todos los puntos de la función $f(z)$ se agotan con los números $n\omega_1$, entonces $f(z)$ se llama «monoperiódica» o «simplemente periódica» y el número ω_1 (o también $-\omega_1$), que posee la propiedad de que cualquier período de la función se expresa en forma de un entero múltiplo del mismo, se llama período fundamental *) de esta función.

La función exponencial e^z puede servir de ejemplo elemental de función monoperiódica. Su período fundamental es $2\pi i$ (o $-2\pi i$).

Supongamos ahora que $f(z)$ posee períodos que no están situados en la recta L. Sea ω_2' uno de ellos. Examinemos el triángulo D' con los vértices 0, ω_1 y ω_2 (fig. 41). Ya sabemos que el segmento $[0, \omega_1]$ no contiene otros períodos más que sus extremos 0 y ω_1. Si en el triángulo D' (en el interior o en sus lados) existen períodos

*) También se llama período primitivo. (*Nota del T*)

distintos de los vértices de D', entonces éstos no pertenecen al segmento $[0, \omega_1]$ y hay solamente una cantidad finita de ellos. Por consiguiente, entre los mencionados habrá al menos un punto ω_2 cuya distancia hasta la recta será mínima. De aquí se deduce que el triángulo D con los vértices 0, ω_1 y ω_2 ya no contiene ningún período distinto de sus vértices: 0, ω_1 y ω_2. Si lo completamos hasta un paralelogramo Δ con los vértices 0, ω_1, $\omega_1+\omega_2$ y ω_2, entonces en este paralelogramo tampoco habrá ningún período distinto de los vértices del paralelogramo. En efecto, suponiendo que ω es un período situado en Δ (dentro o en los lados) y distinto de 0, ω_1, $\omega_1+\omega_2$ y ω_2, construimos un paralelogramo con los vértices ω_1,

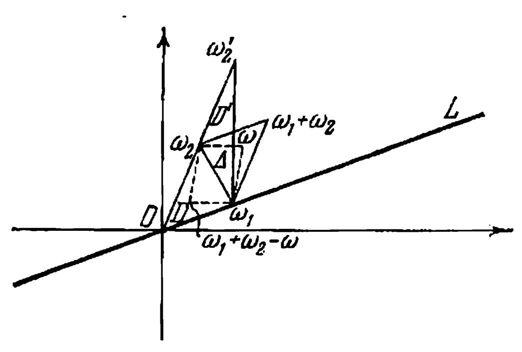


FIG. 41.

ω, ω_2 y $\omega_1+\omega_2-\omega$. El segmento $[\omega_1, \omega_2]$ es una de sus diagonales y, por consiguiente, uno de sus vértices ω, $\omega_1+\omega_2-\omega$ (cada uno de éstos es un período) caerá en uno y otro en el otro de los dos triángulos en que esta diagonal divide Δ. Ha resultado que en el triángulo D hay un período (ω o $\omega_1+\omega_2-\omega$) distinto de los vértices de este triángulo, lo cual contradice a la construcción de D.

Así, pues, en el caso estudiado existe un paralelogramo que contiene períodos solamente en los vértices: 0, ω_1, ω_2 y $\omega_1+\omega_2$. Demostremos que en este caso cualquier período de la función $f(z)$ puede expresarse en la forma $m_1\omega_1+m_2\omega_2$, donde m_1 y m_2 son números enteros. Con este fin, dividamos todo el plano en paralelogramos congruentes a Δ que no tengan puntos interiores comunes dos a dos y que no dejen sin cubrir ningún punto del plano (r e t í c u l o d e p a r a l e l o g r a m o s). Cada uno de los paralelogramos construidos Δ_{m_1, m_2} tendrá vértices de la forma $m_1\omega_1+m_2\omega_2$ («el ángulo inferior de la izquierda» del paralelogramo Δ_{m_1, m_2}), $(m_1+1)\omega_1+m_2\omega_2$, $m_1\omega_1+(m_2+1)\omega_2$ y $(m_1+1)\omega_1+(m_2+1)\omega_2$ («el ángulo superior de la derecha» del paralelogra-

mo $\Delta_{m_1m_2}$); además, cada punto de la forma $\mu_1\omega_1 + \mu_2\omega_2$ (μ_1 y μ_2 son números enteros) será un vértice común de cuatro paralelogramos del retículo. Si se supone que existe un período Ω distinto de cada uno de los vértices del retículo, entonces tiene que haber un paralelogramo $\Delta_{m_1m_2}$ al cual pertenece Ω (fig. 42). Como Ω no coincide con ninguno de los vértices del paralelogramo $\Delta_{m_1m_2}$, resulta

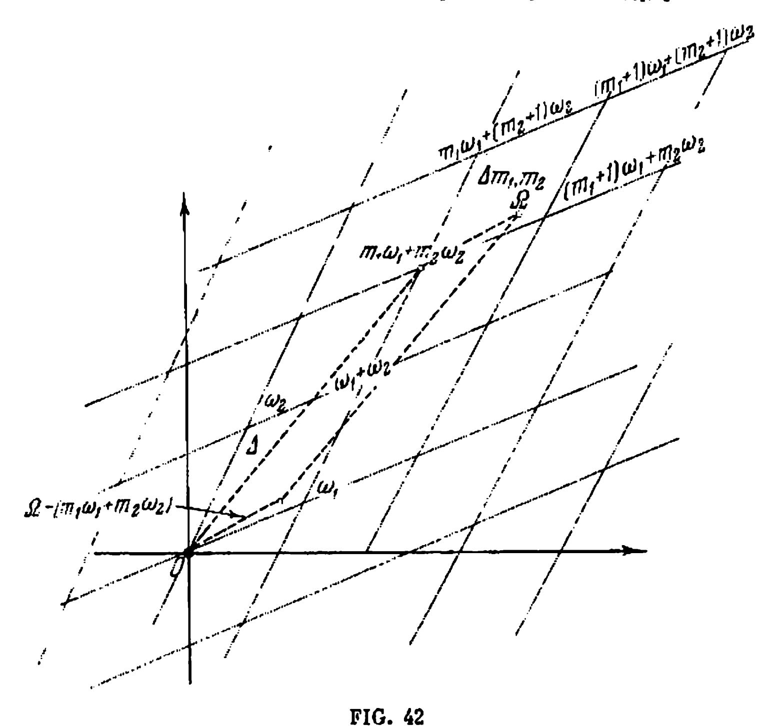


FIG. 42

que $\Omega - (m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$ es un período de la función $f(z)$ que pertenece al paralelogramo Δ y es distinto de sus vértices. De la contradicción obtenida se deduce que Ω coincide con uno de los vértices del retículo de paralelogramos:

$$\Omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2.$$

Por lo tanto, en el caso considerado existen dos períodos tales, que cualquier período de la función $f(z)$ se expresa en forma de una combinación lineal entera de estos dos períodos ω_1 y ω_2. La función

meromorfa correspondiente $f(z)$ se llama **doblemente periódica** o **elíptica**, los períodos ω_1 y ω_2 se llaman **períodos fundamentales** y el paralelogramo construido Λ se llama **paralelogramo fundamental de períodos**.

Fácilmente se observa que para una misma función doblemente periódica existe un conjunto infinito de pares de períodos fundamentales distintos entre sí, lo cual corresponde a un conjunto infinito de paralelogramos fundamentales distintos entre sí.

En efecto, supongamos que ω' y ω'' son dos períodos de la forma

$$\omega' = m_1'\omega_1 + m_2'\omega_2, \quad \omega'' = m_1''\omega_1 + m_2''\omega_2,$$

y que la expresión $m_1'm_2'' - m_1''m_2'$ es igual a ± 1.

Entonces, de estas igualdades tendremos:

$$\omega_1 = \pm (m_2''\omega' - m_2'\omega''), \quad \omega_2 = \pm (-m_1''\omega' + m_1'\omega''),$$

y, por consiguiente, cualquier período $\Omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ puede expresarse en forma de una combinación lineal de los períodos ω' y ω'' de coeficientes enteros:

$$\Omega = \pm [(m_1m_2'' - m_2m_1'')\,\omega' + (-m_1m_2' + m_2m_1')\,\omega''].$$

Por lo tanto, ω' y ω'' también representan un par de períodos fundamentales de la función $f(z)$. Está claro que existe un conjunto infinito de tales pares, puesto que existe un conjunto infinito de cuaternas de números enteros que satisfacen a la condición $m_1'm_2'' - m_1''m_2' = \pm 1$.

En este apartado nos hemos convencido que *las funciones periódicas meromorfas pueden ser o simple periódicas o doblemente periódicas (elípticas); otras clases más de funciones periódicas meromorfas no existen.*

5.2. Expongamos unas cuantas proposiciones que son válidas para cualquier función periódica meromorfa (simplemente o doblemente periódica).

Sea $\omega \neq 0$ un período de la función $f(z)$; a saber, el período fundamental si $f(z)$ es simplemente periódica, o uno de los períodos fundamentales si $f(z)$ es doblemente periódica.

Haciendo la sustitución de la variable $\zeta = \frac{2\pi}{\omega} z$, resulta una función meromorfa $F(\zeta) = f\left(\frac{\omega}{2\pi}\,\zeta\right)$ de período 2π. Por lo tanto, mediante una simple transformación, que se reduce a una rotación y una dilatación del plano z respecto del origen de coordenadas, el caso de una función de período arbitrario ω se reduce al caso de una función de período 2π.

Consideremos la función multiforme $\zeta = \frac{1}{i}$ Ln t, definida en el recinto G que se obtiene del plano t al excluir los puntos $t = 0$ y $t = \infty$. En cada punto $t \in G$ esta función posee un conjunto infinito numerable de valores que difieren dos a dos en enteros múltiplos de 2π. De aquí que $F\left(\frac{1}{i} \operatorname{Ln} t\right)$ es una función uniforme de t, definida en el recinto G. Hagamos

$$F\left(\frac{1}{i} \operatorname{Ln} t\right) = F^*(t) \qquad (5.2:1)$$

y cerciorémonos de que $F^*(t)$ es analítica en todo el recinto G, a excepción de algunos puntos, correspondientes a los polos de la función $F(\zeta)$, en los cuales $F^*(t)$ también tiene polos y, además, del mismo orden que $F(\zeta)$.

Sea ζ_0 uno de los valores de $\frac{1}{i}$ Ln t_0. En un entorno U del punto t_0, contenido en el recinto G, la función $\frac{1}{i}$ Ln t tiene una rama uniforme y analítica $\varphi_0(t)$ que se caracteriza completamente por el valor ζ_0 que toma en el punto t_0. Esta rama transforma U biunívocamente en cierto recinto $\varphi(U)$ del plano ζ que contiene en su interior al punto ζ_0. Si el punto ζ_0 es regular para $F(\zeta)$, entonces el entorno U se puede tomar tan pequeño que todos los puntos del entorno $\varphi_0(U)$ (el cual se contrae hacia ζ_0 cuando U se contrae hacia t_0) sean también regulares para $F(\zeta)$. Obtendremos que $F^*(t) = F[\varphi_0(t)]$ será analítica en U, como función analítica de una función analítica. Si ζ_0 es un polo de la función $F(\zeta)$, el entorno U se puede tomar tan pequeño que el punto ζ_0 sea el único polo de $F(\zeta)$ en el recinto $\varphi_0(U)$. Por consiguiente, $F^*(t) = F[\varphi_0(t)]$ será una función uniforme y analítica en todos los puntos del entorno U, a excepción de $t = t_0$. Pero $\lim_{t\to t_0} F^*(t) = \lim_{\zeta\to\zeta_0} F(\zeta) = \infty$; por lo tanto, t_0 es un polo de la función $F^*(t)$. No queda más que observar que si ζ_0 es un polo de orden k para $F(\zeta)$, de modo que $\lim (\zeta - \zeta_0)^k F(\zeta) = A$ $(\neq 0, \infty)$, entonces

$$\lim_{t\to t_0} (t-t_0)^k F^*(t) = \lim_{t\to t_0} \left[(\zeta-\zeta_0)^k F(\zeta) : \left(\frac{\zeta-\zeta_0}{t-t_0}\right)^k\right] =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \left\{(\zeta-\zeta_0)^k F(\zeta) : \left[\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\right]^k\right\} = A : [\varphi'(t_0)]^k \qquad (\neq 0, \infty)$$

$$\left(\varphi'(t_0) = \left(\frac{1}{i} \operatorname{Ln} t\right)'_{t=t_0} = \frac{1}{it_0} \neq 0, \infty\right).$$

De aquí se deduce que el punto t_0 es un polo de la función $F^*(t)$ del mismo orden k. Por lo tanto, hemos demostrado que $F^*(t)$ es una función meromorfa en el recinto G.

La fórmula (5.2:1) pone en correspondencia a cada función $F(\zeta)$ que es meromorfa en el plano y posee período 2π, una función $F^*(t)$ meromorfa en el recinto G.

Recíprocamente, dada arbitrariamente una función $\Phi^*(t)$, meromorfa en el recinto G, podemos ponerle en correspondencia mediante la transformación $t = e^{i\zeta}$ (recíproca respecto de la transformación $\zeta = \frac{1}{i}\,\mathrm{Ln}\,t$) la función $\Phi(\zeta) = \Phi^*(e^{i\zeta})$, la cual es meromorfa en el plano ζ y posee el período 2π.

A cada franja γ limitada por rectas paralelas al eje imaginario y de anchura 2π, la llamaremos f r a n j a d e p e r í o d o s de la función $F(\zeta)$. Como se sabe, la función $t = e^{i\zeta}$ transforma biunívoca y conformemente tal franja en el recinto Γ del plano t que se obtiene del plano excluyendo de éste un rayo rectilíneo Λ que une los puntos 0 y ∞ (véase el ap. 3.5, cap. II). Este rayo es la imagen de cada una de las dos rectas que limitan la franja.

Adjuntando al recinto Γ el rayo Λ, resulta todo el recinto G. De aquí se deduce que los valores que toma la función $F^*(t)$ en el recinto G coinciden con los valores que toma la función $F(\zeta)$ en cualquiera de las franjas de períodos g, a la cual hay que adjuntar además una de las rectas l que la limitan. En particular, el conjunto de polos de la función $F^*(t)$ coincidirá con el conjunto de las imágenes de los polos de la función $F(\zeta)$ que pertenecen solamente a una de las franjas de períodos g (a la cual se la han adjuntado los puntos de la recta l). Por lo tanto, $F^*(t)$ tendrá en todo el recinto G un conjunto finito o infinito de polos, según que sea finito o infinito el conjunto de polos de $F(\zeta)$ en la franja $g \cup l$.

Supongamos que $F(\zeta)$ tiene una cantidad finita de polos en cada franja $g \cup l$. Entonces $F^*(t)$ tiene una cantidad finita de polos en el recinto G y, por consiguiente, 0 y ∞ no serán puntos de acumulación de polos para $F^*(t)$. Por ello, éstos pueden ser solamente puntos regulares o singulares aislados de la función $F^*(t)$. De la relación $t = e^{i\zeta}$ se deduce que $|t| = e^{-\eta}$, es decir, t tiende a 0 cuando η tiende a ∞ (el e x t r e m o s u p e r i o r de la franja de períodos), y t tiende a ∞ cuando η tiende a $-\infty$ (el e x t r e m o i n f e r i o r de la franja de períodos). Por consiguiente, para averiguar el carácter del punto 0 (o ∞) para la función $F^*(t)$, es suficiente estudiar el comportamiento de la función $F(\zeta)$ cuando el punto ζ, manteniéndose en una de las franjas de períodos, tiende a su extremo superior (respectivamente, a su extremo inferior).

Son posibles los casos siguientes:

a) $F(\zeta)$ se mantiene acotada en valor absoluto cuando ζ tiende al extremo superior (inferior) de la franja. Entonces $F^*(t)$ queda acotada en valor absoluto cuando t tiende a 0 (respectivamente a ∞), y, por consiguiente, el punto $t = 0$ (o ∞) es regular para $F^*(t)$,

de modo que $F^*(t)$ es desarrollable en serie $F^*(t) = \sum_0^\infty \alpha_k t^k$ en un entorno $|t| < r$ del punto 0 (respectivamente, $F^*(t) = \sum_0^\infty \beta_k t^{-k}$ en un entorno $|t| > R$ del punto ∞). Por lo tanto, $F(\zeta)$ es desarrollable en serie $\sum_0^\infty \alpha_k e^{ik\zeta}$ en el semiplano $\eta > \ln \frac{1}{r}$ (respectivamente, en serie $\sum_0^\infty \beta_{-k} e^{-ik\zeta}$ en el semiplano $\eta < \ln \frac{1}{R}$).

b) $F(\zeta)$ tiende a ∞ cuando ζ tiende al extremo superior (inferior) de la franja. Entonces $F^*(t)$ también tiende a ∞ cuando $t \to 0$ $(t \to \infty)$, y, por consiguiente, el punto $t = 0$ $(t = \infty)$ es un polo para $F^*(t)$, de modo que $F^*(t)$ es desarrollable en serie $F^*(t) = \sum_{-m}^\infty \alpha_k t^k$ en un entorno $|t| < r$ del punto 0 (respectivamente $F^*(t) = \sum_{-m}^\infty \beta_{-k} t^{-k}$ en un entorno $|t| > R$ del punto ∞). Por ello, $F(\zeta)$ es desarrollable en serie $\sum_{-m}^\infty \alpha_k e^{ik\zeta}$ en el semiplano $\eta > \ln \frac{1}{r}$ (respectivamente, en serie $\sum_{-m}^\infty \beta_{-k} e^{-ik\zeta}$ en el semiplano $\eta < \ln \frac{1}{R}$).

c) $F(\zeta)$ no tiende hacia un límite finito o infinito cuando ζ tiende al extremo superior (inferior) de la franja. Entonces $F^*(t)$ tampoco tiende hacia un límite finito o infinito cuando $t \to 0$ $(t \to \infty)$ y, por consiguiente, el punto $t = 0$ (o $t = \infty$) es un punto singular esencial para $F^*(t)$, de modo que $F^*(t)$ es desarrollable en serie $F^*(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k t^k$ en un entorno $|t| < r$ del punto 0 (respectivamente, $F^*(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{-k} t^{-k}$ en un entorno $|t| > R$ del punto ∞). Por ello, $F(\zeta)$ es desarrollable en serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{ik\zeta}$ en el semiplano $\eta > \ln \frac{1}{r}$ (respectivamente, en serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_{-k} e^{-ik\zeta}$ en el semiplano $\eta < \ln \frac{1}{R}$).

Supongamos que $F(\zeta)$ es una función entera periódica. Entonces la función correspondiente $F^*(t)$ carece de puntos singulares en el recinto G y, por consiguiente, es desarrollable en este recinto en serie de Laurent:

$$F^*(t)=\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k t^k. \qquad (5.2:2)$$

Volviendo a la función $F(\zeta)$ mediante la sustitución $t=e^{i\zeta}$, obtenemos para esta función el desarrollo

$$F(\zeta)=\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ik\zeta}. \qquad (5.2:3)$$

La serie de Laurent (5.2:2) es uniformemente convergente en cada anillo circular $0 < r \leqslant |t| \leqslant R < \infty$. Como $|t| = |e^{i\zeta}| = e^{-\eta}$, y al anillo circular le corresponde en el plano ζ la franja $\ln r \leqslant -\eta \leqslant \ln R$ o $\ln \frac{1}{r} \geqslant \eta \geqslant \ln \frac{1}{R}$, limitada por rectas paralelas al eje real, la serie (5.2:3) es uniformemente convergente en tal franja. Tomando r suficientemente pequeño y R suficientemente grande, se puede obtener una franja arbitrariamente ancha que contenga cualquier franja prefijada con los lados paralelos al eje real.

De aquí se deduce que la serie (5.2:3) es uniformemente convergente en todo el eje real y, en particular, en su segmento δ: $-\pi \leqslant \xi \leqslant \pi$, $\eta = 0$. Multiplicando la serie (5.2:3) por $e^{-n\zeta i}$ e integrando a lo largo de este segmento, hallamos que

$$\int_{\delta} F(\zeta)\, e^{-n\zeta i}\, d\zeta = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n \int_{\delta} e^{(k-n)\zeta i}\, d\zeta.$$

Aquí

$$\int_{\delta} F(\zeta)\, e^{-n\zeta i}\, d\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\, e^{-n\xi i}\, d\xi \quad \text{y} \quad \int_{\delta} e^{(k-n)\zeta i}\, d\zeta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{(k-n)\xi i}\, d\xi.$$

Evidentemente, las últimas integrales se anulan si $k \neq n$, y son iguales a 2π si $k=n$. Por consiguiente,

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\, e^{-n\xi i}\, d\xi = 2\pi\alpha_n,$$

de donde

$$\alpha_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(\xi)\, e^{-n\xi i}\, d\xi \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad (5.2:4)$$

Sustituyendo $e^{ik\zeta}$ por $\cos k\zeta + i \operatorname{sen} k\zeta$, podemos escribir la serie (5.2:3) en la forma

$$F(\zeta) = \alpha_0 + \sum_1^{\infty} [(\alpha_k + \alpha_{-k}) \cos k\zeta + i(\alpha_k - \alpha_{-k}) \operatorname{sen} k\zeta],$$

donde

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2} a_0,$$

$$\alpha_k + \alpha_{-k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \frac{(e^{-k\xi i} + e^{k\xi i})\, d\xi}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \cos k\xi\, d\xi = a_k,$$

$$i(\alpha_k - \alpha_{-k}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \frac{e^{k\xi i} - e^{-k\xi i}}{2i}\, d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \operatorname{sen} k\xi\, d\xi = b_k$$

$$(k = 1, 2, \ldots).$$

Por lo tanto, hemos obtenido para $F(\zeta)$ el desarrollo en serie de Fourier

$$F(\zeta) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_k \cos k\zeta + b_k \operatorname{sen} k\zeta) \tag{5.2:5}$$

con los coeficientes

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \cos k\xi\, d\xi, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi) \operatorname{sen} k\xi\, d\xi \tag{5.2:6}$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Del método de obtención de la serie (5.2:5) se deduce que ésta es uniformemente convergente en cada franja limitada por rectas paralelas al eje real.

Si $F(\zeta)$, cuando ζ tiende hacia cada uno de los extremos de la franja de períodos, se mantiene acotada o tiende al infinito, entonces $F^*(t)$ tiene en el punto correspondiente $t = 0$ o $t = \infty$ un punto regular o un polo. Por ello, la serie de Laurent (5.2:2) sólo puede contener en este caso una cantidad finita de términos con coeficientes no nulos y, por consiguiente, $F^*(t)$ es una función racional de t de la forma especial

$$F^*(t) = \sum_{-m}^{m} \alpha_k t^k$$

(el coeficiente α_m o α_{-m} puede ser igual a cero). De aquí se deduce que *si la función entera $F(\zeta)$ tiende a un límite finito o infinito en cada uno de los extremos de la franja de períodos, entonces necesaria-*

mente es de la forma

$$F(\zeta)=\sum_{-m}^{m}\alpha_k e^{ik\zeta}=\frac{a_0}{2}+\sum_{1}^{m}(a_k\cos k\zeta+b_k\operatorname{sen}k\zeta), \qquad (5.2:7)$$

donde

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\xi)\cos k\xi\,d\xi \quad \text{y} \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\xi)\operatorname{sen}k\xi\,d\xi,$$

es decir, es un polinomio trigonométrico.

Fácilmente se observa que es cierta también la proposición recíproca: *todo polinomio trigonométrico de la forma* (5.2:7) *es una función entera de período* 2π *que tiene límite finito o infinito en cualquier extremo de la franja de períodos.*

Resumiendo, la propiedad indicada es una propiedad característica que distingue a los polinomios trigonométricos entre todas las funciones periódicas enteras.

Señalemos otra propiedad característica de los polinomios trigonométricos:

Una función entera $F(\zeta)\not\equiv$ const *de período* 2π *es de tipo exponencial cuando, y sólo cuando, ésta es un polinomio trigonométrico. En este caso, su orden es igual a* 1 *y el tipo coincide con el orden* m *del polinomio trigonométrico.*

En efecto, si $F(\zeta)$ es un polinomio trigonométrico (5.2:7) de grado m (al menos uno de los coeficientes α_m o α_{-m} es distinto de cero), entonces el orden de su crecimiento es igual a 1 y el tipo es igual a m, puesto que para valores suficientemente grandes de $|\zeta|$ se cumple la desigualdad $|F(\zeta)|<e^{(m+\varepsilon)|\zeta|}$ $(\varepsilon>0)$ y, por otra parte, existen valores de ζ_n arbitrariamente grandes en valor absoluto, para los cuales $|F(\zeta_n)|>e^{(m-\varepsilon)|\zeta_n|}$.

Recíprocamente, sea $F(\zeta)$ una función entera de tipo exponencial y de período 2π. Entonces $F(z)$ satisface a una desigualdad de la forma

$$|F(\zeta)|<e^{C|\zeta|} \quad \text{para} \quad |\zeta|>R_0$$

y, por consiguiente, en los segmentos de las rectas $\eta=\pm\ln R$ comprendidos en la franja de períodos $-\pi\leqslant\xi<\pi$ satisface a la desigualdad

$$|F(\xi+i\eta)|<\exp|C|\xi\pm i\ln R||=\exp\left[C\ln R\left|1\pm i\frac{\xi}{\ln R}\right|\right]<$$

$$<\exp\left[C\ln R\left(1+\frac{\pi}{\ln R}\right)\right]<\exp|(C+\varepsilon)\ln R|=$$

$$=R^{C+\varepsilon} \quad \text{para} \quad R>R(\varepsilon).$$

Al hacer la transformación $t=e^{i\zeta}$, a los segmentos indicados de rectas les corresponden en el recinto G las circunferencias $|t|=\frac{1}{R}$

y $|t| = R$. Por ello, en la primera de éstas se cumple la desigualdad

$$|F^*(t)| < \frac{1}{|t|^{C+\varepsilon}}, \qquad (5.2:8)$$

y, en la segunda, la desigualdad

$$|F^*(t)| < |t|^{C+\varepsilon}. \qquad (5.2:9)$$

Para valores suficientemente grandes de R ($R > R(\varepsilon)$) puede usarse una y otra desigualdad. Por consiguiente, la primera es válida para todas las circunferencias $|t| = \rho$ de radio suficientemente pequeño $\left(\rho = \frac{1}{R} < \frac{1}{R(\varepsilon)}\right.$, mientras que la segunda, para todas las circunferencias $|t| = \rho$ de radio suficientemente grande $\left.(\rho = R > R(\varepsilon)\right)$.

Basándose en la desigualdad (5.2:8), demostremos que en el desarrollo de Laurent de la función $F^*(t)$ son iguales a cero todos los coeficientes de las potencias negativas de t cuyos subíndices son mayores que $[C]$ en valor absoluto.

En efecto, para α_{-k} se tiene la fórmula

$$|\alpha_{-k}| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=\rho}\frac{F^*(t)}{t^{-k+1}}\,dt\right| = \frac{\rho^k}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi}F^*(\rho e^{i\theta})\,e^{ik\theta}\,d\theta\right|$$

y para todos los valores suficientemente pequeños de ρ, en virtud de (5.2:8), se tiene:

$$|\alpha_{-k}| < \frac{\rho^k}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{\rho^{C+\varepsilon}} = \rho^{k-(C+\varepsilon)}.$$

De aquí que, si ρ tiende a cero, resulta $\alpha_{-k} = 0$ para $k > C + \varepsilon$, o bien, como ε es arbitrariamente pequeño

$$\alpha_{-k} = 0 \quad \text{si} \quad k > [C].$$

Exactamente igual, basándose en la desigualdad (5.2:9), si el radio de la circunferencia $|t| = \rho$ tiende a ∞, hallamos que también son iguales a cero todos los coeficientes de las potencias positivas de t cuyos subíndices son mayores que $[C]$:

$$\alpha_k = 0 \quad \text{si} \quad k > [C].$$

De aquí se deduce que

$$F^*(t) = \sum_{-[C]}^{[C]} \alpha_k t^{-k}$$

y

$$F(\zeta) = \sum_{-[C]}^{[C]} \alpha_k e^{ik\zeta} = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{[C]} (a_k \cos k\zeta + b_k \operatorname{sen} k\zeta),$$

es decir, $F(\zeta)$ es un polinomio trigonométrico.

5.3. Una vez estudiadas las funciones periódicas, demostremos que toda función meromorfa periódica $F(\zeta)$ de período 2π, puede expresarse en forma de un cociente de dos funciones enteras periódicas del mismo período 2π. Claro, este hecho no se desprende de la definición de función meromorfa, ya que por el mero hecho de ser una función periódica el cociente de dos funciones enteras no se puede sacar la conclusión de que cada una de estas funciones enteras es periódica (por ejemplo, $\operatorname{sen} z = \frac{z \operatorname{sen} z}{z}$, donde z, así como $z \operatorname{sen} z$, no son periódicas).

No obstante, consideremos la función $F^*(t)$ que corresponde a la función $F(z)$. Ya se demostró anteriormente que ésta es meromorfa en el recinto G, en el sentido de que no puede tener aquí otros puntos singulares más que polos. Por consiguiente, es también meromorfa en este recinto en el sentido de que $F^*(t)$ se expresa en forma de un cociente de dos funciones que son analíticas en el recinto G (ap. 3.4):

$$F^*(t) = \frac{\Phi^*(t)}{\Psi^*(t)}.$$

Por lo tanto, para $F(\zeta)$ obtenemos la expresión

$$F(\zeta) = F^*(e^{i\zeta}) = \frac{\Phi^*(e^{i\zeta})}{\Psi^*(e^{i\zeta})} = \frac{\Phi(\zeta)}{\Psi(\zeta)},$$

donde

$$\Phi(\zeta) = \Phi^*(e^{i\zeta}) \quad \text{y} \quad \Psi(\zeta) = \Psi^*(e^{i\zeta})$$

son, evidentemente, dos funciones periódicas enteras de período 2π.

El aserto en cuestión queda demostrado.

Ha resultado que *cualquier función meromorfa de período* 2π *se expresa en forma de un cociente de dos funciones enteras del mismo período*. Pero, como ya se vio anteriormente, toda función entera (periódica) puede expresarse por una serie de Fourier, convergente en todos los puntos. De aquí que, *toda función periódica meromorfa* $F(\zeta)$ *se expresa en forma de un cociente de dos series de Fourier, convergentes en todos los puntos:*

$$F(\zeta) = \frac{\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_k \cos k\zeta + b_k \operatorname{sen} k\zeta)}{\frac{A_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} (A_k \cos k\zeta + B_s \operatorname{sen} k\zeta)}.$$

Resulta un caso particular importantísimo cuando $F(\zeta)$ posee una cantidad finita de polos en cada franja de período y, además, tiende a un límite finito o infinito en cada uno de los extremos de

la franja de períodos. Entonces la función correspondiente $F^*(t)$ posee solamente una cantidad finita de polos en el recinto G y, además, los puntos 0 y ∞ son para ésta puntos regulares o polos. De aquí se deduce que $F^*(t)$ no posee otras singularidades en el plano ampliado t más que polos, por lo cual es una función racional de t. Por consiguiente, $F^*(t)$ es de la forma

$$F^*(t) = \frac{A_0 + A_1 t + \ldots + A_m t^m}{B_0 + B_1 t + \ldots + B_n t^n},$$

de donde

$$F(\zeta) = \frac{A_0 + A_1 e^{i\zeta} + \ldots + A_m e^{im\zeta}}{B_0 + B_1 e^{i\zeta} + \ldots + B_n e^{in\zeta}}.$$

En resumen, en las hipótesis mencionadas $F(\zeta)$ es una función trigonométrica de ζ. Es obvio que cualquier función trigonométrica satisface a estas condiciones. Por lo tanto, *la clase de las funciones trigonométricas puede definirse como la clase de aquellas funciones meromorfas de período 2π que poseen solamente una cantidad finita de polos en cada franja de períodos y tiende a unos límites determinados en cada extremo de dicha franja.*

Todo lo expuesto se extiende a las funciones de período arbitrario ω mediante la transformación $z = \frac{\omega}{2\pi}\zeta$ o $\zeta = \frac{2\pi}{\omega}z$. En particular, para una función entera periódica $f(z)$ obtenemos el desarrollo

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \left(a_k \cos k \frac{2\pi}{\omega} z + b_k \operatorname{sen} k \frac{2\pi}{\omega} z \right),$$

y para una función meromorfa, el desarrollo de la forma

$$f(z) = \frac{\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \left(a_k \cos k \frac{2\pi}{\omega} z + b_k \operatorname{sen} k \frac{2\pi}{\omega} z \right)}{\frac{A_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \left(A_k \cos k \frac{2\pi}{\omega} z + B_k \operatorname{sen} k \frac{2\pi}{\omega} z \right)}.$$

§ 6. FUNCIONES ELIPTICAS Y FUNCIONES LIGADAS CON ELLAS. THETA-FUNCIONES

6.1. Ocupémonos del estudio de las funciones doblemente periódicas (elípticas). Se establecerán aquí algunas propiedades generales de las funciones elípticas antes de exponer ejemplos concretos de las mismas. Sea $f(z)$ una función meromorfa doblemente periódica; sus períodos fundamentales los designaremos con $2\omega_1$ y $2\omega_3$, conservando la notación $2\omega_2$ para la suma $2\omega_1 + 2\omega_3$, la cual

representa el vértice del paralelogramo fundamental de períodos Δ que es opuesto al origen de coordenadas. En virtud de las propiedades de los períodos establecidas en el ap. 5.2, los vectores $2\omega_1$ y $2\omega_3$ no están situados en una recta. Distribuiremos las notaciones $2\omega_1$ y $2\omega_3$ entre los dos períodos fundamentales de tal modo que el recorrido del contorno del paralelogramo de períodos, correspondiente al orden de los vértices 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$, se efectúe en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj (la parte interior del paralelogramo queda a la izquierda del observador que hace el recorrido). Es fácil comprobar que esto ocurre cuando, y sólo cuando, el número complejo $\frac{2\omega_3}{2\omega_1}$ posee una parte imaginaria positiva: $\operatorname{Im}\left(\frac{2\omega_3}{2\omega_1}\right) > 0$.

Diremos que dos puntos distintos del plano z, z' y z'', son c o n g r u e n t e s (respecto de los períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$) si, y sólo si, $z' - z''$ es cierto período: $z' - z'' = 2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_3$. Es evidente que el paralelogramo de períodos no contiene ningún par de puntos congruentes, mientras que los puntos que están situados en sus lados y son distintos de los vértices se dividen en pares de puntos congruentes entre sí, y los vértices del paralelogramo representan una cuaterna de puntos congruentes entre sí.

Convengamos en adjuntar a continuación a cada paralelogramo Δ_{m_1, m_2} con los vértices $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_3$, $(2m_1 + 1)\omega_1 + 2m_2\omega_3$, $(2m_1 + 1)\omega_1 + (2m_2 + 1)\omega_3$, $2m_1\omega_1 + (2m_2 + 1)\omega_3$ su extremo inferior de la izquierda $2m_1\omega_1 + 2m_2\omega_3$ y los puntos de los lados inferior e izquierdo, excluyendo de éstos sus extremos $(2m_1 + 1)\omega_1 + 2m_2\omega_3$ y $2m_1\omega_1 + (2m_2 + 1)\omega_3$. Debido a esto, queda adjuntado al paralelogramo solamente un punto de cada par o cuaterna de puntos del contorno congruentes entre sí. El paralelogramo de períodos completado con estos puntos, el cual, igual que anteriormente, lo representaremos por Δ_{m_1, m_2}, posee las siguientes propiedades evidentes:

a) dos puntos cualesquiera distintos del paralelogramo Δ_{m_1, m_2} no son congruentes entre sí;

b) para cada punto z' del plano, en el paralelogramo Δ_{m_1, m_2} siempre hay un punto z, y sólo uno, que es congruente con z'.

Obsérvese que si $f(z)$ y $\varphi(z)$ son dos funciones elípticas con unos mismos períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$, entonces su suma, resta, producto y cociente (se forma este último solamente cuando el divisor no es idénticamente nulo) son funciones meromorfas con los mismos períodos, es decir, son funciones elípticas.

En general, efectuando operaciones racionales con cualquier cantidad de funciones elípticas $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ que tienen unos mismos períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ (excluyéndose la división por una función

idénticamente nula), resulta una combinación racional de las funciones dadas

$$R\,[f_1(z), \ldots, f_n(z)],$$

la cual será una función meromorfa con los períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$, o sea, será una función elíptica.

Consideremos también la derivada de una función elíptica $f(z)$. Siendo la derivada de una función meromorfa, ella misma es meromorfa. Además, de la igualdad

$$f(z + 2m_1\omega_1 + 2m_3\omega_3) = f(z),$$

que se cumple para cualquier z, se deduce que también

$$f'(z + 2m_1\omega_1 + 2m_3\omega_3) = f'(z)$$

para cualesquiera z, es decir, $f'(z)$ posee períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$. En resumen, la derivada de una función elíptica también es una función elíptica.

6.2. Demostremos los teoremas siguientes que expresan las propiedades principales de las funciones elípticas.

Teorema 1. *Una función elíptica* $f(z) \not\equiv$ const *no puede ser entera.*

En efecto, suponiendo que $f(z)$ es una función entera, hallaremos que en el paralelogramo cerrado de períodos $\overline{\Delta}$ ésta es continua y, por consiguiente, está acotada en valor absoluto:

$$|f(z)| < C.$$

Como en cualquier punto del plano z' la función toma el mismo valor que en el punto congruente z, perteneciente al paralelogramo Δ, la desigualdad obtenida tiene que cumplirse en todos los puntos del plano. Por consiguiente, según el teorema de Liouville, $f(z) \equiv$ const, lo cual contradice a la hipótesis del teorema.

De la demostración del teorema 1 se deduce que una función elíptica $f(z) \not\equiv$ const tiene por lo menos un polo en el paralelogramo de períodos.

La cantidad total de polos pertenecientes a uno de los paralelogramos de períodos tiene que ser finito (suponiendo lo contrario, hallaríamos en el paralelogramo cerrado de períodos un punto de acumulación de polos).

Junto con el paralelogramo Δ, consideremos un paralelogramo D construido sobre otro par de períodos fundamentales:

$$2\Omega_1 = m\cdot 2\omega_1 + n\cdot 2\omega_3,\quad 2\Omega_3 = p\cdot 2\omega_1 + q\cdot 2\omega_3,\qquad mq - np = 1.$$

A cada polo $b \in D$ le corresponde un polo $\beta \in \Delta$ congruente con él, y sólo uno, y recíprocamente. Además, los órdenes de los polos b y β son iguales. En efecto, como $f(z)$ es periódica, su desarrollo

de Laurent en un entorno de β se convierte en el desarrollo en un entorno de b mediante la sustitución de $z - b$ por $z - \beta$ sin que se alteren los coeficientes. De aquí se deduce que la suma de los órdenes de todos los polos que pertenecen a un mismo paralelogramo de períodos no depende de la elección de los períodos fundamentales. Esta suma (la cantidad de polos situados en un paralelogramo, teniendo en cuenta sus órdenes), se llama orden de la función elíptica.

Teorema 2. *La suma de los residuos de una función elíptica $f(z)$, respecto de todos los polos situados en el paralelogramo de períodos, es igual a cero.*

Para la demostración, es suficiente observar que la integral de $f(z)$ a lo largo de un circuito que contenga en su interior a todos

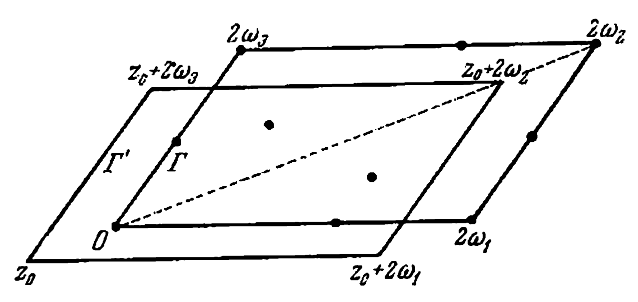


FIG. 43.

los polos pertenecientes a uno de los paralelogramos de períodos Δ y que no contenga a otros polos, es igual a cero. Si en el contorno Γ del paralelogramo cerrado Δ no hay ningún polo de la función $f(z)$, entonces este contorno servirá para la integración. Supongamos que en Γ hay polos de la función $f(z)$. Los que están situados en el lado de la derecha o en el lado superior del paralelogramo no se incluyen a Δ. En particular, no se incluyen a Δ los polos que pueden estar situados en el vértice inferior de la derecha o en el vértice superior de la izquierda del paralelogramo Δ. Por ello, se puede sustituir el circuito Γ por el contorno Γ' de un paralelogramo Δ' con los lados paralelos e iguales, respectivamente, a los lados del paralelogramo Δ, de modo que en Γ' no haya ningún polo de la función $f(z)$, y en el interior de Γ' estén contenidos todos los polos pertenecientes a Δ, y sólo estos polos (en la fig. 43 los polos están indicados con redondeles). Para esto es suficiente desplazar Γ por la diagonal del paralelogramo Δ en dirección desde el vértice $2\omega_2$ hacia el vértice O en una magnitud menor que la distancia desde el conjunto de polos,

pertenecientes a Δ, hasta el conjunto de puntos pertenecientes al lado de la derecha y al lado superior. Los vértices del circuito de integración Γ' los denotaremos con z_0, $z_0 + 2\omega_1$, $z_0 + 2\omega_2$ y $z_0 + 2\omega_3$ (si Γ' coincide con Γ, entonces $z_0 = 0$). Resulta:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0+2\omega_1} f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0+2\omega_1}^{z_0+2\omega_2} f(z)\,dz + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0+2\omega_2}^{z_0+2\omega_3} f(z)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{z_0+2\omega_3}^{z_0} f(z)\,dz. \qquad (6.2:1)$$

Demostremos que la suma de la primera y tercera integrales del segundo miembro, así como la suma de la segunda y cuarta integrales, es igual a cero.

En efecto, si la ecuación del lado que une los vértices z_0 y $z_0 + 2\omega_1$ es

$$z = z_0 + 2\omega_1 t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0}^{z_0+2\omega_1} f(z)\,dz = \frac{2\omega_1}{2\pi i}\int_0^1 f(z_0 + 2\omega_1 t)\,dt.$$

La ecuación del lado que une los vértices $z_0 + 2\omega_3$, $z_0 + 2\omega_2$, se puede escribir en la forma

$$z = z_0 + 2\omega_3 + (2\omega_2 - 2\omega_3)\,t = z_0 + 2\omega_3 + 2\omega_1 t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

y, por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{z_0+2\omega_2}^{z_0+2\omega_3} f(z)\,dz = \frac{-1}{2\pi i}\int_{z_0+2\omega_3}^{z+2\omega_2} f(z)\,dz = -\frac{2\omega_1}{2\pi i}\int_0^1 f(z_0 + 2\omega_3 + 2\omega_1 t)\,dt =$$

$$= -\frac{2\omega_1}{2\pi i}\int_0^1 f(z_0 + 2\omega_1 t)\,dt.$$

Vemos, pues, que la suma de las dos integrales calculadas es igual a cero. Del mismo modo nos convencemos que la suma de las dos integrales restantes del segundo miembro de la igualdad (6.2:1) es igual a cero. Por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(z)\,dz = 0,$$

es decir, la suma de los residuos de la función $f(z)$ respecto de todos los polos que están situados en el interior de Γ' es igual a cero, como se quería demostrar.

C o r o l a r i o. *El orden de una función elíptica* $f(z) \not\equiv$ const *no es menor que dos.*

En efecto, supongamos que $f(z)$ posee en el paralelogramo de períodos un solo polo β y que éste es simple. Entonces, la parte principal del desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en un entorno del punto β tiene que tener la forma $\frac{B}{z-\beta}$, donde B es el residuo de la función $f(z)$ respecto del punto β. Según lo demostrado en el teorema 2, $B=0$, de donde se deduce que $f(z)$, en la realidad, no tiene polos en el paralelogramo de períodos y, por consiguiente, según el teorema 1, $f(z) \equiv$ const.

T e o r e m a 3. *La cantidad de A-puntos de una función elíptica* $f(z) \not\equiv$ const, *pertenecientes al paralelogramo de períodos, no depende de A y es igual al orden de la función elíptica (o sea, al menos es igual a dos).*

Para $A=\infty$ la tesis del teorema se deduce de la definición del orden de la función elíptica. Sea $A\neq\infty$; recordemos (ap. 3.5, cap. IV), que la integral $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f'(z)\,dz}{f(z)-A}$, tomada en sentido positivo a lo largo del circuito que contiene en su interior a todos los polos y a todos los A-puntos pertenecientes a uno de los paralelogramos de períodos, es igual a la diferencia entre el número de polos y A-puntos. Por esta razón, es suficiente convencerse de que esta integral es igual a cero.

Por circuito de integración tomaremos el circuito Γ' introducido en la demostración del teorema 2, exigiendo además que en Γ' no estén situados los polos de la función $f(z)$, ni tampoco sus A-puntos *).

La función $\varphi(z)=\frac{f'(z)}{f(z)-A}$, siendo una combinación racional de las funciones elípticas $f'(z)$ y $f(z)$, es también elíptica, con los mismos períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$. Por ello, se le puede aplicar toda la demostración del teorema 2 y, por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\varphi(z)\,dz=0.$$

Con esto se termina la demostración del teorema 3.

T e o r e m a 4. *La suma de todos los A-puntos de una función elíptica* $f(z) \not\equiv$ const, *pertenecientes a un paralelogramo de períodos,*

---

*) Si el contorno Γ del paralelogramo Δ no satisface a estas condiciones, entonces lo desplazamos por la diagonal desde $2\omega_2$ hasta 0 en una magnitud menor que la distancia desde el conjunto de todos los polos y todos los A-puntos del paralelogramo Δ (para un A fijado) hasta el conjunto de los puntos del lado de la derecha y del lado superior de este paralelogramo.

es congruente a la suma de todos los polos, pertenecientes también a un paralelogramo de períodos.

Para $A = \infty$ la tesis es evidente; supongamos que $A \neq \infty$. Consideremos el circuito Γ' que se empleó en la demostración del teorema 3, y formemos la integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz$. Según el ap. 3.5, cap. IV, esta integral es igual a la diferencia entre la suma de todos los A-puntos situados en el interior de Γ' y la suma de todos los polos situados también en el interior de Γ'. Por ello, es suficiente demostrar que la integral es igual a algún período de la función $f(z)$. Representando, para abreviar, los lados del circuito Γ' por I, II, III y IV, de modo que sus puntos iniciales y finales sean: z_0 y $z_0 + 2\omega_1$ para el segmento I, $z_0 + 2\omega_1$ y $z_0 + 2\omega_2$ para el segmento II, $z_0 + 2\omega_3$ y $z_0 + 2\omega_2$ para el segmento III y z_0 y $z_0 + 2\omega_3$ para el segmento IV, respectivamente, obtendremos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{I}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{II}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{III}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{IV}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz. \qquad (6.2.2)$$

Demostremos que la suma de la primera y tercera integrales del segundo miembro, así como la suma de la segunda y cuarta integrales, representan unos períodos de la función $f(z)$. En efecto, el segmento I tiene la ecuación $z = z_0 + 2\omega_1 t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{I}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz = \frac{2\omega_1}{2\pi i}\int_0^1 (z_0 + 2\omega_1 t)\frac{f'(z_0+2\omega_1 t)}{f(z_0+2\omega_1 t)-A}\,dt.$$

La ecuación del segmento III se puede expresar en la forma:

$$z = z_0 + 2\omega_3 + (2\omega_2 - 2\omega_3)\,t = z_0 + 2\omega_3 + 2\omega_1 t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

de donde

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{III}} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz =$$

$$= -\frac{2\omega_1}{2\pi i}\int_0^1 (z_0 + 2\omega_3 + 2\omega_1 t)\frac{f'(z_0+2\omega_3+2\omega_1 t)}{f(z_0+2\omega_3+2\omega_1 t)-A}\,dt =$$

$$= -\frac{2\omega_1}{2\pi i}\int_0^1 (z_0 + 2\omega_3 + 2\omega_1 t)\frac{f'(z_0+2\omega_1 t)}{f(z_0+2\omega_1 t)-A}\,dt.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{I} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{III} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz=$$

$$=-\frac{2\omega_1}{2\pi i}2\omega_3\int\limits_0^1\frac{f'(z_0+2\omega_1 t)}{f(z_0+2\omega_1 t)-A}\,dt=-\frac{2\omega_3}{2\pi i}\left[\mathrm{Ln}\{f(z_0+2\omega_1 t)-A\}\right]_0^1=$$

$$=-\frac{2\omega_3}{2\pi i}\mathrm{Ln}\frac{f(z_0+2\omega_1)-A}{f(z_0)-A}=-\frac{2\omega_3}{2\pi i}\mathrm{Ln}\,1=$$

$$=-\frac{2\omega_3}{2\pi i}2k\pi i=-2k\omega_3=\text{período de } f(z).$$

Del mismo modo hallamos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{II} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{IV} z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz=2l\omega_1=\quad\text{período de } f(z).$$

Así, pues,

$$\frac{1}{2\pi i}\int z\frac{f'(z)}{f(z)-A}\,dz=2l\omega_1-2k\omega_3=\Omega,$$

donde Ω es cierto período de la función $f(z)$.

El teorema queda demostrado.

6.3. Para la construcción de las funciones elípticas nos hará falta también la siguiente proposición.

L e m a. *La serie*

$$\sum{}'\frac{1}{|\Omega|^{\lambda}},\tag{6.3:1}$$

donde la sumación se extiende a todos los períodos

$$\Omega=2k\omega_1+2l\omega_3$$

(el signo ′ sobre la suma denota que se excluye el valor $\Omega=0$), *es convergente si* $\lambda>2$.

Obsérvese que todos los períodos Ω sin excepción, distintos de cero, están situados en los contornos de ciertos paralelogramos que son semejantes entre sí, con los centros en el origen de coordenadas; tres de ellos están representados en la fig. 44. El primero de los mencionados contiene en su contorno ocho períodos distintos, el segundo contiene dieciseis. Si suponemos que el contorno del k-ésimo paralelogramo contiene $8k$ períodos, entonces, proyectándolos sobre el $(k+1)$-ésimo paralelogramo en direcciones paralelas a $2\omega_1$ y $2\omega_3$, obtendremos que a cada período situado en el contorno del k-ésimo paralelogramo y distinto de los vértices, le corresponde en el contorno del $(k+1)$-ésimo paralelogramo un período, mien-

tras que a cada uno de los cuatro vértices le corresponden dos períodos (véase la fig. 44, donde se ha supuesto que $k = 2$ y la correspondencia se indica con flechas). Si a todo esto se añaden los cuatro vértices del $(k + 1)$-ésimo paralelogramo, obtendremos en su contorno ocho períodos más que en el contorno del paralelogramo precedente, es decir, en total $8(k + 1)$ períodos.

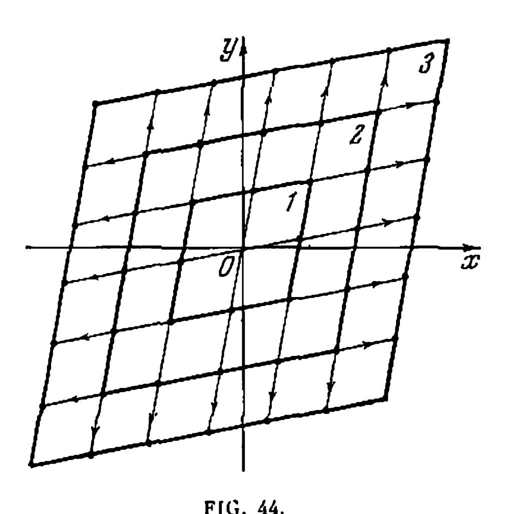


FIG. 44.

En resumen, la cantidad de períodos crece en progresión aritmética con la diferencia 8. Como los paralelogramos son semejantes y su situación es homotética respecto del punto $z = 0$, designando con d la distancia del origen de coordenadas hasta el contorno del primer paralelogramo, tendremos que la distancia desde el mismo punto hasta el contorno del k-ésimo paralelogramo es igual a kd. Por lo tanto, para el módulo de cualquier período Ω situado en el último circuito, se tiene la desigualdad

$$|\Omega| \geqslant kd,$$

de donde

$$\frac{1}{|\Omega|^{\lambda}} \leqslant \frac{1}{k^{\lambda} d^{\lambda}}$$

y, por consiguiente, la suma de los términos de la serie (6.3:1) que corresponden a todos los $8k$ períodos situados en el contorno del k-ésimo paralelogramo no es superior a

$$\frac{8k}{k^{\lambda}d^{\lambda}} = \frac{8}{d^{\lambda}k^{\lambda-1}}.$$

De aquí se deduce, finalmente, que la suma parcial de los términos de la serie (6.3:1) que corresponde a los períodos que están situados en el interior y en los lados del k-ésimo paralelogramo, no es superior a

$$\frac{8}{d^{\lambda}}\sum_{1}^{k}\frac{1}{j^{\lambda-1}}.$$

Pero la serie $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{j^{\lambda-1}}$ es convergente para $\lambda > 2$; por esta razón, la serie (6.3:1) también es convergente para $\lambda > 2$, con lo cual se termina la demostración del lema.

Si designamos con D el mayor de los módulos de los períodos situados en el contorno del primer paralelogramo, hallaremos del mismo modo que la suma parcial de la serie (6.3:1) que corresponde a todos los períodos situados en el interior y en los lados del k-ésimo paralelogramo no es inferior a

$$\frac{8}{D^{\lambda}}\sum_{1}^{k}\frac{1}{j^{\lambda-1}}.$$

De aquí se deduce que la serie (6.3:1) es divergente si $\lambda \leqslant 2$. Así, pues, *el exponente de convergencia de la sucesión* $\{\Omega\}$ (los períodos son distintos de cero y están ordenados por módulos no decrecientes) *es igual a* 2.

Del lema se desprende que la serie

$$\sum \frac{1}{(z-\Omega)^{3}} \tag{6.3.2}$$

es absoluta y uniformemente convergente en cada recinto acotado del plano (donde cada vez se excluye una cantidad finita de términos de la serie que tienen polos en este recinto). Es suficiente suponer que z pertenece a un círculo fijado arbitrario con el centro en el origen de coordenadas $|z| < R$, y considerar los términos de la serie que corresponden a los períodos Ω que están situados fuera de un círculo de radio $2R$. Entonces, para estos términos

$\left|\frac{z}{\Omega}\right| < \frac{1}{2}$, y obtenemos la acotación siguiente:

$$\left|\frac{1}{(z-\Omega)^3}\right| \leqslant \frac{1}{(|\Omega|-|z|)^3} = \frac{1}{\left(1-\frac{|z|}{|\Omega|}\right)^3} \frac{1}{|\Omega|^3} < \frac{8}{|\Omega|^3},$$

de donde, en virtud del lema, se deduce la convergencia absoluta y uniforme de la serie (6.3:2).

Designando la suma de la serie mediante $f(z)$, representémosla en el círculo $|z| < R$ en la forma

$$f(z) = \sum_{|\Omega| \leqslant R} \frac{1}{(z-\Omega)^3} + \sum_{|\Omega| > R} \frac{1}{(z-\Omega^3)}.$$

La primera suma del segundo miembro es una función racional que tiene un polo de tercer orden en cada período perteneciente al círculo $|z| < R$. La parte principal correspondiente tiene la forma $\frac{1}{(z-\Omega)^3}$. La segunda suma solamente se diferencia en un número finito de términos de la serie $\sum\limits_{|\Omega|>2R} \frac{1}{(z-\Omega)^3}$, cuya convergencia uniforme en el círculo $|z| < R$ acabamos de establecer. Por consiguiente, ésta es una función analítica en el círculo $|z| < R$. Así, pues, la función $f(z)$ es analítica en cualquier círculo $|z| < R$, a excepción de polos de tercer orden en todos los períodos pertenecientes al círculo indicado. Por consiguiente, ésta es una función meromorfa (en todo el plano finito).

Demostremos que $2\omega_1$ y $2\omega_3$ son períodos de la función $f(z)$. En efecto,

$$f(z+2\omega_j) = \sum \frac{1}{[z-(\Omega-2\omega_j)]^3}. \qquad (6.3:3)$$

Pero $\Omega - 2\omega_j$ también es uno de los períodos dados: $\Omega - 2\omega_j = \Omega'$, y cuando Ω recorre el conjunto de todos los períodos dados, Ω' recorre también todo este conjunto, puesto que la transformación $\Omega - 2\omega_j = \Omega'$ significa un desplazamiento del retículo de períodos, según el cual éste se transforma en sí mismo. Por lo tanto, la serie (6.3:3) solamente se diferencia en el orden de los términos de la serie absolutamente convergente (6.3:2), es decir, su suma es igual a $f(z)$. En resumen,

$$f(z+2\omega_j) = f(z) \qquad (j = 1, 3).$$

Demostremos que $2\omega_1$ y $2\omega_3$ es un par de períodos fundamentales de la función $f(z)$. En efecto, sea ω un período cualquiera de esta

función. Como Ω es un polo de la función $f(z)$, $\Omega+\omega$ tiene que ser uno de los polos, o sea,

$$\Omega+\omega=\Omega',$$

de donde

$$\omega=\Omega'-\Omega=2m_1\omega_1+2m_3\omega_3.$$

Por consiguiente, cualquier período de la función $f(z)$ es combinación lineal de los períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ con coeficientes enteros m_1 y m_3.

De aquí se deduce que $f(z)$ es una función meromorfa con los períodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$.

Por lo tanto, hemos construido una función elíptica que posee unos períodos fundamentales prefijados. Cada vértice del paralelogramo fundamental 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ es un polo de tercer orden para $f(z)$. pero de todos estos cuatro pólos solamente uno, el que está situado en el origen de coordenadas, se incluye al paralelogramo fundamental, mientras que los otros tres pertenecen a los paralelogramos vecinos. De esto se deduce que $f(z)$ es una función elíptica de tercer orden.

Obsérvese también que ésta es una función impar. En efecto,

$$f(-z)=\sum\frac{1}{(-z-\Omega)^3}=-\sum\frac{1}{[z-(-\Omega)]^3}.$$

Pero el conjunto de todos los números $-\Omega$ coincide con el conjunto de todos los Ω; por esta razón, la serie $\sum\frac{1}{[z-(-\Omega)]^3}$ se diferencia de la serie (6.3:2) solamente en el orden de los términos y su suma es $f(z)$. De aquí que

$$f(-z)=-f(z),$$

es decir, $f(z)$ es una función impar.

Partiendo de esta función e integrando se puede obtener una función elíptica de segundo orden (par).

En efecto, sea z_0 un punto arbitrario del plano y distinto de los polos de la función $f(z)$. Integrando término a término la serie (6.3:2) a lo largo de alguna curva rectificable γ que no pase por los polos y que una z_0 con otro punto z, también distinto de los polos de la función $f(z)$, resulta:

$$\varphi(z)=C+\int_{z_0}^{z}f(z)\,dz=C-\frac{1}{2}\sum\left[\frac{1}{(z-\Omega)^2}-\frac{1}{(z_0-\Omega)^2}\right]. \qquad (6.3:4)$$

La serie (6.3:4), que se ha obtenido al integrar la serie uniformemente convergente (6.3:2), también es uniformemente convergente

en cualquier recinto acotado, si se desprecia una cantidad finita de términos de la serie que tienen polos en este recinto. Por consiguiente, ésta es una función meromorfa que tiene un polo de segundo orden en cada punto Ω. Escribamos $\varphi(z)$ en la forma

$$\varphi(z) = C - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2}\sum{}' \left[\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{(z_0-\Omega)^2}\right], \qquad (6.3{:}4')$$

donde la suma se extiende a todos los puntos Ω distintos del origen de coordenadas. De la última fórmula se deduce que $\varphi(z) + \frac{1}{2z^2}$ es una función meromorfa, para la cual el origen de coordenadas es un punto regular. Su valor para $z = 0$ es igual a

$$\left[\varphi(z) + \frac{1}{2z^2}\right]_{z=0} = C + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2}\sum{}' \left[\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{(z_0-\Omega)^2}\right]. \qquad (6.3{:}4'')$$

Elijamos la constante de integración C de tal manera que este valor sea igual a cero. Entonces, restando término a término (6.3:4″) de (6.3:4′), obtendremos:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right]\right\}.$$

La función meromorfa que figura entre corchetes se diferencia de $\varphi(z)$ solamente en un factor constante. Esta función, introducida por Weierstrass, se representa por $\wp(z)$ (se lee «pe de z», y el signo $\wp$ se llama signo de Weierstrass). Así, pues, según la definición,

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right]. \qquad (6.3{:}5)$$

Esta es una función meromorfa con polos de segundo orden en cada uno de los puntos Ω (incluyendo el origen de coordenadas). La parte principal correspondiente al polo Ω tiene la forma $\frac{1}{(z-\Omega)^2}$. Demostremos que esta serie (6.3:5) es absolutamente convergente. En efecto, considerando solamente los términos de la serie para los cuales $|\Omega| > 2|z|$, obtenemos:

$$\left|\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}\right| = \left|\frac{(2\Omega - z)z}{\Omega^2(z-\Omega)^2}\right| \leqslant \frac{2|\Omega|\left(1 + \frac{|z|}{2|\Omega|}\right)|z|}{|\Omega|^4\left(1 - \frac{|z|}{|\Omega|}\right)^2} < \frac{10|z|}{|\Omega|^3},$$

de donde, en virtud del lema del presente apartado se deduce la convergencia absoluta de la serie (6.3:5). Fácilmente se observa que $\wp(z)$ es una función par; en efecto,

$$\wp(-z)=\frac{1}{z^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(z+\Omega)^2}-\frac{1}{\Omega^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{z^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{[z-(-\Omega)]^2}-\frac{1}{(-\Omega)^2}\right],$$

y la última serie se diferencia de la serie (6.3:5) solamente en el orden de los términos, por lo cual su suma es $\wp(z)$.

La derivada $\wp'(z)$ tiene la forma

$$\wp'(z)=-\frac{2}{z^3}-\sum{}'\frac{2}{(z-\Omega)^3}=-2\sum\frac{1}{(z-\Omega)^3}=-2f(z),$$

es decir, se diferencia solamente en un factor numérico de la función elíptica $f(z)$ de períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$, considerada anteriormente. Por consiguiente,

$$\wp'(z+2\omega_j)-\wp'(z)=0 \qquad (j=1,3),$$

de donde, integrando:

$$\wp(z+2\omega_j)-\wp(z)=C_j.$$

Poniendo aquí $z=-\omega_j$, resulta:

$$\wp(\omega_j)-\wp(-\omega_j)=C_j,$$

o bien, como $\wp(z)$ es par:

$$C_j=0 \qquad (j=1,3).$$

De aquí se deduce que

$$\wp(z+2\omega_j)=\wp(z),$$

o sea, $\wp(z)$ es una función doblemente periódica de períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$. Del mismo modo que en el caso de la función $f(z)$, nos convencemos de que $2\omega_1$ y $2\omega_3$ son los períodos fundamentales de la función $\wp(z)$. De aquí que al paralelogramo fundamental de períodos de $\wp(z)$ con los vértices 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ se le debe adjuntar solamente un polo doble en el origen de coordenadas, o sea, $\wp(z)$ es una función elíptica de segundo orden.

He aquí un resumen de todo lo que hemos conseguido demostrar: $\wp(z)$ *es una función elíptica par de segundo orden, de períodos fundamentales* $2\omega_1$ *y* $2\omega_3$, *con polos dobles en todos los puntos* $\Omega=2m_1\omega_1+2m_3\omega_3$ *y las partes principales correspondientes de la forma* $\frac{1}{(z-\Omega)^2}$.
De la construcción misma de esta función o directamente de la ecua-

ción (6.3:5) se deduce que *la diferencia* $\wp(z) - \frac{1}{z^2}$ *se anula para* $z = 0$. *La derivada de la función* $\wp(z)$

$$\wp'(z) = -2 \sum \frac{1}{(z-\Omega)^3} \qquad (6.3:6)$$

es una función elíptica impar de tercer orden, de períodos fundamentales $2\omega_1$ *y* $2\omega_3$, *con polos triples en todos los puntos* Ω *y con las partes principales correspondientes de la forma* $-\frac{2}{(z-\Omega)^3}$.

Estas dos funciones, $\wp(z)$ y $\wp'(z)$, son las fundamentales en la teoría de las funciones elípticas. Ambas se llaman **funciones elípticas de Weierstrass**.

Como el orden de la función $\wp'(z)$ es igual a tres, del teorema 3, ap. 6.1, se deduce que para cada A esta función tiene tres A-puntos en el paralelogramo de períodos. Si $A = \infty$, estos tres puntos se confunden en uno — en un polo triple de la función $\wp'(z)$. Sea $A = 0$, entonces tenemos que obtener tres ceros de la función $\wp'(z)$.

De la relación

$$\wp'(-z) = -\wp'(z)$$

se deduce que

$$\wp'(2\omega_j - z) = -\wp'(z) \qquad (j = 1, 2, 3),$$

de donde, para $z = \omega_j$ resulta:

$$\wp'(\omega_j) = -\wp'(\omega_j)$$

y como $\wp'(\omega_j) \neq \infty$, se tiene:

$$\wp'(\omega_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Hemos obtenido tres ceros ω_1, ω_2, ω_3, pertenecientes al paralelogramo fundamental de períodos con los vértices 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$ y $2\omega_3$. Uno de ellos, ω_2, está situado en el centro del paralelogramo, y los otros dos, ω_1 y ω_3, en los puntos medios de los lados. Está claro que cada uno de estos ceros es simple. En caso contrario la cantidad total de ceros de $\wp'(z)$ en el paralelogramo de períodos sería mayor que tres, lo cual es imposible. Obsérvese que la suma de los ceros hallados $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2\omega_1 + 2\omega_3$ se diferencia de la suma de los polos $0 + 0 + 0 = 0$, en un período, como tiene que ser según el teorema 4 (ap. 6.1).

El orden de la función $\wp(z)$ es igual a dos. Por consiguiente, para cualquier A existen dos A-puntos de esta función en el paralelogramo de períodos. Si $A = \infty$, ambos puntos se confunden en uno — en un polo doble (es decir, en el origen de coordenadas, si se trata del paralelogramo fundamental de períodos). Si A tiene uno de los valores $\wp(\omega_j) = e_j$, los A-puntos correspondientes se

confunden dos a dos en los puntos ω_j ($j = 1, 2, 3$), puesto que en cada uno de ellos $\wp'(\omega_j)$ se anula, mientras que $\wp''(\omega_j) \neq 0$, es decir, los puntos ω_j son dobles para $\wp(z)$. Para todos los demás valores de A ($A \neq \infty$, $A \neq e_j$, $j = 1, 2, 3$) tenemos que tener pares de A-puntos distintos entre sí. Suponiendo lo contrario, obtendríamos que $\wp'(z)$ tendría ceros en el paralelogramo de períodos además de los tres puntos ω_1, ω_2 y ω_3, lo cual es imposible.

Señalemos la posición de cada par en el paralelogramo de períodos. Como la función $\wp(z)$ es par, se tiene:

$$\wp(-z) = \wp(z),$$

de donde se deduce que

$$\wp(2\omega_j - z) = \wp(z) \qquad (j = 1, 2, 3), \qquad (6.3:7)$$

es decir, $\wp(z)$ toma valores iguales en los puntos z y $2\omega_j - z$, los cuales son simétricos respecto de ω_j. Sea $A \neq \infty$ y $A \neq e_j$; si z_0 es uno de los A-puntos de la función $\wp(z)$, entonces $z_0 \neq 0$ y $z_0 \neq \omega_j$. Si z_0 está situado en el interior del paralelogramo fundamental de períodos, entonces $2\omega_2 - z_0$ también está situado en el interior del mismo, simétricamente respecto del centro ω_2 del paralelogramo y, por consiguiente, es el segundo A-punto de la función $\wp(z)$. Si z_0 está situado en el lado que une los vértices 0 y $2\omega_j$ ($j = 1, 3$) del paralelogramo fundamental, entonces el punto $2\omega_j - z_0$ está situado en el mismo lado simétricamente respecto del punto medio ω_j de este lado y, por consiguiente, es el segundo A-punto de la función $\wp(z)$. En resumen, los A-puntos de la función $\wp(z)$ para todos los valores complejos posibles de A están situados simétricamente respecto del centro del paralelogramo (en el interior de él) o respecto de los puntos medios de sus lados (en los lados). Los puntos que están situados en el centro o en los puntos medios de los lados son dobles, del mismo modo que es doble también el punto que está situado en el ángulo inferior de la izquierda del paralelogramo (polo doble).

En la figura 45 está representada la superficie $u = |\wp(z)|$, que es el relieve de la función $\wp(z)$*).

Empleemos los resultados obtenidos para estudiar más detalladamente el comportamiento de la función $\wp(z)$ en dos casos particulares importantes. Supongamos primero que $2\omega_1$ es un número real positivo 2α ($\alpha > 0$) y que $2\omega_3$ es un número imaginario puro con la parte imaginaria positiva: $2\omega_3 = 2\beta i$ ($\beta > 0$). En este caso los paralelogramos de períodos son rectángulos.

Estudiemos el comportamiento de la función $\wp(z)$ en el rectángulo D: $0 \leqslant x \leqslant \alpha$, $0 \leqslant y \leqslant \beta$, que forma una cuarta parte del

*) El dibujo se ha adaptado de las «Tablas de funciones» de Jahnke y Emde.

paralelogramo fundamental de períodos. Debido a lo demostrado anteriormente, no pueden pertenecer a este rectángulo dos A-puntos distintos de la función $\wp(z)$, a excepción de los puntos dobles que están situados en los vértices del rectángulo. Por lo tanto, $\wp(z)$ toma valores distintos en diferentes puntos del rectángulo D, o sea,

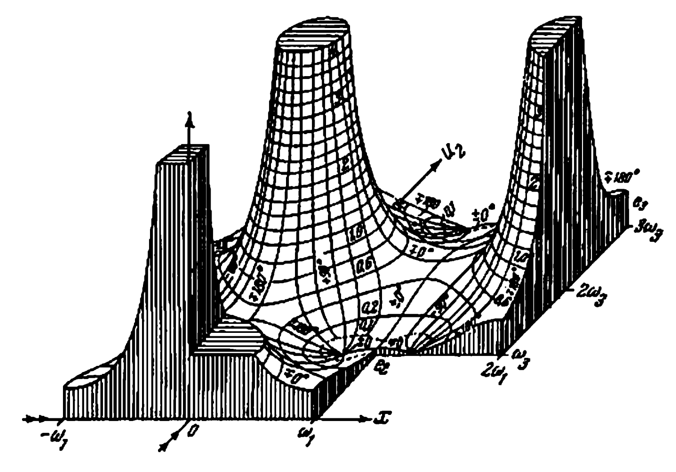


FIG. 45.

es una función univalente en este recinto. Por consiguiente, $\wp(z)$ transforma D biunívoca y conformemente en cierto recinto G del plano z; además, la frontera del recinto G es la imagen de la frontera del rectángulo D (véase el ap. 1.1, cap. quinto). Así, pues, no nos queda más que estudiar la imagen de la frontera del rectángulo D.

Partiremos de la fórmula

$$\wp(x+iy)=\frac{1}{(x+iy)^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(x+iy-2m\alpha-2ni\beta)^2}-\frac{1}{(2m\alpha+2ni\beta)^2}\right].$$

De ésta se deduce que los valores $\wp(x+iy)$ y $\wp(x-iy)$ son números complejos conjugados. En efecto,

$$\overline{\wp(x-iy)}=\frac{1}{(x-iy)^2}+\sum{}'\left[\frac{1}{(x-iy-2m\alpha+2ni\beta)^2}-\frac{1}{(2m\alpha-2ni\beta)^2}\right].$$

Pero los números $2m\alpha-2ni\beta$ para todas las combinaciones posibles de números enteros m y n forman, evidentemente, el mismo conjunto de números (los períodos de la función $\wp(z)$) que los números

$2m\alpha + 2ni\beta$. Por ello, todos los términos de la última serie sólo se diferencian en el orden de los términos de la serie

$$\wp(x-iy) = \frac{1}{(x-iy)^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(x-iy-2m\alpha-2ni\beta)^2} - \frac{1}{(2m\alpha+2ni\beta)^2}\right]$$

y, por consiguiente,

$$\overline{\wp(x+iy)} = \wp(x-iy),$$

es decir, $\wp(x+iy)$ y $\wp(x-iy)$ son números complejos conjugados.

Hagamos aquí, en particular, $y=0$; obtendremos:

$$\overline{\wp(x)} = \wp(x),$$

es decir, $\wp(x)$ es un número real para cualquier x real.

Supongamos ahora que $z=\alpha-iy$. Entonces, por una parte

$$\overline{\wp(\alpha+iy)} = \wp(\alpha-iy),$$

y por otra,

$$\wp(\alpha+iy) = \wp(\alpha-iy),$$

puesto que los puntos $\alpha + iy$ y $\alpha - iy$ son simétricos respecto del semiperíodo $\omega_1 = \alpha$. Por esta razón, los valores $\wp(\alpha+iy)$ también son reales para cualquier y.

Observando que

$$\wp(x+i\beta) = \wp(x-i\beta)$$

(puesto que $2i\beta$ es el período de la función $\wp(z)$), sacamos la conclusión de que los valores $\wp(x+i\beta)$ también son reales para cualquier x.

Finalmente, como

$$\wp(iy) = \wp(-iy)$$

(puesto que la función $\wp(z)$ es par), hallamos que todos los valores $\wp(iy)$ son reales.

Por lo tanto, observamos que la función $\wp(z)$ toma valores reales en los lados del rectángulo de períodos y en sus líneas medias. En particular, todos los valores que toma la función $\wp(z)$ en los lados del rectángulo D son reales. Por ello, cuando el punto z describe el contorno del rectángulo D en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, comenzando desde el vértice $z = 0$; el punto $w = \wp(z)$ se mueve de un modo determinado sobre el eje real, comenzando desde $\wp(0) = \infty$ y terminando en este mismo punto. Además, $w = \wp(z)$ se desplaza todo el tiempo hacia un mismo lado, es decir, no pasa dos veces por un mismo punto. Esto se debe a que los valores de $\wp(z)$ en el contorno del rectángulo D se toman también una vez en cada una de las partes de sus líneas medias y de sus lados que no pertenecen a D. Por lo tanto, variando continuamente desde $-\infty$ hasta ∞, el punto $w = \wp(z)$ tiene

que describir una sola vez tódo el eje real. Para los valores reales $z = x$ próximos a cero, en la expresión de $\wp(x)$ predomina el término $\frac{1}{x^2}$, de donde se deduce que el punto w parte de $+\infty$ y se mueve luego por el eje real dirigiéndose hacia $-\infty$ $\left(\text{cuando } z = iy \text{ e } y\right.$ es próximo a cero, entonces en la expresión de $\wp(iy)$ predomina el término $\left.-\frac{1}{y^2}\right)$, pasando por los puntos intermedios siguientes

$$\wp(\omega_1) = \wp(\alpha) = e_1, \quad \wp(\omega_2) = \wp(\alpha+\beta i) = e_2, \quad \wp(\omega_3) = \wp(\beta i) = e_3.$$

en el orden en que están escritos. Como este orden es de decrecimiento, en el caso dado se tiene:

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

Como el contorno del rectángulo D se transforma en el eje real, este rectángulo se transforma en un semiplano. Pero el rectángulo D

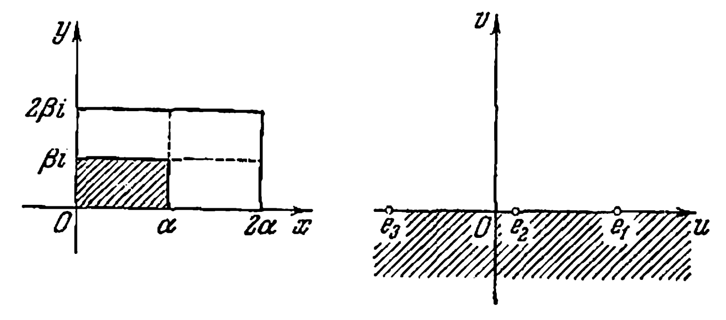


FIG. 46.

queda a la izquierda del observador que recorre su contorno en el sentido indicado. Por lo tanto, el semiplano correspondiente tiene que quedar a la izquierda del observador que recorre el eje real en dirección de decrecimiento, es decir, éste es el semiplano inferior. Por consiguiente, hemos demostrado que *la función* $w = \wp(z)$, *de períodos fundamentales* 2α *y* $2\beta i$, *transforma conformemente el rectángulo* $0 < x < \alpha$, $0 < y < \beta$ *en el semiplano inferior* (fig. 46).

Como $\wp(z)$ toma valores iguales en los puntos que son simétricos respecto de los semiperíodos, sacamos la conclusión de que esta función toma dos veces todos los valores reales del intervalo $(e_1, +\infty)$ en el lado del paralelogramo fundamental $0 \leqslant x \leqslant 2\alpha$, $y = 0$, toma dos veces los valores del intervalo (e_2, e_1) en la línea media $x = \alpha$, $0 \leqslant y \leqslant 2\beta$, toma dos veces los valores del intervalo

(e_3, e_2) en la línea media $0 \leqslant x \leqslant 2\alpha$, $y = \beta$, y, finalmente, toma dos veces los valores reales del intervalo $(-\infty, e_3)$ en el lado $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 2\beta$.

Como $\wp(z)$ es una función de segundo orden, en todos los demás puntos del paralelogramo fundamental ésta toma valores imagina-

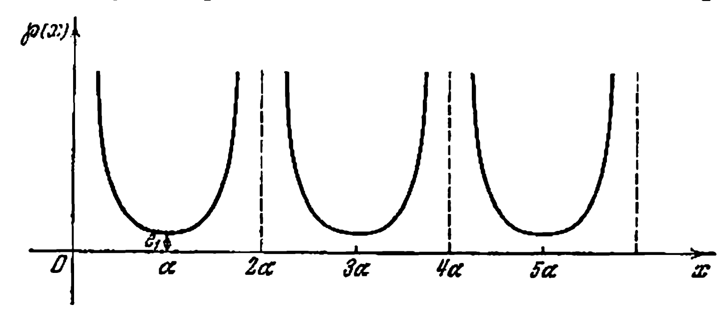


FIG. 47.

rios. En las figuras 47—50 están representadas las gráficas de las funciones $\wp(x)$, $\wp(\alpha + iy)$, $\wp(x + i\beta)$, $\wp(iy)$, las cuales dan una idea completa de todos los valores reales de la función $\wp(z)$ en el caso en que uno de los períodos fundamentales es real y el

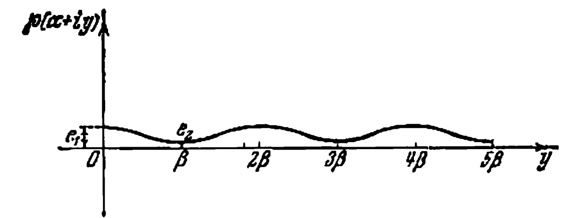


FIG. 48.

otro imaginario puro. Naturalmente, hay que tener presente que la función, por ser periódica, toma estos mismos valores en un conjunto infinito de rectas paralelas al eje real o imaginario.

Veamos ahora el caso en que $\wp(z)$ posee un par de períodos conjugados $2\omega_1 = 2a - 2bi$ y $2\omega_3 = 2a + 2bi$. Entonces, los paralelogramos de períodos son rombos cuyas diagonales son paralelas al eje real e imaginario, respectivamente.

En este caso $\wp(z)$ también posee un período real $4a = 2\omega_3 + 2\omega_1$ y un período imaginario puro $4bi = 2\omega_3 - 2\omega_1$. Pero, a

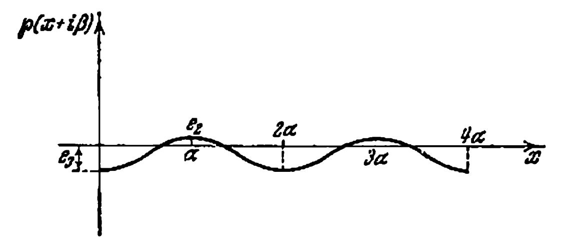


FIG. 49.

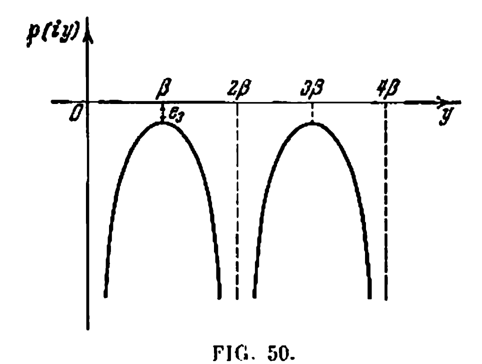


FIG. 50.

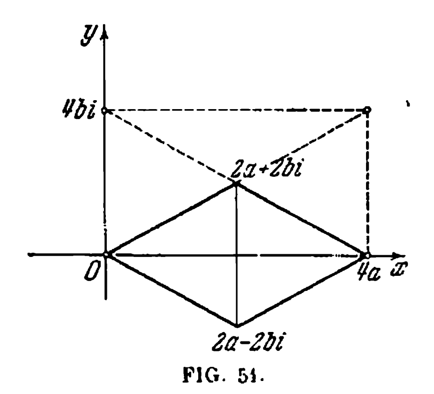


FIG. 51.

diferencia del caso anterior, estos períodos no son fundamentales, puesto que el rectángulo construido sobre los lados $4a$ y $4bi$ contienen en su interior (en su centro) un período, precisamente $2a + 2bi$ (fig. 51).

De un modo semejante a lo que se hizo anteriormente, de la fórmula

$$\wp(x+iy)=\frac{1}{(x+iy)^2}+\sum{}'\left\{\frac{1}{[x+iy-2(a-bi)m-2(a+bi)n]^2}-\frac{1}{[2(a-bi)m+2(a+bi)n]^2}\right\}$$

deducimos que

$$\overline{\wp(x+iy)}=\wp(x-iy).$$

De aquí, en particular, se deduce que

$$\overline{\wp(x)}=\wp(x),$$

es decir, que $\wp(x)$ es real para cualquier x.

Por otra parte,

$$\overline{\wp(2a+iy)}=\wp(2a-iy) \quad \text{y} \quad \wp(2a+iy)=\wp(3a-iy)$$

(puesto que los puntos $2a+iy$ y $2a-iy$ son simétricos respecto del semiperíodo $\omega_2=2a$). Por ello $\wp(2a+iy)$ también toma

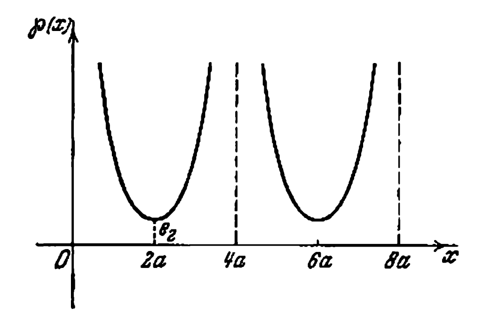


FIG. 52.

valores reales para cualesquiera y. Así, pues, $\wp(z)$ toma valores reales en cada una de las diagonales del rombo. En el segmento $0 \leqslant x \leqslant 2a$, $y=0$ decrece desde $+\infty$ hasta $\wp(\omega_2)=\wp(2a)=e_2$ y después en el segmento $x=2a$, $0 \leqslant y \leqslant 2b$ continúa decreciendo desde e_2 hasta $-\infty$. De aquí se deduce que $\wp(z)$ toma dos veces

cada valor real mayor que e_2 en la diagonal del paralelogramo fundamental situada en el eje real, y toma también dos veces cada valor real menor que e_2 en la diagonal del paralelogramo (del rombo) que es perpendicular al eje real. Por lo tanto, en los puntos del paralelogramo fundamental que no están situados en la diagonal,

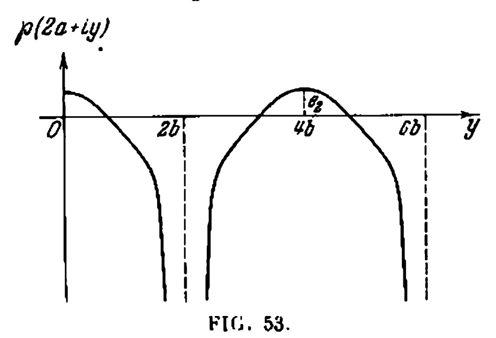


FIG. 53.

esta función toma valores imaginarios. En particular, son imaginarios y, además, conjugados, los números

$$e_1 = \wp(\omega_1) = \wp(a - bi) \quad \text{y} \quad e_3 = \wp(\omega_3) = \wp(a + bi).$$

Como $\wp(z)$ es periódica, en el eje imaginario esta función también toma valores reales

$$\wp(iy) = \wp[2a + i(y + 2b)].$$

En las figuras 52—53 están representadas las gráficas de $\wp(x)$ y $\wp(2a + iy)$.

6.4. De la fórmula (6.3:5) es fácil obtener el desarrollo de la función $\wp(z)$ en serie de Laurent en un entorno del origen de coordenadas. Con este fin, desarrollemos la función $\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2}$ $(\Omega \neq 0)$ en serie de potencias de z:

$$\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} = \frac{1}{\Omega^2}\left[\left(1 - \frac{z}{\Omega}\right)^{-2} - 1\right] = \sum_1^{\infty} \frac{n+1}{\Omega^{n+2}} z^n.$$

La última serie es convergente en el círculo $|z| < |\Omega|$. De aquí se desprende para $\wp(z)$ el siguiente desarrollo en serie de potencias de z

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left[\frac{2z}{\Omega^3} + \frac{3z^2}{\Omega^4} + \ldots + \frac{(n+1)z^n}{\Omega^{n+2}} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{z^2} + 2\sum{}' \frac{1}{\Omega^3} z + 3\sum{}' \frac{1}{\Omega^4} z^2 + \ldots (n+1) \sum{}' \frac{1}{\Omega^{n+2}} z^n + \ldots$$

el cual es convergente en el recinto $0 < |z| < \delta$ (δ es el menor de los módulos de los períodos distintos de cero; la reducción de los términos semejantes es legítima, debido a lo dicho en el ap. 7.1, cap. III).

Como la función $\wp(z)$ es par, todos los coeficientes de las potencias impares de z tienen que ser iguales a cero. Por ello

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \ldots + c_{2m} z^{2m} + \ldots, \qquad (6.4:1)$$

donde

$$c_{2m} = (2m+1) \sum{}' \frac{1}{\Omega^{2m+2}}. \qquad (6.4:2)$$

Derivando término a término (6.4:1), tendremos:

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2c_2 z + 4c_4 z^3 + \ldots + 2mc_{2m} z^{2m-1} + \ldots \qquad (6.4:3)$$

Apliquemos los desarrollos hallados para obtener una relación algebraica entre $\wp(z)$ y $\wp'(z)$. El método que utilizaremos consiste en formar una combinación racional sencilla de las funciones $\wp(z)$ y $\wp'(z)$ que no tenga polos en el paralelogramo fundamental. Tal combinación, si se consigue construirla, tiene que ser una función elíptica sin polos y, por lo tanto, constante (teorema 1, ap. 6.2). Escribiendo esto, obtendremos la relación pedida. Observando que la parte principal del desarrollo de $\wp'(z)$ es $-\frac{2}{z^3}$ y que la parte principal del desarrollo de $\wp(z)$ es $\frac{1}{z^2}$, formemos primero la combinación

$$[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3.$$

Reemplazando aquí $\wp'(z)$ y $\wp(z)$ por sus expresiones (6.4:1) y (6.4:3) y elevando a las potencias indicadas las series absolutamente convergentes respectivas, hallaremos que

$$[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 = \left(\frac{4}{z^6} - \frac{8c_2}{z^2} - 16c_4 + \ldots\right) - \\ -4\left(\frac{1}{z^6} + \frac{3c_2}{z^2} + 3c_4 + \ldots\right) = -\frac{20c_2}{z^2} - 28c_4 - \ldots$$

(los términos no escritos contienen potencias no negativas de z).

Añadiendo a la expresión considerada el término $20c_2\wp(z)$, resulta:

$$[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 + 20c_2\wp(z) = -28c_4 + \ldots$$

Esta es la combinación pedida. El primer miembro representa una función elíptica que no tiene polos en el paralelogramo funda-

mental de períodos. Por consiguiente, ésta es una constante. Pero, como muestra el segundo miembro, para $z = 0$ el valor de la función es $-28c_4$. Por la tanto,

$$[\wp'(z)]^2 - 4[\wp(z)]^3 + 20c_2\wp(z) = -28c_4,$$

o sea,

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)]^3 - 20c_2\wp(z) - 28c_4.$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial de primer orden, a la cual satisface $\wp(z)$. Los coeficientes $20c_2$ y $28c_4$ se designan con g_2 y g_3, respectivamente, y se llaman *invariantes* de la función $\wp(z)$.

La última denominación se debe a que g_2 y g_3 no dependen de la forma en que se hayan elegido los períodos fundamentales de la función $\wp(z)$.

En efecto, de las fórmulas (6.4:2) se deduce que

$$g_2 = 20c_2 = 60\sum{}'\frac{1}{\Omega^4}, \quad g_3 = 28c_4 = 140\sum{}'\frac{1}{\Omega^6}, \qquad (6.4:4)$$

o sea, g_2 y g_3 se expresan en forma de sumas de series absolutamente convergentes (véase el lema del ap. 6.3), extendidas al conjunto de todos los períodos de la función $\wp(z)$ que son distintos de cero. Mas este último conjunto es el mismo para cualquier par de períodos fundamentales de esta función que sean elegidos.

Escribamos definitivamente la ecuación obtenida en la forma

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3 \qquad (6.4:5)$$

o bien, haciendo $\wp(z) = w$,

$$\left[\frac{dw}{dz}\right]^2 = 4w^3 - g_2w - g_3. \qquad (6.4:5')$$

La ecuación hallada se puede expresar en otra forma. Obsérvese que $\wp'(z)$ posee los ceros ω_1, ω_2, ω_3. Por consiguiente, el polinomio $4w^3 - g_2w - g_3$ tiene que anularse para $w_j = \wp(\omega_j) = e_j$ ($j = 1, 2, 3$). Por ello

$$4w^3 - g_2w - g_3 = 4(w - e_1)(w - e_2)(w - e_3), \qquad (6.4:6)$$

y, por consiguiente, la ecuación (6.4:5) adquiere la forma

$$[\wp'(z)]^2 = 4[\wp(z) - e_1][\wp(z) - e_2][\wp(z) - e_3].$$

Como e_1, e_2 y e_3 son números distintos entre sí, el discriminante de la ecuación cúbica

$$4w^3 - g_2w - g_3 = 0$$

tiene que ser distinto de cero, es decir

$$\Delta = \frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2) = (e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 (e_1 - e_2)^2 \neq 0 \text{*)}. \qquad (6.4:7)$$

Obsérvense también las siguientes fórmulas que se desprenden de las relaciones (6.4:5) y (6.4:6):

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= 0, \\ e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 &= -\frac{g_2}{4}, \\ e_1e_2e_3 &= \frac{g_3}{4}. \end{aligned} \qquad (6.4:8)$$

La ecuación (6.4:5′) proporciona para cada w dos valores de w' que se diferencian entre sí sólo en el signo. Esto último concuerda con el hecho de que $\wp(z)$ no varía al sustituir z por $-z$, mientras que $\wp'(z)$ cambia el signo. No obstante, $\wp'(z)$ es una función uniforme de z. Por ello, en la relación

$$\wp'(z) = \sqrt{4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3} \qquad (6.4:9)$$

entre los dos valores de la raíz cuadrada se debe elegir cada vez uno de ellos (el que da el valor de $\wp'(z)$).

Consideremos alguna curva rectificable γ que una algún punto z_0 con otro punto z y que no pase por los polos de la función $\wp(z)$. Escribiendo (6.4:9) en la forma

$$dz = \frac{d\wp(z)}{\sqrt{4[\wp'(z)]^3 - g_2\wp'(z) - g_3}}$$

e integrando a lo largo de γ, obtenemos:

$$z - z_0 = \int_\gamma \frac{d\wp(z)}{\sqrt{4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) = g_3}}.$$

Si la imagen de la curva γ en el plano w es la curva $\wp(\gamma) = \Gamma$, la cual une los puntos $w_0 = \wp(z_0)$ y $w = \wp(z)$, entonces la última expresión puede también representarse en forma de la integral a lo largo de Γ:

$$z - z_0 = \int_{w_0}^{w} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}.$$

Esta integral determina una función multiforme de w. En efecto, el valor de la integral a lo largo de distintos caminos Γ que unan w_0

*) Véase, por ejemplo, A. G. Kurosch, Curso de álgebra superior, Editorial Mir, Moscú 1968, págs. 352—354.

y w siempre será el mismo, si los caminos en cuestión pertenecen a un mismo recinto simplemente conexo que no contenga a los puntos singulares de la función subintegral e_1, e_2 y e_3 (en cada uno de estos puntos la expresión subradical se anula). Mas no se puede afirmar ya que los valores de las integrales serán iguales para dos caminos entre los cuales esté situado uno o varios puntos e_j ($j = 1, 2, 3$), pues a un mismo valor de $w = \wp(z)$ le corresponde un conjunto infinito de valores distintos de z. Todos ellos están contenidos en la fórmula

$$z = \pm z' + 2m\omega_1 + 2n\omega_3,$$

donde z' es alguno de los w-puntos de la función $\wp(z)$, y m y n son números enteros arbitrarios. Uniendo z_0 con uno de estos puntos z de la curva rectificable γ y tomando la integral desde $\frac{1}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}$ a lo largo de la imagen $\wp(\gamma) = \Gamma$ de esta curva, obtenemos como valor de la integral el número correspondiente $z - z_0$.

Cuando z_0' tiende a cero, $w_0 = \wp(z_0)$ tiende a ∞ y como la integral impropia

$$\int_{\infty}^{w} \frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}$$

es convergente, resulta

$$z = \int_{\infty}^{w} \frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}. \qquad (6.4:10)$$

En esta igualdad $w = \wp(z)$ y el valor de la raíz cuadrada bajo el signo integral tiene que coincidir con $\wp'(z)$. De la fórmula (6.4:10) se deduce que la función $\wp(z)$ es inversa respecto de la integral (6.4:10). Esta última se llama integral elíptica de primera especie en la forma normal de Weierstrass.

En general, se llaman integrales elípticas las de la forma

$$\int_{w_0}^{w} R\left(t, \sqrt{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4}\right) dt,$$

donde $R(t, \tau)$ es una función racional y el polinomio bajo el signo de la raíz cuadrada es un polinomio de cuarto grado ($a_4 \neq 0$) o de tercer grado ($a_4 = 0$, $a_3 \neq 0$).

La denominación de integrales elípticas es debida a que la longitud del arco de la elipse se expresa por ellas. En efecto, la longitud del arco de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ se expresa por la integral

$$l=\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^x \sqrt{\frac{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}{a^2-x^2}}\,dx=a\int_0^{\frac{x}{a}}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt=$$

$$=a\int_0^{\frac{x}{a}}\frac{1-k^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt.$$

donde

$$k^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}.$$

Esta es una integral e l í p t i c a.

De las integrales, la denominación citada se extendió a las funciones que son inversas respecto de las integrales elípticas.

Poniendo en la fórmula (6.4:10) $z=\omega_j$ y observando que $w=\wp(\omega_j)=e_j$, resulta:

$$\omega_j=\int_\infty^{e_j}\frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}}\qquad (j=1,\ 2,\ 3).\qquad (6.4:11)$$

En estas fórmulas se deben tomar como caminos de integración las imágenes de cualesquiera curvas rectificables que unan el punto $z=0$ con los puntos ω_1, ω_2 y ω_3, respectivamente. Si en ellas se emplean caminos de integración arbitrarios que unan el punto ∞ con el punto e_j, entonces en el primer miembro resultarán distintos semiperíodos de la forma $\omega_j+2m\omega_1+2n\omega_3$, donde m y n son números enteros arbitrarios. En este caso, la elección de tal o cual valor de la raíz cuadrada no es esencial, puesto que esto solamente influye en el signo del semiperíodo.

6.5. En el ap. 6.4 se demostró que cada función $w=\wp(z)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=4w^3-g_2w-g_3,$$

donde g_2 y g_3 son los invariantes de $\wp(z)$.

Empleando esto se demuestra fácilmente que los invariantes determinan unívocamente la función $\wp(z)$, es decir, que no pueden existir dos funciones distintas $\wp(z)$ con unos mismos invariantes. Está claro que es suficiente establecer la unicidad de la solución

analítica de la ecuación dada que satisface a la condición inicial $\varphi(0) = \infty$.

En efecto, sea z_0 algún punto que no sea semiperíodo de $\wp(z)$ y sea $w = \varphi(z)$ una función analítica en un entorno de z_0 que satisfaga a la ecuación en cuestión y a la condición inicial $\varphi(0) = \infty$. Entonces ésta puede expresarse en la forma:

$$\varphi(z) = \wp[s(z)],$$

donde $s(z) = \wp^{-1}\varphi(z)$ es una función analítica en un entorno de z_0. Se tiene:

$$\left[\frac{d\wp(s)}{ds}\right] = 4[\wp(s)]^3 - g_2\wp(s) - g_3,$$

pues $\wp(z)$, según la condición, es solución de la ecuación dada. Por otra parte, $\varphi(z)$ satisface a la misma ecuación; por ello

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 = \left[\frac{d\wp(s)}{ds}\right]^2 \left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = 4[\wp(s)]^3 - g_2\wp(s) - g_3.$$

Comparando ambos resultados obtenemos: $\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 = 1$, de donde $s = \pm z + C'$ y, por consiguiente,

$$\varphi(z) = \wp(\pm z + C') = \wp(z + C).$$

Si se exige que la función $\varphi(z)$ satisfaga además a la condición $\varphi(0) = \infty$, entonces resulta que C es un período de la función $\wp(z)$, o sea,

$$\varphi(z) \equiv \wp(z).$$

Ahora surge la siguiente pregunta natural: ¿se puede afirmar que a cualquier ecuación diferencial de primer orden

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 = 4w^3 - g''w - g''',$$

donde g'' y g''' son unos números complejos dados, siempre satisface alguna función elíptica de Weierstrass $w = \wp(z)$? Evidentemente, a los números g'' y g''' es necesario imponer una restricción, a la cual tienen que someterse los invariantes de la función de Weierstrass, a saber:

$$g''^3 - 27g'''^2 \neq 0.$$

¿Pero es suficiente sólo esta condición?

La resolución de esta cuestión representa el llamado p r o b l e m a d e l a i n v e r s i ó n d e u n a i n t e g r a l e l í p t i -

ca. En efecto, se trata de demostrar que la función inversa de la integral elíptica

$$z=\int_{\infty}^{w}\frac{dt}{\sqrt{4t^3-g''t-g'''}},$$

es una función elíptica $w = \wp(z)$ con los invariantes g'' y g'''.

El problema de la inversión quedaría resuelto si demostrásemos la existencia de unos números complejos $2\omega'$ y $2\omega'''$, cuya razón no sea un número real y que satisfagan a las ecuaciones:

$$g''=60\sum{}'\frac{1}{(2m\omega'+2n\omega''')^4},\quad g'''=140\sum{}'\frac{1}{(2m\omega'+2n\omega''')^6}.$$

En efecto, construyendo una función $\wp(z)$ de períodos fundamentales $2\omega'$ y $2\omega'''$, podríamos afirmar que sus invariantes coinciden con los números dados g'' y g''' y que, por consiguiente, satisface a la ecuación diferencial propuesta.

Aquí nos limitaremos a resolver el problema de la inversión en el caso más sencillo y, a la vez, más importante para las aplicaciones, en que g'' y g''' son números reales.

Se distinguirán dos casos:

$$\text{a)}\quad \Delta=\frac{1}{16}(g''^3-27g'''^2)>0,\qquad \text{b)}\quad \Delta=\frac{1}{16}(g''^3-27g'''^2)<0.$$

En el caso a) todas las raíces de la ecuación

$$4t^3-g''t-g'''=0$$

son reales y distintas. Designémoslas mediante e', e'', e''', eligiendo estas notaciones de tal modo que se cumplan las desigualdades

$$e'>e''>e'''.$$

Observando que el polinomio

$$4t^3-g''t-g'''=4(t-e')(t-e'')(t-e''')$$

toma valores reales para t real y, además, positivos si $t>e'$ y negativos si $t<e'''$, hagamos:

$$\left.\begin{aligned}\omega'&=\int_{+\infty}^{e'}\frac{dt}{-\underset{+}{\sqrt{4t^3-g''t-g'''}}}=\int_{e'}^{+\infty}\frac{dt}{2\sqrt{(t-e')(t-e'')(t-e''')}},\\ \omega'''&=\int_{-\infty}^{e'''}\frac{dt}{-i\underset{+}{\sqrt{-4t^3+g''t+g'''}}}=i\int_{-\infty}^{e'''}\frac{dt}{2\underset{+}{\sqrt{-(t-e')(t-e'')(t-e''')}}}.\end{aligned}\right\}\tag{6.5:1}$$

Evidentemente, ω' es un número real positivo, mientras que ω''' es un número imaginario puro con la parte imaginaria positiva. Tomemos ω' y ω''' por semiperíodos de la función elíptica $\wp(z)$ y demostremos que esta función representa la solución del problema planteado, es decir, que posee los invariantes g'' y g'''.

Transformemos previamente las fórmulas (6.5:1). En la primera de ellas introducimos una nueva variable $\tau > 0$ bajo el signo de la integral según la fórmula

$$t = e''' + \frac{e' - e'''}{\tau^2}.$$

Observando que a los límites de integración e' y ∞ las corresponden ahora los límites nuevos 1 y 0, obtenemos:

$$\omega' = \int_1^0 \frac{-2\frac{e'-e'''}{\tau^3}\,d\tau}{2\underset{+}{\sqrt{(e'-e''')^3(1-\tau^2)\left(1-\frac{e''-e'''}{e'-e'''}\tau^2\right):\tau^6}}} =$$

$$= \frac{1}{\underset{+}{\sqrt{e'-e'''}}}\int_0^1 \frac{d\tau}{\underset{+}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}},$$

donde

$$0 < k^2 = \frac{e''-e'''}{e'-e'''} < 1.$$

Análogamente, sustituyendo primero en la segunda de las fórmulas (6.5:1) t por $-t$, hallamos:

$$\omega''' = \frac{i}{2}\int_{-e'''}^{\infty} \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{(t+e')(t+e'')(t+e''')}}},$$

y después, haciendo

$$t = \frac{e'-e'''}{\tau^2} - e' \qquad (\tau > 0)$$

y efectuando los cálculos necesarios, obtenemos:

$$\omega''' = \frac{1}{\underset{+}{\sqrt{e'-e'''}}}\int_0^1 \frac{d\tau}{\underset{+}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}}},$$

donde

$$0 < k'^2 = \frac{e'-e''}{e'-e'''} = 1 - k^2 < 1.$$

De las fórmulas obtenidas se deduce que

$$\frac{i\omega'}{\omega'''}=\frac{\int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}}{\int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k'^2\tau^2)}}}.$$

Cuando k^2 crece desde 0 hasta 1, la integral que figura en el numerador crece desde $\int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=\frac{\pi}{2}$ hasta el infinito. En este caso $k'^2=1-k^2$ decrece desde 1 hasta 0 y, por consiguiente, el denominador decrece desde el infinito hasta $\frac{\pi}{2}$. De aquí que la razón $\frac{i\omega'}{\omega'''}$ crece desde 0 hasta ∞, pasando por todos los valores positivos cuando $k^2=\frac{e''-e'''}{e'-e'''}$ crece desde 0 hasta 1.

Por esta razón, a cualquier valor de la razón $\frac{i\omega'}{\omega'''}$, dado *a priori*, le corresponde un valor de k^2 comprendido entre 0 y 1, y sólo uno. Determinando k^2 por los valores dados de ω' y ω''', de la fórmula

$$\sqrt{e'-e'''}=\int\limits_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}:\omega'$$

hallamos $e'-e'''$. Por ello, se puede suponer conocido también $e''-e'''=(e'-e''')k^2$ y, finalmente, empleando la relación $e'+e''+e'''=0$, obtenemos cada uno de los números e', e'' y e'''. En resumen, dando *a priori* los valores de las integrales

$$\omega'=\int\limits_{+\infty}^{e'} \frac{dt}{-\sqrt{4t^3-g''t-g'''}} \quad \text{y} \quad \omega'''=i\int\limits_{-\infty}^{e'''} \frac{dt}{\sqrt{-(4t^3-g''t-g''')}}$$

(de modo que ω' y $\frac{\omega'''}{i}$ sean números positivos), podemos determinar unívocamente los valores de las raíces e', e'' y e''' de la ecuación $4t^3-g''t-g'''=0$ y, por consiguiente, también los valores de los coeficientes g'' y g'''. Utilizaremos esta observación para demostrar que los invariantes g_2 y g_3 de la función construida $\wp(z)$ coinciden con los números g'' y g''', con lo cual se termina la resolución del problema de la inversión en el caso considerado.

En el ap. 6.3 ya se estudió la función $\wp(z)$ con un período real y otro imaginario puro, y nos convencimos que $w=\wp(z)$ toma

valores reales y decrece desde ∞ hasta $e_1 = \wp(\omega')$ cuando varía a lo largo del eje real desde 0 hasta ω'.

Designando con g_2 y g_3 los invariantes de la función $\wp(z)$ y observando que $\wp'(z)$ toma valores reales negativos para $0 < z = x < \omega'$, obtenemos:

$$\wp'(x) = -\underset{+}{\sqrt{4[\wp(x)]^3 - g_2\wp(x) - g_3}},$$

de donde

$$\omega' = \int_{-\infty}^{e_1} \frac{dt}{-\underset{+}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}}.$$

Análogamente, $\wp(z)$ toma valores reales y crece desde $-\infty$ hasta e_3 cuando $z = iy$ varía desde 0 hasta ω''' a lo largo del eje imaginario. Además, la derivada $\frac{d\wp(z)}{dz} = -i\frac{d\wp(iy)}{dy}$ toma valores imaginarios puros con partes imaginarias negativas. Por lo tanto, para $z = iy$, donde $0 < y < \frac{\omega'''}{i}$, obtenemos:

$$\wp'(iy) = -i\underset{+}{\sqrt{-\{4[\wp(iy)]^3 - g_2\wp(iy) - g_3\}}},$$

de donde

$$\omega''' = i\int_{+\infty}^{e_3} \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g_2t - g_3)}}}.$$

Como, según lo demostrado, los valores de los coeficientes del polinomio subradical se determinan unívocamente por los valores de las integrales consideradas

$$\omega' = \int_{+\infty}^{e'} \frac{dt}{-\underset{+}{\sqrt{4t^3 - g''t - g'''}}} = \int_{+\infty}^{e_1} \frac{dt}{-\underset{+}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}},$$

$$\omega''' = i\int_{-\infty}^{e'''} \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g''t - g''')}}} = i\int_{-\infty}^{e_3} \frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g_2t - g_3)}}},$$

resulta $g_2 = g''$ y $g_3 = g'''$, con lo que se termina la demostración en el caso a).

Consideremos ahora el caso b). Aquí la ecuación

$$4t^3 - g''t - g''' = 0$$

tiene que tener una raíz real e'' y dos raíces imaginarias conjugadas e' y e'''.

Elijamos las notaciones de tal manera que la parte imaginaria de la raíz e''' sea positiva. Observando que el polinomio

$$4t^3-g''t-g'''=4(t-e')(t-e'')(t-e''')$$

toma valores reales para t real y, además, positivos si $t>e''$ y negativos si $t<e''$, hagamos:

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\int\limits_{+\infty}^{e''}\frac{dt}{-\underset{+}{\sqrt{4t^3-g''t-g'''}}}=\int\limits_{e''}^{\infty}\frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{4t^3-g''t-g'''}}}\\ &\text{y}\\ \beta i&=\int\limits_{-\infty}^{e''}\frac{dt}{-i\underset{+}{\sqrt{-(4t^3-g''t-g''')}}}=i\int\limits_{-\infty}^{e''}\frac{dt}{\underset{+}{\sqrt{-(4t^3-g''t-g''')}}}\,.\end{aligned}\right\}\qquad(6.5:2)$$

Aquí α y β son números reales y positivos. Construyamos una función elíptica $\wp(z)$ de períodos $2\omega'=\alpha-i\beta$ y $2\omega'''=\alpha+i\beta$ y demostremos que ésta representa la solución del problema de inversión planteado, es decir, que posee los invariantes g'' y g'''.

Transformemos previamente las fórmulas (6.5:2). Hagamos en la primera de ellas la sustitución de la variable

$$t=e''+\tau^2\qquad(\tau>0).$$

Obtendremos:

$$\alpha=\int\limits_0^{\infty}\frac{2\tau\,d\tau}{2\underset{+}{\sqrt{\tau^2(\tau^2+e''-e')(\tau^2+e''-e''')}}}=\int\limits_0^{\infty}\frac{d\tau}{\underset{+}{\sqrt{(\tau^2+e''-e')(\tau^2+e''-e''')}}}.$$

Hagamos $e''-e'=\rho e^{i\varphi}$ y, por consiguiente, $e''-e'''=\rho e^{-i\varphi}$, donde $0<\varphi<\pi$. Entonces tendremos:

$$\alpha=\int\limits_0^{\infty}\frac{d\tau}{\underset{+}{\sqrt{\tau^4+2\rho\tau^2\cos\varphi+\rho^2}}},$$

o finalmente, haciendo $\tau=\sqrt{\rho}\,t$:

$$\alpha\sqrt{\rho}=\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{t^4+2t^2\cos\varphi+1}}.$$

Del mismo modo, sustituyendo primero en la segunda de las fórmulas (6.5:2) t por $-t$, hallamos:

$$\beta=\int\limits_{-e''}^{\infty}\frac{dt}{2\sqrt{(t+e')(t+e'')(t+e''')}},$$

y haciendo después

$$t = -e'' + \tau^2 \qquad (\tau > 0)$$

y efectuando los cálculos necesarios, obtenemos:

$$\beta = \int_0^\infty \frac{2\tau\, d\tau}{2\sqrt{\tau^2(\tau^2+e'-e'')(\tau^2+e'''-e'')}} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{[\tau^2-(e''-e')][\tau^2-(e''-e''')]}} = \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^4-2\rho\tau^2\cos\varphi+\rho^2}}\, .$$

Finalmente, haciendo aquí $\tau = \sqrt{\rho}\, t$, resulta:

$$\beta\sqrt{\rho} = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^4-2t^2\cos\varphi+1}}\, .$$

De las fórmulas halladas se deduce que

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^4+2t^2\cos\varphi+1}}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^4-2t^2\cos\varphi+1}}}\, .$$

Si φ varía en el segundo miembro desde 0 hasta π, $\cos\varphi$ decrece desde 1 hasta -1 y, por consiguiente, la integral que figura en el numerador crece desde $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ hasta el infinito y la integral que figura en el denominador decrece desde ∞ hasta $\frac{\pi}{2}$. De aquí se deduce que la razón $\frac{\alpha}{\beta}$ crece desde 0 hasta ∞ y, por consiguiente, a cada valor de la razón $\frac{\alpha}{\beta}$, dado *a priori*, le corresponde un valor único φ entre los límites 0 y π.

Determinando φ por los valores dados de α y β y poniéndolo en la expresión de α, hallamos:

$$\sqrt{\rho} = \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^4+2t^2\cos\varphi+1}} : \alpha.$$

Por consiguiente, los valores de ρ y φ se determinan unívocamente por los valores dados de α y β. Por lo tanto, se determinan unívocamente las diferencias $e''-e'$ y $e''-e'''$ y luego, mediante

la relación $e' + e'' + e''' = 0$, todas las tres raíces e', e'' y e''' de la ecuación $4t^3 - g''t - g''' = 0$ y, finalmente, sus coeficientes g'' y g'''.

En resumen, dando *a priori* los valores de las integrales

$$\alpha = \int_{+\infty}^{e''} \frac{dt}{-\overset{+}{\sqrt{4t^3 - g''t - g'''}}} \quad y \quad i\beta = i \int_{-\infty}^{e''} \frac{dt}{\overset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g''t - g''')}}},$$

(de modo que α y β sean números positivos) se pueden determinar unívocamente los coeficientes g'' y g''' del polinomio $4t^3 - g''t - g'''$. Utilizaremos esta observación para demostrar que los invariantes g_2 y g_3 de la función analítica que hemos construido coinciden con los números dados g'' y g'''.

En el ap. 6.3 ya se estudió la función $\wp(z)$ en el caso en que ésta tiene un par de períodos fundamentales conjugados $\alpha - i\beta$ y $\alpha + i\beta$, y nos convencimos que $w = \wp(z)$ toma valores reales y decrece desde $+\infty$ hasta $e_2 = \wp(\alpha)$ cuando $z = x$ recorre el segmento del eje real desde 0 hasta α. Observando que la derivada $\wp'(x)$ tiene que tener en este caso valores reales negativos, obtenemos:

$$\wp'(x) = -\overset{+}{\sqrt{4[\wp(x)]^3 - g_2\wp(x) - g_3}},$$

de donde

$$\alpha = \int_{+\infty}^{e_2} \frac{dt}{-\overset{+}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}}.$$

Análogamente, $\wp(z)$ toma valores reales y decrece desde e_2 hasta $-\infty$ cuando $z = \alpha + iy$ recorre el segmento de la recta paralela al eje imaginario desde el punto α hasta el punto $\alpha + i\beta$. Además, la derivada

$$\frac{d\wp(z)}{dz} = -i\frac{d\wp(\alpha + iy)}{dy}$$

toma valores imaginarios puros con la parte imaginaria positiva. Por ello, para $z = \alpha + iy$, donde $0 < y < \beta$:

$$\wp'(\alpha + iy) = i\overset{+}{\sqrt{-\{4[\wp(\alpha + iy)]^3 - g_2\wp(\alpha + iy) - g_3\}}},$$

de donde

$$i\beta = (\alpha + i\beta) - \alpha = i\int_{-\infty}^{e_2} \frac{dt}{\overset{+}{\sqrt{-(4t^3 - g_2t - g_3)}}}.$$

Como, según lo demostrado, los valores de los coeficientes del polinomio subradical se determinan unívocamente por los valores de las integrales consideradas

$$\alpha = \int_{+\infty}^{e''} \frac{dt}{-\sqrt{4t^3 - g''t - g'''}} = \int_{+\infty}^{e_2} \frac{dt}{-\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}},$$

$$i\beta = i \int_{-\infty}^{e''} \frac{dt}{\sqrt{-(4t^3 - g''t - g''')}} = i \int_{-\infty}^{e_2} \frac{dt}{\sqrt{-(4t^3 - g_2 t - g_3)}},$$

resulta $g_2 = g''$ y $g_3 = g'''$, con lo cual se termina la demostración.

Del estudio realizado se deduce, en particular, que si los invariantes g_2 y g_3 de la función $\wp(z)$ son números reales, entonces $\wp(z)$ posee o un par de períodos fundamentales, uno de los cuales es real y el otro imaginario puro (si el discriminante Δ es positivo), o posee un par de períodos fundamentales conjugados (si el discriminante es negativo). En efecto, en cada uno de estos casos $w = \wp(z)$ representa la in ersión de la integral elíptica

$$z = \int_{\infty}^{w} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$$

y, por consiguiente, según lo demostrado, o posee un par de períodos fundamentales de la forma

$$2\omega_1 = \int_{+\infty}^{e_1} \frac{dt}{-\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}} \quad \text{y} \quad 2\omega_3 = \int_{-\infty}^{e_3} \frac{dt}{-i\sqrt{-(4t^3 - g_2 t - g_3)}}$$

(cuando $\Delta > 0$), o es un par de períodos fundamentales de la forma

$$\alpha + i\beta = \int_{+\infty}^{e_2} \frac{dt}{-\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}} + i \int_{-\infty}^{e_2} \frac{dt}{\sqrt{-(4t^3 - g_2 t - g_3)}},$$

$$\alpha - i\beta = \int_{+\infty}^{e_2} \frac{dt}{-\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}} - i \int_{-\infty}^{e_2} \frac{dt}{\sqrt{-(4t^3 - g_2 t - g_3)}}$$

(cuando $\Delta < 0$).

Obsérvese, finalmente, que la condición de que sean reales ambos invariantes es necesaria y suficiente para que la función $\wp(z)$ tome valores reales en el eje real.

En efecto, si g_2 y g_3 son números reales, entonces, como acabamos de ver, $\wp(z)$ o posee un período fundamental real y el otro imaginario puro, o dos períodos fundamentales conjugados. En cada

uno de estos casos, como se mostró en el ap. 6.3, $\wp(z)$ toma valores reales en el eje real (y también en el eje imaginario).

Recíprocamente, si $\wp(z)$ toma valores reales en el eje real, entonces el polinomio

$$4[\wp(z)]^3 - g_2\wp(z) - g_3 = [\wp'(z)]^2$$

también toma valores reales para $z = x$. Por ello

$$\wp(x) \operatorname{Im} g_2 + \operatorname{Im} g_3 = 0$$

para todos los valores reales de x, de donde

$$\operatorname{Im} g_2 = \operatorname{Im} g_3 = 0,$$

o sea, g_2 y g_3 son números reales.

6.6. Si se comparan las funciones doblemente periódicas con las simplemente periódicas, entonces, como analogía de la función $\wp(z)$, la cual tiene un polo doble en cada uno de los períodos $\Omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$ con la parte principal $\frac{1}{(z-\Omega)^2}$, se puede señalar la función $\operatorname{cosec}^2 z$, la cual también posee un polo doble en cada uno de sus períodos $\omega = n\pi$ con la parte principal $\frac{1}{(z-\omega)^2}$. Entre las funciones trigonométricas hay también funciones más simples que $\operatorname{cosec}^2 z$ y que están estrechamente ligadas con esta función; tales son: $\operatorname{cotg} z$ con polos simples en cada uno de los períodos ω y con las partes principales correspondientes $\frac{1}{z-\omega}$, y $\operatorname{sen} z$ con ceros simples en cada uno de los períodos. En lo que se refiere a las relaciones de estas funciones con $\operatorname{cosec}^2 z$, dejando a un lado las relaciones algebraicas, se tiene, evidentemente:

$$(\operatorname{cotg} z)' = -\operatorname{cosec}^2 z \quad \text{y} \quad (\operatorname{Ln} \operatorname{sen} z)' = \operatorname{cotg} z.$$

Entre las funciones elípticas no pueden existir funciones con polos simples en los períodos (y que no tengan otros polos más), ni funciones enteras. Sin embargo, sin exigir que sean elípticas, se pueden construir funciones que estén ligadas con $\wp(z)$ del mismo modo que las funciones $\operatorname{cotg} z$ y $\operatorname{sen} z$ están ligadas con $\operatorname{cosec}^2 z$. Ahora nos dedicaremos a definir y analizar las funciones que son análogas a $\operatorname{cotg} z$ y $\operatorname{sen} z$, las cuales desempeñan un papel importante en todos los cálculos con funciones elípticas.

La función análoga a cotg z es la función $\zeta(t)$ theta-función de Weierstrass*), definida por las siguientes condiciones:

$$[\zeta(z)]' = -\wp(z) \quad \text{y} \quad \lim_{z\to 0}\left[\zeta(z)-\frac{1}{z}\right]=0. \qquad (6.6:1)$$

Esta función puede expresarse también en la forma:

$$\zeta(z)-\frac{1}{z}=-\int_0^z\left[\wp(z)-\frac{1}{z^2}\right]dz,$$

donde la integración se efectúa a lo largo de cualquier curva rectificable que no pase por los puntos $\Omega\neq 0$. Reemplazando $\wp(z)$ por su desarrollo en fracciones simples e integrando término a término, obtenemos:

$$\zeta(z)-\frac{1}{z}=-\int_0^z\sum{}'\left[\frac{1}{(z-\Omega)^2}-\frac{1}{\Omega^2}\right]dz=\sum{}'\left[\frac{1}{z-\Omega}+\frac{1}{\Omega}+\frac{z}{\Omega^2}\right],$$

o sea,

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum{}'\left[\frac{1}{z-\Omega}+\frac{1}{\Omega}+\frac{z}{\Omega^2}\right]. \qquad (6.6:2)$$

La función $\zeta(z)$ es meromorfa y tiene polos simples en los puntos $z=\Omega$ con las partes principales correspondientes $\frac{1}{z-\Omega}$.

Fácilmente se observa que $\zeta(z)$ es una función impar. En efecto,

$$[\zeta(z)+\zeta(-z)]'=\zeta'(z)-\zeta'(-z)=-\wp(z)+\wp(-z)\equiv 0$$

y, por consiguiente,

$$\zeta(z)+\zeta(-z)\equiv C,$$

o sea,

$$\left[\zeta(z)-\frac{1}{z}\right]+\left[\zeta(-z)+\frac{1}{z}\right]\equiv C.$$

Para $z\to 0$ el primer miembro tiende a 0; por consiguiente, $C=0$ y

$$\zeta(-z)=-\zeta(z). \qquad (6.6:3)$$

*) No hay que confundirla con otra theta-función que desempeña un papel importante en la teoría de los números y que se define mediante la serie de Dirichlet: $\zeta(z)=\sum_1^\infty \frac{1}{n^z}$ (esta serie es convergente en el semiplano Re $z>1$). Esta última función fue introducida en la ciencia por Euler; sin embargo, por tradición, esta función se llama ordinariamente theta-función de Riemann.

Obsérvese también que

$$[\zeta(z+2\omega_j)-\zeta(z)]'=\zeta'(z+2\omega_j)-\zeta'(z)=\wp(z)-\wp(z+2\omega_j)\equiv 0,$$

por lo cual

$$\zeta(z+2\omega_j)-\zeta(z)\equiv 2\eta_j \qquad (j=1,\ 2,\ 3), \qquad (6.6{:}4)$$

es decir, cuando z varía en $2\omega_j$ la función $\zeta(z)$ varía en una constante aditiva $2\eta_j$. Entre las cantidades $2\omega_j$ y $2\eta_j$ existen unas relaciones muy simples. Para deducirlas integraremos la función $\zeta(z)$ a lo largo del contorno γ del paralelogramo con los vértices $-\omega_2$, $\omega_1-\omega_3$, ω_2, $-\omega_1+\omega_3$. Como $\zeta(z)$ tiene en el interior de este paralelogramo un polo único $z=0$ con el residuo 1, se tiene:

$$\int_\gamma \zeta(z)\,dz=2\pi i.$$

Por otra parte, esta misma integral puede expresarse en forma de una suma de dos diferencias de integrales, extendidas a los pares de lados opuestos del paralelogramo:

$$\left[\int_0^1 \zeta(-\omega_1-\omega_3+2t\omega_1)\,2\omega_1\,dt-\int_0^1 \zeta(-\omega_1+\omega_3+2t\omega_1)\,2\omega_1\,dt\right]+$$

$$+\left[\int_0^1 \zeta(\omega_1-\omega_3+2t\omega_3)\,2\omega_3\,dt-\int_0^1 \zeta(-\omega_1-\omega_3+2t\omega_3)\,2\omega_3\,dt\right].$$

En virtud de (6.6:4) esto puede expresarse en la forma

$$-4\omega_1\eta_3+4\omega_3\eta_1,$$

de donde

$$2\omega_3\eta_1-2\omega_1\eta_3=\pi i. \qquad (6.6{:}5)$$

Observando que $2\omega_2=2\omega_1+2\omega_3$ y

$$2\eta_2=\zeta(z-2\omega_2)-\zeta(z)=[\zeta(z+2\omega_1+2\omega_3)-\zeta(z+2\omega_3)]+$$
$$+[\zeta(z+2\omega_3)-\zeta(z)]=2\eta_1+2\eta_3,$$

obtenemos de (6.6:5) las siguientes relaciones:

$$2\omega_1\eta_2-2\omega_2\eta_1=-\pi i, \quad 2\omega_2\eta_3-2\omega_3\eta_2=-\pi i. \qquad (6.6{:}5')$$

Las igualdades (6.6:5) y (6.6:5′) se llaman r e l a c i o n e s d e L e g e n d r e.

Construyamos ahora la función análoga a sen z. Esta función se representa por $\sigma(z)$ (sigma-función) y se define del modo siguiente:

$$\frac{d\,\mathrm{Ln}\,\sigma(z)}{dz}=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=\zeta(z) \quad \text{y} \quad \lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z}=1. \qquad (6.6:6)$$

Para esta función se tiene:

$$\mathrm{Ln}\frac{\sigma(z)}{z}=\int_0^z\left[\zeta(z)-\frac{1}{z}\right]dz=\sum{}'\left[\mathrm{Ln}\left(1-\frac{z}{\Omega}\right)+\frac{z}{\Omega}+\frac{z^2}{2\Omega^2}\right],$$

de donde

$$\sigma(z)=z\exp\left\{\int_0^z\left[\zeta(z)-\frac{1}{z}\right]dz\right\}=z\Pi'\left(1-\frac{z}{\Omega}\right)e^{\frac{z}{\Omega}+\frac{z^2}{2\Omega^2}}. \qquad (6.6:7)$$

Hemos obtenido un producto infinito, extendido a todos los $\Omega\neq 0$. De esta representación se ve que $\sigma(z)$ es una función entera con ceros simples en los puntos $\Omega=2n\omega_1+2m\omega_3$.

Su orden es igual a 2, puesto que el exponente de convergencia de la sucesión de sus ceros es igual a 2 (véase el ap. 5.3).

Obsérvese que

$$\sigma(-z)=-z\exp\left\{\int_0^{-z}\left[\zeta(z)-\frac{1}{z}\right]dz\right\}=-z\exp\left\{\int_0^{z}\left[\zeta(z)-\frac{1}{z}\right]dz\right\}$$

(aquí se tuvo en cuenta que la función $\zeta(z)$ es impar); por lo tanto,

$$\sigma(-z)=-\sigma(z), \qquad (6.6:8)$$

es decir, $\sigma(z)$ es una función impar.

De las fórmulas (6.6:6) y (6.6:4) se desprende que

$$\frac{\sigma'(z+2\omega_j)}{\sigma(z+2\omega_j)}-\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\equiv 2\eta_j \qquad (j=1,\ 2,\ 3),$$

de donde, integrando:

$$\mathrm{Ln}\,\frac{\sigma(z+2\omega_j)}{\sigma(z)}=2\eta_j z-c_j,$$

o sea

$$\sigma(z+2\omega_j)=\sigma(z)\,e^{2\eta_j z+c_j}.$$

Pongamos aquí $z=-\omega_j$; entonces, teniendo en cuenta que la función $\sigma(z)$ es impar, se tiene:

$$-1=e^{-2\eta_j\omega_j+c_j}.$$

Por consiguiente,

$$\sigma(z+2\omega_j) = -\sigma(z)\, e^{2\eta_j(z+\omega_j)} \qquad (j=1,\ 2,\ 3). \qquad (6.6:9)$$

En resumen, cuando z varía en $2\omega_j$ la función $\sigma(z)$ adquiere el factor exponencial.

6.7. Cualquier función elíptica puede expresarse en forma finita mediante las sigma- y theta-funciones. Aquí consideraremos las funciones elípticas de períodos fundamentales $2\omega_1$ y $2\omega_3$ y las funciones $\zeta(z)$ y $\sigma(z)$ que se construyeron partiendo de estos períodos fundamentales.

Teorema 1. *Sea $f(z)$ una función elíptica de orden n y sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sus ceros y polos, respectivamente, (escritos de acuerdo a sus órdenes de multiplicidad) pertenecientes al paralelogramo fundamental de períodos. Entonces*

$$f(z) = C\,\frac{\sigma(z-\alpha_1)\ldots\sigma(z-\alpha_n)}{\sigma(z-\beta_1)\ldots\sigma(z-\beta_n')}, \qquad (6.7:1)$$

donde C es una constante y $\beta_n' = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) - (\beta_1 + \ldots + \beta_{n-1})$ *).

Demostración. Como $\sigma(z)$ tiene polos simples en todos los puntos $\Omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_3$, la función $\sigma(z-c)$ tiene un polo simple en cada uno de los paralelogramos de períodos: en el punto c del paralelogramo fundamental y en todos los puntos que son congruentes a él. De aquí que

$$\varphi(z) = \frac{\sigma(z-\alpha_1)\ldots\sigma(z-\alpha_n)}{\sigma(z-\beta_1)\ldots\sigma(z-\beta_n')}$$

es una función meromorfa que tiene n ceros y n polos en cada uno de los paralelogramos de períodos de la función $f(z)$, los cuales son congruentes a los ceros y polos de la función $f(z)$ situados en el paralelogramo fundamental. Obsérvese que, en virtud del teorema 4, ap. 6.2, $\beta_n' - \beta_n = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) - (\beta_1 + \ldots + \beta_n)$ es uno de los períodos de la función $f(z)$ y, por consiguiente, β_n' es congruente con β_n. De aquí se deduce que los ceros y polos de la función $\varphi(z)$ coinciden con los ceros y polos de la función $f(z)$ en cada paralelogramo de períodos.

Cerciorémonos ahora de que $\varphi(z)$ es doblemente periódica y, por consiguiente, es una función elíptica. En efecto, según las fór-

---

*) Obsérvese que en el último factor del denominador en la fórmula (6.7:1) el número β_n se sustituye por β_n'. (*Nota del T.*)

mulas (6.6:9)

$$\varphi(z+2\omega_j)=\exp\{2\eta_j[(z-\alpha_1+\omega_j)+\ldots+(z-\alpha_n+\omega_j)-$$
$$-(z-\beta_1+\omega_j)-\ldots-(z-\beta'_n+\omega_j)]\}\varphi(z)=$$
$$=\exp\{2\eta_j[(\beta_1+\ldots+\beta'_n)-(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)]\}\varphi(z)=\varphi(z)$$
$$(j=1,\ 2,\ 3).$$

Por consiguiente, el cociente $f(z):\varphi(z)$ es una función elíptica sin ceros y polos, es decir, es una constante C. La fórmula (6.7:1) queda demostrada.

De la demostración misma se deduce que los puntos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta'_n$ se pueden sustituir por cualesquiera otros puntos congruentes, siempre que se cumplan las relaciones de igualdad entre la suma de los ceros considerados y la suma de los polos.

T e o r e m a 2. *Sea $f(z)$ una función elíptica, cuyos polos en el paralelogramo fundamental de períodos son los puntos $b_1, \ldots, b_r$ con los órdenes $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_r$ y las partes principales correspondientes:*

$$g_k(z)=\frac{A_1^{(k)}}{z-b_k}+\ldots+\frac{A_{\varkappa_k}^{(k)}}{(z-b_k)^{\varkappa_k}}.$$

Entonces

$$f(z)=C+\sum_{k=1}^{r}\left\{A_1^{(k)}\zeta(z-b_k)-\frac{A_2^{(k)}}{1!}\zeta'(z-b_k)+\right.$$
$$\left.+\frac{A_3^{(k)}}{2!}\zeta''(z-b_k)-\ldots+(-1)^{\varkappa_k-1}\frac{A_{\varkappa_k}^{(k)}}{(\varkappa_k-1)!}\zeta^{(\varkappa_k-1)}(z-b_k)\right\}, \quad (6.7:2)$$

donde C es una constante.

Obsérvese que $\zeta'(z-b_k)=-\wp(z-b_k)$ y, en general, $\zeta^{(j)}(z-b_k)=-\wp^{(j-1)}(z-b_k)$.

D e m o s t r a c i ó n. Está claro que $\zeta(z-b)$ tiene polos simples en todos los puntos $b+\Omega$ con las partes principales $\frac{1}{z-(b+\Omega)}$, y $\zeta^{(j)}(z-b)$ tiene polos de orden $j+1$ en todos los puntos $b+\Omega$, con las partes principales $(-1)^{(j)}\frac{j!}{[z-(b+\Omega)]^{j+1}}$. Por ello, la suma que figura en el segundo miembro de la fórmula (6.7:2) representa una función meromorfa $\varphi(z)$ para la cual los polos, sus órdenes y las partes principales coinciden con los polos, órdenes y partes prin-

cipales de la función $f(z)$. Demostremos que $\varphi(z)$ es una función elíptica de períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$. En efecto, en virtud de la fórmula (6.6:4), se tiene:

$$\varphi(z+2\omega_j)-\varphi(z)=$$
$$=\sum_{k=1}^{r} A_1^{(k)}[\zeta(z+2\omega_j-b_k)-\zeta(z-b_k)]=2\eta_j\sum_{k=1}^{r} A_1^{(k)}.$$

Pero $\sum_{k=1}^{r} A_1^{(k)}$ es la suma de los residuos de la función elíptica $f(z)$ respecto de todos sus polos pertenecientes al paralelogramo fundamental de períodos. Por lo tanto, $\sum_{k=1}^{r} A_1^{(k)}=0$ (teorema 2, ap. 6.2) y, por consiguiente,

$$\varphi(z+2\omega_j)-\varphi(z)=0 \qquad (j=1,\ 2,\ 3),$$

es decir, $\varphi(z)$ es una función elíptica. En resumen, $f(z)-\varphi(z)$ es una función elíptica sin polos, o sea,

$$f(z)-\varphi(z)\equiv C,$$

con lo que se termina la demostración de la fórmula (6.7:2).

Si se hace una analogía con la teoría de las funciones racionales, entonces la función $\sigma(z)$ se puede comparar con z, mientras que la función $\zeta(z)$ con $\frac{1}{z}$. Entonces el teorema 1 del presente apartado corresponderá exactamente al teorema de la posibilidad de expresar una función racional de orden n con los ceros finitos α_k y los polos finitos β_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ en forma de un cociente de dos polinomios descompuestos en factores lineales:

$$f(z)=C\frac{(z-\alpha_1)\ldots(z-\alpha_n)}{(z-\beta_1)\ldots(z-\beta_n)},$$

y el teorema 2, al desarrollo de una función racional en fracciones simples:

$$f(z)=C+\sum_{1}^{r}\left[\frac{A_1^{(k)}}{z-b_k}+\frac{A_2^{(k)}}{(z-b_k)^2}+\ldots+\frac{A_{\varkappa_k}^{(k)}}{(z-b_k)^{\varkappa_k}}\right].$$

Proponemos al lector construir las expresiones análogas para las funciones trigonométricas, donde en lugar de $\sigma(z)$ se debe tomar $\operatorname{sen} z$, en lugar de $\zeta(z)$ se debe tomar $\operatorname{cotg} z$ y, finalmente, en lugar del paralelogramo de períodos se debe tomar la franja de períodos. En este caso los ceros y polos de la función trigonométrica deben tomarse en alguna de las franjas de períodos, por ejemplo, $-\pi\leqslant x<\pi$.

Como aplicación de los teoremas de este apartado, consideremos el problema del cálculo de la integral elíptica

$$\int R\left(t, \sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}\right) dt,$$

donde $R(t, \tau)$ es una función racional y $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

Para tener derecho a aplicar los resultados del ap. 6.5, referentes a la inversión de integrales elípticas, supondremos además que g_2 y g_3 son reales, pues éste es el caso más importante en la práctica. Debido al ap. 6.5, existe una función elíptica $\wp(z)$ que satisface a la ecuación

$$[\wp'(z)]^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3.$$

Sustituyendo en la integral t por $\wp(z)$, podemos reemplazar $\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}$ por $\wp'(z)$ y, por consiguiente, resulta la integral

$$\int R[\wp(z), \wp'(z)]\, \wp'(z)\, dz.$$

Pero $R[\wp(z), \wp'(z)]\, \wp'(z) = f(z)$ es una función elíptica. Expresándola según la fórmula (6.7:2) e integrando, obtendremos:

$$\int f(z)\, dz = C_0 + Cz + \sum_{k=1}^{r} \left\{ A_1^{(k)} \int \zeta(z - b_k)\, dz - \frac{A_2^{(k)}}{1!} \zeta(z - b_k) + \dots \right.$$
$$\left. \dots + (-1)^{\varkappa_k - 1} \frac{A_{\varkappa_k}^{(k)}}{(\varkappa_k - 1)!} \zeta^{(\varkappa_k - 2)}(z - b_k) \right\}.$$

Para calcular las integrales $\int \zeta(z - b_k)\, dz$ se sustituye $\zeta(z - b_k)$ por $\frac{d}{dz} \operatorname{Ln} \sigma(z - b_k)$. Resulta definitivamente:

$$\int f(z)\, dz = C_0 + Cz + \sum_{k=1}^{r} \left\{ A_1^{(k)} \operatorname{Ln} \sigma(z - b_k) - \frac{A_2^{(k)}}{1!} \zeta(z - b_k) + \dots \right.$$
$$\left. \dots + (-1)^{\varkappa_k - 1} \frac{A_{\varkappa_k}^{(k)}}{(\varkappa_k - 1)!} \zeta^{(\varkappa_k - 2)}(z - b_k) \right\}.$$

Este es el resultado de la integración, al cual, para volver a la variable inicial, se debe agregar además la relación

$$t = \wp(z) \quad \text{o sea} \quad z = \int_{\infty}^{t} \frac{d\tau}{\sqrt{4\tau^3 - g_2\tau - g_3}}.$$

6.8. De los teoremas del apartado precedente se pueden deducir numerosas identidades de la teoría de las funciones elípticas. Señalemos solamente las más importantes.

Sea $\mathfrak{z}$ un número complejo que no sea período de $\wp(z)$. Examinemos la diferencia

$$f(z) = \wp(z) - \wp(\mathfrak{z}).$$

Esta es una función elíptica de segundo orden. Sus ceros son los puntos $\mathfrak{z}$, $-\mathfrak{z}$ y todos los puntos que son congruentes con los indicados. Si $\mathfrak{z} - (-\mathfrak{z}) = 2\mathfrak{z}$ no es un período (o sea, si $\mathfrak{z}$ no es un semiperíodo), entonces $\mathfrak{z}$ y $-\mathfrak{z}$ no son congruentes entre sí y, por consiguiente, cualquier cero de la función $f(z)$ es congruente con $\mathfrak{z}$ o con $-\mathfrak{z}$. Si $2\mathfrak{z}$ es un período, entonces $\mathfrak{z}$ es un semiperíodo que no es período. De aquí que $\wp'(\mathfrak{z}) = 0$, es decir, $\mathfrak{z}$ es un cero doble de la función $\wp(z)$ y de nuevo cada cero de la función $f(z)$ es congruente con $\mathfrak{z}$ y $-\mathfrak{z}$. Observando que $f(z)$ tiene un polo doble en el origen de coordenadas, apliquemos el teorema 1 del ap. 6.7. Hagamos $\alpha_1 = \mathfrak{z}$, $\alpha_2 = -\mathfrak{z}$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2' = 0$. Es obvio que aquí se cumple la condición $\beta_2' = (\alpha_1 + \alpha_2) - \beta_1$. Tendremos:

$$\wp(z) - \wp(\mathfrak{z}) = C\frac{\sigma(z-\mathfrak{z})\,\sigma(z+\mathfrak{z})}{\sigma^2(z)},$$

de donde, multiplicando por z^2 y pasando a límites cuando $z \to 0$, resulta:

$$1 = C\frac{\sigma(-\mathfrak{z})\,\sigma(\mathfrak{z})}{\left[\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z}\right]^2} = -C\sigma^2(\mathfrak{z}),$$

o sea,

$$C = -\frac{1}{\sigma^2(\mathfrak{z})}.$$

En resumen,

$$\wp(z) - \wp(\mathfrak{z}) = -\frac{\sigma(z-\mathfrak{z})\,\sigma(z+\mathfrak{z})}{\sigma^2(z)\,\sigma^2(\mathfrak{z})}. \tag{6.8:1}$$

Hagamos aquí $\mathfrak{z} = \omega_j$; entonces $\wp(\mathfrak{z}) = e_j$ y en virtud de las fórmulas (6.6:9)

$$\sigma(z+\omega_j) = -\sigma(z-\omega_j)\,e^{2\eta_j z},$$

de donde

$$\sigma(z-\omega_j) = -\sigma(z+\omega_j)\,e^{-2\eta_j z}$$

y, por consiguiente,

$$\wp(z) - e_j = e^{-2\eta_j z}\frac{\sigma^2(z+\omega_j)}{\sigma^2(z)\,\sigma^2(\omega_j)}.$$

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, obtenemos:

$$\sqrt{\wp(z)-e_j}=e^{-\eta_j z}\frac{\sigma(z+\omega_j)}{\sigma(z)\,\sigma(\omega_j)}. \qquad (6.8:2)$$

Se ha elegido aquí una de las dos ramas de la raíz cuadrada; precisamente la que representa al segundo miembro de la fórmula (6.8:2).

Hagamos las notaciones

$$e^{-\eta_j z}\frac{\sigma(z+\omega_j)}{\sigma(\omega_j)}=\sigma_j(z) \quad (j=1,\ 2,\ 3). \qquad (6.8:3)$$

Está claro que las funciones $\sigma_j(z)$ son enteras; éstas se llaman σ—funciones asociadas. Las fórmulas (6.8:2) se escriben mediante ellas en la forma

$$\sqrt{\wp(z)-e_j}=\frac{\sigma_j(z)}{\sigma(z)} \qquad (6.8:4)$$

y, por consiguiente,

$$[\wp'(z)]^2=4[\wp(z)-e_1][\wp(z)-e_2][\wp(z)-e_3]=4\frac{\sigma_1^2(z)\,\sigma_2^2(z)\,\sigma_3^2(z)}{\sigma^6(z)},$$

de donde

$$\wp'(z)=\pm 2\frac{\sigma_1(z)\cdot\sigma_2(z)\cdot\sigma_3(z)}{\sigma^3(z)}.$$

Para elegir aquí correctamente el signo, multipliquemos ambos miembros por z^3 y pasemos a límites para $z\to 0$. Como $z^3\wp'(z)\to -2$, $\frac{\sigma(z)}{z}\to 1$ y, finalmente, $\sigma_j(0)=1$ (debido a la definición), hallaremos que en la última fórmula se debe tomar el signo menos. Así, pues,

$$\wp'(z)=-2\frac{\sigma_1(z)\,\sigma_2(z)\,\sigma_3(z)}{\sigma^3(z)}. \qquad (6.8:5)$$

Volvamos a examinar la fórmula (6.8:1). Tomando en ambos miembros la derivada logarítmica respecto de z, obtenemos:

$$\frac{\wp'(z)}{\wp(z)-\wp(\mathfrak{z})}=\zeta(z+\mathfrak{z})+\zeta(z-\mathfrak{z})-2\zeta(z), \qquad (6.8:1')$$

o bien, cambiando de sitio z y $\mathfrak{z}$:

$$\frac{\wp'(\mathfrak{z})}{\wp(\mathfrak{z})-\wp(z)}=\zeta(z+\mathfrak{z})-\zeta(z-\mathfrak{z})-2\zeta(\mathfrak{z}). \qquad (6.8:1'')$$

Sumando y dividiendo por 2, hallamos:

$$\frac{1}{2}\frac{\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})}{\wp(z)-\wp(\mathfrak{z})}=\zeta(z+\mathfrak{z})-\zeta(z)-\zeta(\mathfrak{z}). \qquad (6.8:6)$$

Derivando ambos miembros de la igualdad (6.8:6) respecto de z, resulta:

$$\frac{1}{2}\frac{\wp''(z)}{\wp(z)-\wp(\mathfrak{z})}-\frac{1}{2}\frac{\wp'(z)[\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})]}{[\wp(z)-\wp(\mathfrak{z})]^2}=-\wp(z+\mathfrak{z})+\wp(z).$$

Cambiamos de nuevo de sitio z y $\mathfrak{z}$:

$$\frac{1}{2}\frac{\wp''(\mathfrak{z})}{\wp(\mathfrak{z})-\wp(z)}-\frac{1}{2}\frac{\wp'(\mathfrak{z})[\wp'(\mathfrak{z})-\wp'(z)]}{[\wp(\mathfrak{z})-\wp(z)]^2}=-\wp(z+\mathfrak{z})+\wp(\mathfrak{z}),$$

y sumamos término a término las igualdades obtenidas

$$\frac{1}{2}\frac{\wp''(z)-\wp''(\mathfrak{z})}{\wp(z)-\wp(\mathfrak{z})}-\frac{1}{2}\frac{[\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})]^2}{[\wp(z)-\wp(\mathfrak{z})]^2}=-2\wp(z+\mathfrak{z})+\wp(z)+\wp(\mathfrak{z}).$$

(6.8:6′)

Obsérvese finalmente que de la ecuación

$$[\wp'(z)]^2=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3$$

se deduce que

$$2\wp'(z)\,\wp''(z)=12\wp^2(z)\,\wp'(z)-g_2\wp'(z),$$

o sea

$$\wp''(z)=6\wp^2(z)-\frac{1}{2}g_2.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}\frac{\wp''(z)-\wp''(\mathfrak{z})}{\wp(z)-\wp(\mathfrak{z})}=\frac{1}{2}\frac{6[\wp^2(z)-\wp^2(\mathfrak{z})]}{\wp(z)-\wp(\mathfrak{z})}=3[\wp(z)+\wp(\mathfrak{z})]$$

y, por consiguiente, la relación (6.8:6′) puede expresarse en la forma

$$\wp(z+\mathfrak{z})+\wp(z)+\wp(\mathfrak{z})=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(z)-\wp'(\mathfrak{z})}{\wp(z)-\wp(\mathfrak{z})}\right]^2. \qquad (6.8:7)$$

Esta es una de las formas del teorema de la suma para la función elíptica $\wp(z)$. En efecto, la fórmula (6.8:7) representa una relación algebraica entre $\wp(z+\mathfrak{z})$, $\wp(z)$ y $\wp(\mathfrak{z})$, si se emplean además las ecuaciones:

$$[\wp'(z)]^2=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3,$$
$$[\wp'(\mathfrak{z})]^2=4\wp^3(\mathfrak{z})-g_2\wp(\mathfrak{z})-g_3.$$

6.9. *Como un ejemplo simple de aplicación de las funciones de Weierstrass, consideremos el problema del péndulo esférico. Así se llama un punto material que se mueve sin rozamiento sobre la superficie de una esfera.*

Elijamos un sistema de coordenadas cilíndrico así como se muestra en la fig. 54. Entonces la ecuación de la esfera se expresa así:

$$\rho^2 + u^2 = l^2, \tag{6.9:1}$$

donde l es el radio de la esfera. Como el péndulo está bajo la acción de la fuerza de gravedad $-mg$ y la reacción normal de la esfera, según el teorema de las fuerzas vivas, aplicado al péndulo, tendremos:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -mg(u - u_0),$$

o sea,

$$V^2 = -2gu + h, \tag{6.9:2}$$

donde h es una constante.

Por otra parte, como las fuerzas que actúan sobre el péndulo siempre están situadas en un plano con el eje u, se puede aplicar también el teorema de las áreas, el cual afirma que la velocidad

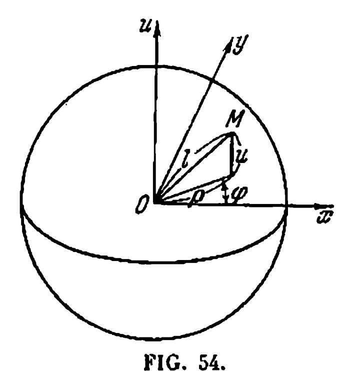


FIG. 54.

areolar del movimiento de la proyección del péndulo sobre el plano $u = 0$ respecto del origen de coordenadas se mantiene constante:

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = C. \tag{6.9:3}$$

De aquí se deduce que el ángulo φ es una función monótona del tiempo t. Las ecuaciones (6.9:1), (6.9:2) y (6.9:3) determinan las coordenadas u, ρ y φ del punto móvil en función del tiempo. Demostremos que estas coordenadas se expresan mediante las funciones $\wp$, ζ y σ.

Determinemos primero u, para lo cual eliminamos ρ y φ en las ecuaciones en cuestión.

Se tiene:

$$\rho = \underset{+}{\sqrt{l^2-u^2}}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{\rho^2}$$

y

$$V^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{du}{dt}\right)^2.$$

Por consiguiente, de (6.9:2) obtenemos:

$$\frac{u^2u'^2}{l^2-u^2} + \frac{C^2}{l^2-u^2} + u'^2 = -2gu + h,$$

donde se ha puesto $\frac{du}{dt} = u'$. De aquí que

$$l^2u'^2 = (h-2gu)(l^2-u^2) - C^2 = q(u), \tag{6.9:4}$$

donde $q(u)$ es un polinomio de tercer grado.

Si u_0 $(-l < u_0 < l)$ es la coordenada del péndulo en el momento inicial, entonces, evidentemente, tendremos que tener: $q(u_0) > 0$ (puesto que la velocidad $u' = \pm\frac{\sqrt{q(u)}}{l}$ es un número real).

Observando que $q(+\infty) = +\infty$, $q(l) = -C^2 < 0$, $q(u_0) > 0$, $q(-l) = -C^2 < 0$, $q(-\infty) = -\infty$, sacamos la conclusión de que todos los ceros u_1, u_2, u_3 del polinomio de tercer grado $q(u)$ son reales. Si $q(u_0) > 0$, entonces éstos están situados en los intervalos $(l, +\infty)$, (u_0, l) y $(-l, u_0)$, uno en cada intervalo. Designémoslos en el orden siguiente:

$$-l < u_3 < u_0 < u_2 < l < u_1. \tag{6.9:5}$$

Si $q(u_0) = 0$, entonces en el intervalo $(l, +\infty)$ habrá igual que anteriormente un cero u_1, de modo que el número total de ceros en el mismo será impar, mientras que el intervalo $(-\infty, -l)$ no contendrá ningún cero (puesto que el número total de ceros en el mismo es par). Por consiguiente, dos ceros tienen que estar situados en uno de los semiintervalos $(-l, u_0]$ o $[u_0, l)$ y resulta la misma disposición que antes, con la sola diferencia que entre u_0 y u_3 o entre u_0 y u_2 aparece el signo de igualdad. En particular, es posible el caso en que

$$u_2 = u_3 = u_0.$$

Entonces $q(u) = 2g(u-u_1)(u-u_0)^2$, y, como fácilmente se observa, la ecuación (6.9:4) es integrable en funciones elementales.

Omitimos la discusión de este caso particular *). Así, pues, a continuación se supone que todas las raíces de la ecuación $q(u)=0$ son simples.

En este caso $q(u)$ se mantiene no negativo en el segmento $[u_3, u_2]$, que contiene el valor u_0, y cambia de signo al pasar u por la frontera de este segmento. De aquí se deduce que durante todo el tiempo del movimiento la coordenada u tiene que satisfacer a las desigualdades

$$-l<u_3\leqslant u\leqslant u_2<l, \tag{6.9:6}$$

es decir, el péndulo se mantiene todo el tiempo dentro de cierto segmento esférico. Volviendo a examinar la ecuación (6.9:4), hagamos en la misma una sustitución de la forma

$$u=av+b,$$

donde $a\neq 0$ y b son unos coeficientes reales. Resulta:

$$a^2l^2v'^2=q(av+b) \quad \text{o sea} \quad v'^2=\frac{1}{a^2l^2}q(av+b).$$

Elijamos a y b de tal modo que el polinomio $\frac{1}{a^2l^2}q(av+b)$ tome la forma

$$4v^3-g_2v-g_3.$$

Para ello es suficiente igualar a cuatro el coeficiente superior del polinomio e igualar a cero el coeficiente de v^2. Entonces tendremos:

$$a=\frac{2l^2}{g}, \quad b=\frac{h}{6g}. \tag{6.9:7}$$

Después de esto la ecuación (6.9:4) se escribe en la forma:

$$v'^2=4v^3-g_2v-g_3. \tag{6.9:8}$$

Los ceros del polinomio $4v^3-g_2v-g_3$ son:

$$e_j=\frac{u_j-b}{a} \qquad (j=1,\ 2,\ 3),$$

donde $e_1>e_2>e_3$, puesto que $u_1>u_2>u_3$ y $a>0$. Al segmento $u_3\leqslant u\leqslant u_2$ le corresponde ahora el segmento $e_3\leqslant v\leqslant e_2$.

De aquí se deduce que el discriminante

$$\Delta=g_2^3-27g_3^2>0,$$

*) Véase este caso, por ejemplo, en el libro de G. K. Súslov, Mecánica teórica (Г. К. Суслов, Теоретическая механика, Издание третье, Гостехиздат, 1944, стр 204—207).

y, por consiguiente (ap. 6.5), existe una función elíptica $\wp(\tau)$ con los períodos fundamentales: uno real 2α y uno imaginario puro $2i\beta$, la cual satisface a la ecuación

$$[\wp'(\tau)]^2 = 4[\wp(\tau)]^3 - g_2\wp(\tau) - g_3. \tag{6.9:9}$$

Los períodos 2α y $2i\beta$ se calculan por las fórmulas (6.5:1):

$$\alpha = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3}}, \quad \beta = \int_{-\infty}^{e_3} \frac{d\lambda}{\sqrt{-(4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3)}}.$$

Si $\tau = \sigma + i\beta$, entonces, como ya se vio en el ap. 6.3, $\wp(\tau) = \wp(\sigma + i\beta)$ es una función de σ de período 2α, la cual es diferenciable y creciente desde e_3 hasta e_2 en el segmento $[0, \alpha]$ y decreciente desde e_2 hasta e_3 en el segmento $[\alpha, 2\alpha]$. Los mismos valores toma también $\wp(\tau)$ en cualquier recta $\tau = \sigma + (2k + 1)i\beta$ ($k = 0, \pm 1, \ldots$). Hagamos en la ecuación (6.9:8) una sustitución más de la función incógnita v:

$$v = \wp(\sigma + i\beta).$$

Resulta:

$$\left(\frac{d\wp(\sigma + i\beta)}{d\sigma}\right)^2 \left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 4[\wp(\sigma + i\beta)]^3 - g_2\wp(\sigma + i\beta) - g_3,$$

de donde

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 1,$$

o sea,

$$\sigma = \pm(t - t_0),$$

donde $\pm t_0$ es la constante de integración y, por consiguiente,

$$v = \wp[\pm(t - t_0) + i\beta].$$

Como

$$\wp(-\sigma + i\beta) = \wp(\sigma - i\beta) = \wp(\sigma + i\beta),$$

la elección del signo en el resultado obtenido es indiferente. Haremos

$$v = \wp[(t - t_0) + i\beta]$$

de modo que para $t = t_0$ $\wp(i\beta) = e_3 = \min v$. Calcularemos el tiempo t desde este momento; entonces tendremos:

$$v = \wp(t + i\beta)$$

y

$$u = av + b = \frac{2l^2}{g} \wp(t + i\beta) + \frac{h}{g}. \qquad (6.9:10)$$

Así, pues, la ecuación (6.9:4) queda resuelta. Como $l^2u'^2 - q(u)$ es una función meromorfa de u, la cual se anula para todos los $0 \leqslant t < \infty$, o sea, para todos los u del segmento $u_3 \leqslant u \leqslant u_2$, resulta que, en virtud del teorema de unicidad para las funciones analíticas, ésta es idénticamente igual a cero. Por consiguiente, para cualquier número complejo τ se tiene:

$$l^2u'^2 - q(u) = a^2l^2\wp'^2(\tau) - q[a\wp(\tau) + b] = 0. \qquad (6.9:4')$$

Esta observación la emplearemos más adelante.

Ha resultado que u es una función periódica de t, de período 2α, la cual se expresa mediante una función elíptica $\wp$; además, alcanza el valor mínimo u_3 en los momentos $t = 0, 2\alpha, 4\alpha, \ldots$ y el valor máximo u_2 en los momentos $t = \alpha, 3\alpha, 5\alpha, \ldots$

Para calcular el ángulo $\varphi = \varphi(t)$, expresemos $d\varphi$ en la forma

$$d\varphi = \frac{C\,dt}{l^2 - u^2} = \frac{C\,dt}{2l}\left(-\frac{1}{u-l} + \frac{1}{u+l}\right).$$

Obsérvese que la función $u = a\wp(\tau) + b$ toma los valores $\pm l$ para

$$\wp(\tau) = \frac{\pm l - b}{a}.$$

Pero

$$\frac{l-b}{a} > \frac{u_2 - b}{a} = e_2 \quad \text{y} \quad \frac{-l-b}{a} < \frac{u_3 - b}{a} = e_3.$$

Por consiguiente (véase el ap. 6.3), el valor de τ que satisface a la condición

$$u = a\wp(\tau) + b = l,$$

puede expresarse en la forma

$$\tau = \alpha + i\gamma,$$

y el valor de τ que satisface a la condición

$$u = a\wp(\tau) + b = -l,$$

en la forma

$$\tau = i\delta,$$

donde γ y δ son números reales.

Así, pues,

$$u - l = a[\wp(t) - \wp(\alpha + i\gamma)], \quad u + l = a[\wp(t) - \wp(i\delta)]$$

y

$$d\varphi=\frac{C\,dt}{2al}\left[-\frac{1}{\wp(t)-\wp(\alpha+i\gamma)}+\frac{1}{\wp(t)-\wp(i\delta)}\right]. \qquad (6.9:11)$$

Para calcular aquí la constante C, obsérvese que debido a (6.9:4') y (6.9:4)

$$a^2l^2\,[\wp'(\alpha+i\gamma)]^2=q(l)=-C^2$$

y

$$a^2l^2\,[\wp'(i\delta)]^2=q(-l)=-C^2.$$

De aquí que

$$[\wp'(\alpha+i\gamma)]^2=[\wp'(i\delta)]^2=-\frac{C^2}{a^2l^2}.$$

Como

$$\wp(\alpha+i\gamma)=\wp(-\alpha-i\gamma)=\wp(\alpha-i\gamma)=l$$

y

$$\wp(i\delta)=\wp(-i\delta)=-l,$$

mientras que

$$\wp'(\alpha+i\gamma)=-\wp'(-\alpha-i\gamma)=-\wp'(\alpha-i\gamma)$$

y

$$\wp'(i\delta)=-\wp'(-i\delta),$$

se pueden elegir los valores de γ y δ de tal modo que se cumplan las igualdades

$$\wp'(\alpha+i\gamma)=\wp'(i\delta)=\frac{iC}{al}$$

junto con las igualdades $\wp(\alpha+i\gamma)=l$ y $\wp(i\delta)=-l$. Entonces la ecuación (6.9:11) se escribe en la forma

$$2i\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\wp'(i\delta)}{\wp(t)-\wp(i\delta)}-\frac{\wp'(\alpha+i\gamma)}{\wp(t)-\wp(\alpha+i\gamma)}$$

o, en virtud de la fórmula (6.8:1')

$$2i\frac{d\varphi}{dt}=-\zeta(i\delta+t)-\zeta(i\delta-t)+2\zeta(i\delta)$$
$$+\zeta(\alpha+i\gamma+t)+\zeta(\alpha+i\gamma-t)-2\zeta(\alpha+i\gamma),$$

de donde

$$2i\varphi=\operatorname{Ln}A-\operatorname{Ln}\sigma(t+i\delta)+\operatorname{Ln}\sigma(t-i\delta)+2\zeta(i\delta)\,t+$$
$$+\operatorname{Ln}\sigma(t-\alpha+i\gamma)-\operatorname{Ln}\sigma(t-\alpha-i\gamma)-2\zeta(\alpha+i\gamma)\,t$$

y, por consiguiente,

$$e^{2i\varphi} = A\frac{\sigma(t+\alpha+i\gamma)\,\sigma(t-i\delta)}{\sigma(t-\alpha-i\gamma)\,\sigma(t+i\delta)}\exp 2\,[\zeta(i\delta-\zeta(\alpha+i\gamma)]\,t.$$

Para $t=0$ resulta: $e^{2i\varphi_0}=A$; por lo tanto,

$$e^{2i(\varphi-\varphi_0)} = \exp 2\,[\zeta(i\delta)-\zeta'(\alpha+i\gamma)]\,t\cdot\frac{\sigma(t+\alpha+i\gamma)\,\sigma(t-i\delta)}{\sigma(t-\alpha-i\gamma)\,\sigma(t+i\delta)}. \qquad (6.9{:}12)$$

Las fórmulas (6.9:10) y (6.9:12) resuelven completamente el problema del movimiento del péndulo esférico. De la fórmula (6.6:9)

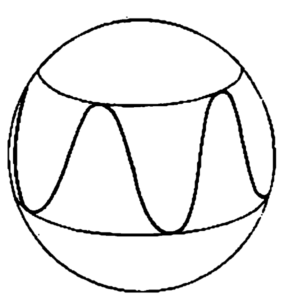


FIG. 55.

se deduce que, cuando t varía en una magnitud igual al período 2α, el segundo miembro de la fórmula (6.9:12) adquiere un factor de la forma

$$\exp 2\,\{2\alpha\,[\zeta(i\delta)-\zeta(\alpha+i\gamma)]+2\eta_1(2\alpha+i\gamma-i\delta)\}$$

y, por consiguiente, el ángulo φ varía en una cantidad constante. En la figura 55 está representada la trayectoria del péndulo esférico.

6.10. En este apartado nos dedicaremos a construir las f u n c i o n e s e l í p t i c a s d e J a c o b i mediante las sigmafunciones asociadas (ap. 6.8).

De las fórmulas (6.8:3) y de las propiedades de la función $\sigma(z)$ se deduce que $\sigma_j(z)$ $(j=1,2,3)$ son funciones enteras con ceros simples en los puntos

$$2n\omega_1+2m\omega_3-\omega_j \qquad (j=1,\,2,\,3).$$

Estos ceros vienen escritos en la tabla siguiente:

$\sigma_1(z)$	$\sigma_2(z)$	$\sigma_3(z)$
$(2n-1)\,\omega_1+2m\omega_3$	$(2n-1)\,\omega_1+(2m-1)\,\omega_3$	$2n\omega_1+(2m-1)\,\omega_3$

Está claro que

$$\sigma_j(-z)=e^{\eta_j z}\frac{\sigma(-z+\omega_j)}{\sigma(\omega_j)}=\frac{e^{-\eta_j z}}{\sigma(\omega_j)}\left[-e^{2\eta_j z}\sigma(z-\omega_j)\right],$$

de donde, en virtud de (6.6:9)

$$\sigma_j(-z)=e^{-\eta_j z}\frac{\sigma(z+\omega_j)}{\sigma(\omega_j)}=\sigma_j(z),$$

o sea, $\sigma_j(z)$ ($j=1, 2, 3$) son todas funciones pares de z. Obsérvese que $\sigma_j(0)=1$ ($j=1, 2, 3$). Por otra parte, mediante (6.6:9) se obtienen las siguientes fórmulas que muestran cómo varían las funciones $\sigma_j(z)$ al sustituir z por $z+2\omega_k$:

$$\sigma_j(z+2\omega_k)=\exp\left[-\eta_j(z+2\omega_k)\right]\frac{\sigma(z+\omega_j+2\omega_k)}{\sigma(\omega_j)}=$$

$$=-\exp\left[-\eta_j(z+2\omega_k)+2\eta_k(z+\omega_j+\omega_k)\right]\frac{\sigma(z+\omega_j)}{\sigma(\omega_j)}=$$

$$=-\exp\left[2\eta_k(z+\omega_k)+2\eta_k\omega_j-2\omega_k\eta_j\right]\sigma_j(z).$$

Si aquí $j\neq k$, entonces, según las fórmulas (6.6:5) o (6.6:5′)

$$2\eta_k\omega_j-2\omega_k\eta_j=\pm\pi i$$

y, por consiguiente,

$$\sigma_j(z+2\omega_k)=e^{2\eta_k(z+\omega_k)}\sigma_j(z); \qquad (6.10:1)$$

si $j=k$ resulta:

$$\sigma_j(z+2\omega_j)=-e^{2\eta_j(z+\omega_j)}\sigma_j(z). \qquad (6.10:2)$$

Consideremos las siguientes razones de las sigma-funciones:

$$\lambda(z)=\frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)},\quad \lambda_1(z)=\frac{\sigma_1(z)}{\sigma_3(z)},\quad \lambda_2(z)=\frac{\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)}. \qquad (6.10:3)$$

Todas estas funciones son meromorfas, con unos mismos polos, simples en los puntos $2n\omega_1+(2m-1)\omega_3$. Sus ceros vienen escritos en la siguiente tabla:

$\lambda(z)$	$\lambda_1(z)$	$\lambda_2(z)$
$2n\omega_1+2m\omega_3$	$(2n-1)\omega_1+2m\omega_3$	$(2n-1)\omega_1+(2m-1)\omega_3$

Todos ellos son simples. La función $\lambda(z)$ es impar, mientras que las funciones $\lambda_1(z)$ y $\lambda_2(z)$ son pares, siendo

$$\lambda(0)=0,\ \lambda'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{\sigma(z)}{z}\frac{1}{\sigma_3(z)}=1,\ \lambda_1(0)=\lambda_2(0)=1.$$

Debido a las fórmulas (6.6:9), (6.10:1) y (6.10:2), se tiene:

$$\lambda(z+2\omega_1)=\frac{-\exp[2\eta_1(z+\omega_1)]\,\sigma(z)}{\exp[2\eta_1(z+\omega_1)]\,\sigma_3(z)}=-\lambda(z),$$

$$\lambda(z+2\omega_3)=\frac{-\exp[2\eta_3(z+\omega_3)]\,\sigma(z)}{-\exp[2\eta_3(z+\omega_3)]\,\sigma_3(z)}=\lambda(z).$$

De un modo similar hallamos:

$$\lambda_1(z+2\omega_1)=-\lambda_1(z),\qquad \lambda_1(z+2\omega_2)=-\lambda_1(z),$$

$$\lambda_2(z+2\omega_1)=\lambda_2(z)\qquad \lambda_2(z+2\omega_3)=-\lambda_2(z).$$

De aquí se deduce que las funciones en cuestión son doblemente periódicas y, por consiguiente, son elípticas, con los pares de períodos $4\omega_1$ y $2\omega_3$ para $\lambda(z)$, $4\omega_1$ y $2\omega_2$ para $\lambda_1(z)$, $2\omega_1$ y $4\omega_3$ para $\lambda_2(z)$.

Fácilmente se observa que estos pares de períodos son fundamentales para las funciones correspondientes. Comprobemos esto para $\lambda(z)$. Si $\lambda(z+\Omega)=\lambda(z)$ y z es un polo de la función $\lambda(z)$: $z=2n\omega_1+(2m-1)\omega_3$, entonces $z+\Omega$ también tiene que ser un polo y, por consiguiente,

$$z+\Omega=2n'\omega_1+(2m'-1)\omega_3,$$

de donde

$$\Omega=2\mu\omega_1+2\nu\omega_3,$$

donde μ y ν son números enteros. Si μ es un número par, entonces Ω es una combinación lineal entera (de coeficientes enteros) de los períodos $4\omega_1$ y $2\omega_3$. Suponiendo que μ es impar: $\mu=2\mu'+1$, obtenemos:

$$\Omega-4\mu'\omega_1-2\nu\omega_3=2\omega_1,$$

es decir, $2\omega_1$ tiene que ser un período de la función $\lambda(z)$. Pero esto contradice a que $\lambda(z+2\omega_1)=-\lambda(z)$. En resumen, cualquier período Ω de la función $\lambda(z)$ es combinación lineal entera de los períodos $4\omega_1$ y $2\omega_3$, es decir, estos últimos son los períodos fundamentales de la función $\lambda(z)$.

En la fig. 56 están representados los paralelogramos fundamentales de períodos para $\lambda(z)$, $\lambda_1(z)$ y $\lambda_2(z)$, en los cuales los ceros de las funciones correspondientes se señalan con redondeles y los polos con cruces.

Vemos, pues, que todas estas funciones son elípticas de segundo orden, así como la función $\wp(z)$. La diferencia esencial con esta última consiste en que ambos polos de cada una de las funciones $\lambda(z)$, $\lambda_1(z)$ y $\lambda_2(z)$ son simples, mientras que $\wp(z)$ posee en el paralelogramo de períodos un solo polo doble.

La diferencia entre las funciones $\lambda(z)$, $\lambda_1(z)$ y $\lambda_2(z)$ y las funciones elípticas de Jacobi clásicas no es esencial. Para obtener estas últimas, consideremos el número complejo $\sqrt{e_1 - e_3}$ $(e_j = \wp(\omega_j))$.

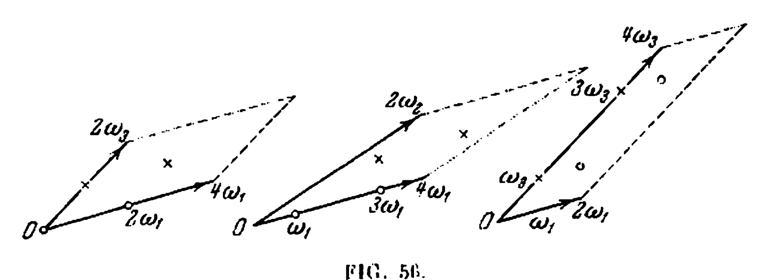


FIG. 56.

Fijando algún valor de la raíz cuadrada (por ejemplo, $\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\sigma_3(\omega_1)}{\sigma(\omega_1)}$, véase la fórmula (6.8:4)), introduzcamos las siguientes notaciones:

$$\sqrt{e_1-e_3}\cdot z = u, \quad \sqrt{e_1-e_3}\cdot\omega_1 = K, \quad \sqrt{e_1-e_3}\cdot\omega_3 = iK', \qquad (6.10:4)$$

y hagamos:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sn} u = \sqrt{e_1-e_3}\,\lambda(z) = \sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)},\\ &\operatorname{cn} u = \lambda_1(z) = \frac{\sigma_1\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}, \quad \operatorname{dn} u = \lambda_2(z) = \frac{\sigma_2\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}{\sigma_3\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.10:5)$$

Estas se llaman *funciones de Jacobi*. Sus denominaciones se leen letra por letra (por ejemplo, «ese ene u»). Todas sus propiedades se deducen inmediatamente de las propiedades de las funciones $\lambda(z)$, $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$. En la fig. 57 se muestran las gráficas de las funciones de Jacobi para $z = x$ real (en este caso se supone que K y K' también son reales).

He aquí las propiedades más elementales de las funciones de Jacobi:

1) $\operatorname{sn} u$ es una función elíptica de segundo orden, con los períodos fundamentales $4K$ y $2iK'$, con los polos simples $2nK +$

$+ (2m - 1)\, iK'$ y con los ceros simples $2nK + 2miK'$. Esta es una función impar; además, $\operatorname{sn} 0 = 0$ y $\operatorname{sn}' 0 = 1$.

2) $\operatorname{cn} u$ es una función elíptica de segundo orden, con los períodos fundamentales $4K$ y $2K + 2iK'$, con los polos simples $2nK +$ $+ (2m - 1)\, iK'$ y con los ceros simples $(2n - 1)\, K + 2miK'$. Esta es una función par; además, $\operatorname{cn} 0 = 1$.

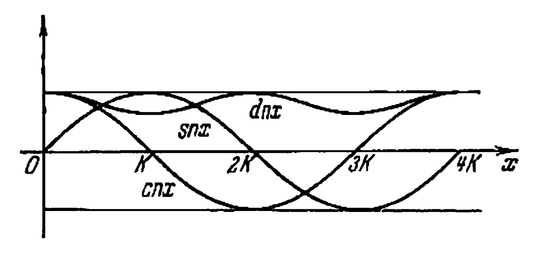


FIG. 57.

3) $\operatorname{dn} u$ es una función elíptica de segundo orden, con los períodos fundamentales $2K$ y $4iK'$, con los polos simples $2nK +$ $+ (2m - 1)\, iK'$ y con los ceros simples $(2n - 1)\, K + (2m - 1)\, iK'$. Esta es una función par; además, $\operatorname{dn} 0 = 1$.

Comparando las fórmulas (6.10:5) y (6.8:4) hallamos las siguientes expresiones de las funciones de Jacobi mediante la función de Weierstrass $\wp(z)$ $(z = u/\sqrt{e_1 - e_3})$:

$$\operatorname{sn} u = \frac{\sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{\wp(z) - e_3}}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{\sqrt{\wp(z) - e_1}}{\sqrt{\wp(z) - e_3}}, \quad \operatorname{dn} u = \frac{\sqrt{\wp(z) - e_2}}{\sqrt{\wp(z) - e_3}}. \tag{6.10:5'}$$

De aquí se deducen inmediatamente las siguientes relaciones algebraicas entre las funciones de Jacobi:

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1, \tag{6.10:6}$$

donde

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} \tag{6.10:7}$$

es un número que se llama **módulo de las funciones de Jacobi**.

De la primera de las fórmulas (6.10:5') obtenemos:

$$\wp(z) = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2 u},$$

de donde

$$\wp'(z) = -\frac{2(e_1-e_3)^{\frac{3}{2}}(\operatorname{sn} u)'}{\operatorname{sn}^3 u}.$$

Por otra parte, de la fórmula (6.8:5) se deduce que

$$\wp'(z) = -2\frac{\sigma_1(z)\sigma_2(z)\sigma_3(z)}{\sigma^3(z)} = -2\frac{\sigma_1(z)}{\sigma_3(z)}\frac{\sigma_2(z)}{\sigma_3(z)} : \left[\frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)}\right]^3$$

$$= -2\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u : \frac{\operatorname{sn}^3 u}{(e_1-e_3)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2(e_1-e_3)^{\frac{3}{2}}\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^3 u}.$$

Comparando las dos expresiones de $\wp'(z)$, hallamos:

$$(\operatorname{sn} u)' = \operatorname{cn} u \, dn\, u. \qquad (6.10:8)$$

Derivando las relaciones (6.10:6) y aplicando la fórmula (6.10:8) obtenemos para las derivadas de $\operatorname{cn} u$ y $\operatorname{dn} u$ las fórmulas:

$$(\operatorname{cn} u)' = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \quad (\operatorname{dn} u)' = -k^2 \operatorname{sn} u \, dn\, u. \qquad (6.10:9)$$

Mediante las relaciones (6.10:6) la igualdad (6.10:8) puede expresarse en la forma

$$(\operatorname{sn} u)' = \sqrt{(1-\operatorname{sn}^2 u)(1-k^2 \operatorname{sn}^2 u)},$$

donde se debe tomar el valor de la raiz que es igual a 1 para $u = 0$. De aquí que

$$u = \int_0^{\operatorname{sn} u} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \qquad (6.10:10)$$

es decir, la función $\operatorname{sn} u$ es inversa respecto de la integral elíptica de primera especie en la forma normal de Legendre.

6.11. Para los cálculos numéricos en los que figuran funciones elípticas es importante tener unas expresiones analíticas de las mismas que posean una convergencia rápida. Por cierto, no satisfacen a esta condición los desarrollos en fracciones simples de las funciones $\wp(z)$ y $\zeta(z)$, ni tampoco el desarrollo en producto infinito de la función $\sigma(z)$, es decir, el aparato analítico mediante el cual expresamos diversas funciones elípticas.

Sin embargo, existen unas expresiones de las funciones elípticas que son rápidamente convergentes. En el caso de las funciones de Jacobi éstas pueden obtenerse sustituyendo los cocientes de las sigma-funciones por los cocientes de otras funciones periódicas enteras.

Consideremos de nuevo las fórmulas (6.6:9):

$$\sigma(z+2\omega_j) = -\sigma(z)\, e^{2\eta_j(z+\omega_j)}. \qquad (6.11:1)$$

Es fácil señalar una función elemental entera que al sustituir z por $z+2\omega_1$ adquiera el mismo factor que la función $\sigma(z)$. En efecto, sea $f(z) = \exp(\alpha z^2 + \beta z)$, donde α y β son unos coeficientes que se determinarán a continuación. Se tiene:

$$f(z+2\omega_j) = \exp(\alpha z^2 + \beta z)\exp[4\alpha\omega_j(z+\omega_j) + 2\beta\omega_j].$$

Para obtener el factor necesario para $j = 1$, hagamos:

$$\alpha = \frac{\eta_1}{2\omega_1} \quad \text{y} \quad \beta = -\frac{\pi i}{2\omega_1}.$$

Entonces para la función

$$\varphi(z) = \frac{\sigma(z)}{\exp\left(\frac{\eta_1}{2\omega_1} z^2 - \frac{\pi i}{2\omega_1} z\right)} = \sigma(z)\exp\left(-\frac{\eta_1}{2\omega_1} z^2 + \frac{\pi i}{2\omega_1} z\right)$$

tendremos:

$$\varphi(z+2\omega_1) = \varphi(z),$$

$$\varphi(z+2\omega_3) = -\varphi(z)\exp\left[\frac{2\eta_3\omega_1 - 2\eta_1\omega_3}{\omega_1}(z+\omega_3) + \frac{\pi i\omega_3}{\omega_1}\right] =$$

$$= -\varphi(z)\exp\left(-\frac{\pi i}{\omega_1} z\right)$$

(hemos aplicado aquí la fórmula (6.6:5)).

Hagamos $\frac{z}{2\omega_1} = v$ y $e^{\pi i v} = s$; entonces tendremos:

$$\varphi(z+2\omega_1) = \varphi(z), \quad \varphi(z+2\omega_3) = -\varphi(z)\, s^{-2}. \qquad (6.11:2)$$

La función que hemos construido difiere de $\sigma(z)$ solamente en el factor $\exp\left(-\frac{\eta_1}{2\omega_1} z^2 + \frac{\pi i}{2\omega_1} z\right)$, que carece de ceros, y tiene la ventaja ante $\sigma(z)$ de que ella es periódica y ésta última no lo es.

Hallemos el desarrollo de la función periódica $\varphi(z)$ en serie de potencias de $e^{\frac{2\pi i z}{2\omega_1}} = e^{2\pi i v} = s^2$ (véase (5.2:3), donde $\zeta = \frac{2\pi z}{\omega} = \frac{2\pi z}{2\omega_1}$):

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k s^{2k};$$

esta serie es absoluta y uniformemente convergente en cualquier conjunto cerrado que no contenga los puntos $s = 0$ y $s = \infty$. Susti-

tuyamos aquí z por $z + 2\omega_3$ y observemos que con esto v se reemplaza por $v + \frac{\omega_3}{\omega_1} = v + \tau$, y s^2 por $s^2 e^{2\pi i\tau} = s^2 q^2$. Resulta:

$$\varphi(z + 2\omega_3) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k q^{2k} s^{2k},$$

de donde, en virtud de (6.11:2),

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_k q^{2k} s^{2k} = -s^{-2} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_m s^{2m}.$$

Como el desarrollo en serie de Laurent posee la propiedad de unicidad, de aquí se deduce que

$$\alpha_k q^{2k} = -\alpha_{k+1},$$

o sea,

$$(-1)^{k+1} \alpha_{k+1} q^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2} = (-1)^k \alpha_k q^{-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Por ello

$$(-1)^k \alpha_k q^{-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} = C,$$

donde C es una constante, de aquí que

$$\alpha_k = C(-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}$$

y, por consiguiente,

$$\varphi(z) = C \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} s^{2k} = C \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{2\pi i k v} =$$

$$= Ce^{\pi i v} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i v}.$$

La función $i \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i v}$ representa una de las theta-funciones de Jacobi; se representa por $\vartheta_1(v)$. Así pues,

$$\vartheta_1(v) = i \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i v} =$$

$$= 2 \sum_{0}^{\infty} (-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2} \operatorname{sen}(2m+1)\pi v. \qquad (6.11:3)$$

Por consiguiente,

$$\varphi(z) = \sigma(z)\exp\left(-\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2 + \frac{\pi i}{2\omega_1}z\right) = -Ci\exp\frac{\pi i z}{2\omega_1}\vartheta_1(v)$$

y

$$\sigma(z) = -Ci\exp\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\vartheta_1(v).$$

Para determinar aquí el valor de la constante C, dividamos ambos miembros por $z = 2\omega_1 v$ y pasemos a límites para $z \to 0$. Resulta:

$$1 = -Ci\lim\frac{\vartheta_1(v)}{2\omega_1 v} = -\frac{Ci}{2\omega_1}\vartheta_1(0),$$

o sea,

$$-Ci = \frac{2\omega_1}{\vartheta_1'(0)}.$$

Por consiguiente,

$$\sigma(z) = 2\omega_1\exp\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2\,\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)} \qquad (6.11:4)$$

Esta fórmula permite deducir todas las propiedades de la función $\vartheta_1(v)$ de las propiedades respectivas de la función $\sigma(z)$.

De aquí o directamente de (6.11:3), sacamos la conclusión que $\vartheta_1(v)$ es una función entera impar de período 2. Como $q = e^{\pi i\tau}$ y $\operatorname{Im}\tau = \operatorname{Im}\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) > 0$, resulta $|q| < 1$ y, por consiguiente, el desarrollo (6.11:3), cada término del cual contiene el factor $q^{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2}$, posee una convergencia extraordinariamente rápida. La ventaja de las theta-funciones de Jacobi ante las sigma-funciones de Weierstrass estriba precisamente en la existencia de un desarrollo semejante.

Como todos los ceros de la función $\sigma(z)$ son simples y tienen la forma $z = 2n\omega_1 + 2m\omega_3$, de la fórmula (6.11:4) se desprende que todos los ceros de la función $\vartheta_1(v)$ también son simples y están contenidos en la fórmula

$$v = n + m\tau \quad \left(\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1};\ m,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots\right).$$

Del mismo modo que la función $\vartheta_1(v)$ está ligada con la función $\sigma(z)$, las otras tres theta-funciones de Jacobi están ligadas con las funciones $\sigma_j(z)$ $(j = 1, 2, 3)$. Mediante la fórmula (6.11:4) se halla que

$$\sigma_j(z) = e^{-\eta_j z}\frac{\sigma(z+\omega_j)}{\sigma(\omega_j)} =$$

$$= \frac{2\omega_1}{\sigma(\omega_j)\,\vartheta_1'(0)}\exp\left(\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2 + \frac{2\eta_1\omega_j - 2\omega_1\eta_j}{2\omega_1}z + \frac{\eta_1\omega_j^2}{2\omega_1}\right)\vartheta_1\left(v + \frac{\omega_j}{2\omega_1}\right),$$

de donde

$$\sigma_1(z)=C_1e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2}\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right),$$

$$\sigma_2(z)=C_2e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2}\cdot e^{\pi iv}\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right),$$

$$\sigma_3(z)=C_3e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2}e^{\pi iv}\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right).$$

Del desarrollo (6.11:3) se deduce que

$$\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2k-1)\pi iv},$$

$$\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2k-1)\pi iv}e^{(2k-1)\pi i\frac{\tau}{2}}=$$

$$=q^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi iv}\sum_{-\infty}^{\infty}q^{k^2}e^{2k\pi iv}, \qquad (6.11:5)$$

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=i\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^kq^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2k-1)\pi iv}e^{(2k-1)\pi i\frac{\tau}{2}}=$$

$$=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi iv}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^kq^{k^2}e^{2k\pi iv}.$$

Hagamos

$$\vartheta_2(v)=\sum_{-\infty}^{\infty}q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2k-1)\pi iv}=2\sum_{0}^{\infty}q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2m+1)\pi v,$$

$$\vartheta_3(v)=\sum_{-\infty}^{\infty}q^{k^2}e^{2k\pi iv}=1+2\sum_{1}^{\infty}q^{m^2}\cos 2m\pi v, \qquad (6.11:6)$$

$$\vartheta_4(v)=\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^kq^{k^2}e^{2k\pi iv}=1+2\sum_{1}^{\infty}(-1)^mq^{m^2}\cos 2m\pi v.$$

Estas son las otras tres theta-funciones de Jacobi. Comparando las fórmulas (6.11:5) y (6.11:6) sacamos la conclusión que

$$\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_2(v),\quad \vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=$$

$$=q^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi iv}\vartheta_3(v),\quad \vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi iv}\vartheta_4(v). \qquad (6.11:7)$$

Por lo tanto, para las funciones $\sigma_j(z)$ hallamos las siguientes expresiones:

$$\sigma_1(z) = C_1 e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2}\vartheta_2(v),\quad \sigma_2(z) = C_2' e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2}\vartheta_3(v),\quad \sigma_3(z) = \\ = C_3'' e^{\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2}\vartheta_4(v),$$

Pongamos aquí $z = 0$ (y, por consiguiente, $v = 0$). Obtenemos:

$$1 = C_1\vartheta_2(0),\quad 1 = C_2'\vartheta_3(0),\quad 1 = C_3'\vartheta_4(0),$$

por lo cual

$$\sigma_j(z) = \exp\frac{\eta_1}{2\omega_1}z^2\,\frac{\vartheta_{j+1}(v)}{\vartheta_{j+1}(0)} \qquad (j = 1, 2, 3). \qquad (6.11{:}8)$$

De los desarrollos (6.11:3) y (6.11:6) es fácil deducir unas fórmulas análogas a (6.11:7), las cuales expresan las variaciones de $\vartheta_j(v)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ al sustituir v por $v + \frac{1}{2}$, $v + \frac{\tau}{2}$, $v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$, $v + 1$, $v + \tau$, $v + 1 + \tau$. Dejando los cálculos a cuenta del lector, expondremos los resultados en la tabla siguiente:

v	$v + \frac{1}{2}$	$v + \frac{\tau}{2}$	$v + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$	$v + 1$	$v + \tau$	$v + 1 + \tau$
ϑ_1	ϑ_2	$iM\vartheta_4$	$M\vartheta_3$	$-\vartheta_1$	$-N\vartheta_1$	$N\vartheta_1$
ϑ_2	$-\vartheta_1$	$M\vartheta_3$	$-iM\vartheta_4$	$-\vartheta_2$	$N\vartheta_2$	$-N\vartheta_2$ (*)
ϑ_3	ϑ_4	$M\vartheta_2$	$iM\vartheta_1$	ϑ_3	$N\vartheta_3$	$N\vartheta_3$
ϑ_4	ϑ_3	$iM\vartheta_1$	$M\vartheta_2$	ϑ_4	$-N\vartheta_4$	$-N\vartheta_4$

Aquí se han empleado las notaciones: $M = q^{-\frac{1}{4}}e^{-\pi i v}$, $N = q^{-1}e^{-2\pi i v}$.

Formemos también una tabla de los ceros de estas funciones. De la fórmula (6.11:7) se deduce que $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ y $\vartheta_4(v)$ tienen ceros simples, los cuales se obtienen de los ceros de la función $\vartheta_1(v)$ restando $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ y $\frac{\tau}{2}$, respectivamente. Por lo tanto, resulta la tabla siguiente:

$\vartheta_1(v)$	$\vartheta_2(v)$	$\vartheta_3(v)$	$\vartheta_4(v)$
$n+m\tau$	$n-\frac{1}{2}+m\tau$	$(n-\frac{1}{2})+(m-\frac{1}{2})\tau$	$n+(m-\frac{1}{2})\tau$

Señalemos que las funciones $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ y $\vartheta_4(v)$ son pares, lo cual se deduce de las fórmulas (6.11:6).

6.12. Examinemos ahora las expresiones de las funciones elípticas $\wp(z)$, sn u, cn u y dn u mediante las theta-funciones. Debido a las fórmulas (6.8:4), (6.11:4) y (6.11:8), se tiene:

$$\sqrt{\wp(z)-e_j}=\frac{\vartheta_1'(0)}{2\omega_1\vartheta_{j+1}(0)}\frac{\vartheta_{j+1}(v)}{\vartheta_1(v)}\qquad (j=1,\,2,\,3). \qquad (6.12{:}1)$$

donde $v=\frac{z}{2\omega_1}$. En particular, para $z=\omega_1$ y $j=3$ resulta:

$$\sqrt{e_1-e_3}=\frac{\vartheta_1'(0)}{2\omega_1\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_4\left(\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\vartheta_1'(0)}{2\omega_1\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)};$$

análogamente, para $z=\omega_2$ y $j=3$ tendremos:

$$\sqrt{e_2-e_3}=\frac{\vartheta_1'(0)}{2\omega_1\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_4\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)}=\frac{\vartheta_1'(0)}{2\omega_1\vartheta_4(0)}\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}.$$

Por consiguiente,

$$k=\sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}=\left[\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2. \qquad (6.12{:}2)$$

De las fórmulas (6.10:5), (6.11:4) y (6.11:8) hallamos las siguientes expresiones para las funciones elípticas de Jacobi sn u, cn u y dn u

$$(u=\sqrt{e_1-e_3}\,z=2\omega_1\sqrt{e_1-e_3}\,v=2Kv):$$

$$\left.\begin{aligned}&\operatorname{sn}u=\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{2\omega_1\vartheta_4(0)}{\vartheta_1'(0)}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)},\\ &\operatorname{cn}u=\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)},\qquad \operatorname{dn}u=\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}.\end{aligned}\right\}\qquad(6.12{:}3)$$

De la fórmula (6.12:2) se deduce que $\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}$ es uno de los valores de $\frac{1}{\sqrt{k}}$. Fijemos este valor:

$$\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}. \qquad (6.12{:}4)$$

Haciendo luego

$$k'^2 = 1 - k^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3},$$

de las fórmulas (6.12:1) obtenemos:

$$k' = \sqrt{\frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}} = \left[\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}\right]^2. \tag{6.12:5}$$

Este número se llama **módulo complementario** de las funciones elípticas de Jacobi.

Por consiguiente, $\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}$ es uno de los valores de $\sqrt{k'}$.

Fijemos este valor:

$$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}. \tag{6.12:6}$$

Observando que

$$\frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)} = \sqrt{\frac{k'}{k}},$$

escribamos las fórmulas (6.12:3) en la forma

$$\operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}, \quad \operatorname{cn} u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}. \tag{6.12:7}$$

Para usar estas fórmulas con los períodos dados $2\omega_1$ y $2\omega_3$ de la función $\wp(z)$, obramos del modo siguiente: Calculamos $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ y $q = e^{\pi i \tau}$; por las fórmulas (6.11:6) hallamos

$$\vartheta_2(0) = 2\sum_0^\infty q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}, \quad \vartheta_3(0) = 1 + 2\sum_1^\infty q^{m^2} \quad \text{y} \quad \vartheta_4(0) =$$

$$= 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^m q^{m^2}$$

y por las fórmulas (6.12:4) y (6.12:6) calculamos $\frac{1}{\sqrt{k}}$ y $\sqrt{k'}$. Para pasar de u a $v = \frac{u}{2K}$ es necesario conocer también el valor de $K = \omega_1\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{\vartheta_1'(0)\cdot\vartheta_3(0)}{2\vartheta_4(0)\vartheta_2(0)}$, es decir, además de lo hallado hay que hallar también el valor de

$$\vartheta_1'(0) = 2\sum_0^\infty (-1)^m (2m+1)\pi q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

De lo expuesto se deduce que para determinar las funciones sn u, cn u y dn u, los períodos $2\omega_1$ y $2\omega_3$ no desempeñan ningún papel. Solamente es esencial su razón τ o el valor q.

Los cálculos con los valores de las theta-funciones y sus derivadas para $v = 0$ se simplifican si se utiliza la relación

$$\vartheta_1'(0) = \pi\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0). \qquad (6.12:8)$$

Para demostrarla, escribamos (6.12:1) en la forma

$$\sqrt{\wp(2\omega_1 v) - e_j} = \frac{1}{2\omega_1}\,\frac{1 + \dfrac{\vartheta_{j+1}''(0)}{\vartheta_{j+1}(0)}\dfrac{v^2}{2} + \ldots}{v + \dfrac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}\dfrac{v^3}{6} + \ldots} =$$

$$= \frac{1}{2\omega_1 v}\left\{1 + \left[\frac{\vartheta_{j+1}''(0)}{\vartheta_{j+1}(0)} - \frac{1}{3}\,\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}\right]\frac{v^2}{2} + \ldots\right\}$$

(aquí se ha tenido en cuenta que las funciones $\vartheta_{j+1}(v)$ $(j = 1, 2, 3)$ son pares y que la función $\vartheta_1(v)$ es impar). De aquí que

$$\wp(2\omega_1 v) = \frac{1}{4\omega_1^2 v^2} + \left[\frac{\vartheta_{j+1}''(0)}{4\omega_1^2\vartheta_{j+1}(0)} - \frac{1}{3\cdot 4\omega_1^2}\cdot\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} + e_j\right] + \ldots,$$

y como el desarrollo de Laurent de la función $\wp(2\omega_1 v)$ en un entorno del origen de coordenadas no contienen el término independiente, resulta:

$$e_j = \frac{1}{4\omega_1^2}\left[\frac{1}{3}\,\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} - \frac{\vartheta_{j+1}''(0)}{\vartheta_{j+1}(0)}\right] \qquad (j = 1, 2, 3). \qquad (6.12:9)$$

De aquí que

$$e_1 + e_2 + e_3 = \frac{1}{4\omega_1^2}\left[\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\vartheta_{j+1}''(0)}{\vartheta_{j+1}(0)}\right] = 0,$$

o sea,

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\vartheta_{j+1}''(0)}{\vartheta_{j+1}(0)}. \qquad (6.12:10)$$

Volviendo a examinar los desarrollos (6.11:3) y (6.11:6), consideremos las funciones $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ y $\vartheta_4(v)$ como funciones de dos variables: τ (mediante $q = e^{\pi i\tau}$) y v. Como funciones de v éstas son enteras. Si v está fijado y τ se considera como variable compleja que toma valores del semiplano superior ($\operatorname{Im}\tau > 0$), entonces las series mencionadas serán uniformemente convergentes para $\operatorname{Im}\tau > \varepsilon > 0$, es decir, para $|q| = \exp[-\pi \operatorname{Im}\tau] \leqslant e^{-\pi\varepsilon} < 1$ y cualquier $\varepsilon > 0$, de donde se deduce que éstas son funciones ana-

líticas de τ para $\operatorname{Im} \tau > 0$ y que estas series pueden derivarse término a término respecto de τ. De (6.11:3) hallamos:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1(v)}{\partial v^2} = -i \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k (2k-1)^2 \pi^2 q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i v}$$

y

$$\frac{\partial \vartheta_1(v)}{\partial \tau} = -\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \left(k-\frac{1}{2}\right)^2 \pi q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2k-1)\pi i v}.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1(v)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_1(v)}{\partial \tau}.$$

Es fácil comprobar de un modo exactamente igual que a esta ecuación en derivadas parciales satisface cada una de las theta-funciones. Así, pues,

$$\frac{\partial^2 \vartheta_j(v)}{\partial v^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_j(v)}{\partial \tau} \qquad (j = 1, 2, 3, 4). \qquad (6.12:11)$$

De aquí que

$$\frac{\partial^3 \vartheta_j(v)}{\partial v^3} = 4\pi i \frac{\partial^2 \vartheta_j(v)}{\partial \tau\, \partial v} = 4\pi i \frac{\partial^2 \vartheta_j(v)}{\partial v\, \partial \tau}. \qquad (6.12:11')$$

(Es inmediato comprobar que la permutación del orden de derivación es legítima).

Haciendo en las ecuaciones (6.12:11) y (6.12:11') $v = 0$, obtenemos:

$$\vartheta_j''(0) = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_j(0)}{\partial \tau}, \qquad \vartheta_j'''(0) = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_j'(0)}{\partial \tau}.$$

Por lo tanto, la relación (6.12:10) toma la forma

$$\frac{\partial \vartheta_1'(0)}{\partial \tau} \Big/ \vartheta_1'(0) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \vartheta_{j+1}(0)}{\partial \tau} \Big/ \vartheta_{j+1}(0),$$

de donde

$$\vartheta_1'(0) = C\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0).$$

No queda más que determinar la constante C. Se tiene:

$$\vartheta_1'(0) = 2\pi q^{\frac{1}{4}}(1 - 3q^2 + \ldots), \quad \vartheta_2(0) = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + \ldots),$$
$$\vartheta_3(0) = 1 + 2q + \ldots, \qquad \vartheta_4(0) = 1 - 2q + \ldots.$$

o bien, poniendo en la relación hallada anteriormente:

$$\pi(1-3q^3+\ldots)=C(1+q^2+\ldots)(1+2q+\ldots)(1-2q+\ldots).$$

Como esta identidad liga las sumas de series de potencias de q que son convergentes para $|q|<1$, sacamos la conclusión de que los términos independientes del primero y segundo miembros tienen que ser iguales y, por consiguiente, $C=\pi$. La igualdad (6.12:8) queda completamente demostrada. Aplicando esta igualdad las relaciones (6.12:1) pueden sustituirse por las siguientes:

$$\sqrt{\wp(z)-e_1}=\pi\frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)}{2\omega_1}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_1(v)},\quad \sqrt{\wp(z)-e_2}=\pi\frac{\vartheta_2(0)\,\vartheta_4(0)}{2\omega_1}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_1(v)},$$

$$\sqrt{\wp(z)-e_3}=\pi\frac{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)}{2\omega_1}\frac{\vartheta_4(v)}{\vartheta_1(v)}.$$

Por otra parte, para $\sqrt{e_h-e_j}$ obtenemos:

$$\sqrt{e_1-e_3}=\pi\frac{[\vartheta_3(0)]^2}{2\omega_1},\qquad \sqrt{e_2-e_3}=\pi\frac{[\vartheta_2(0)]^2}{2\omega_1},$$

$$\sqrt{e_1-e_2}=\pi\frac{[\vartheta_4(0)]^2}{2\omega_1}. \qquad (6.12:12)$$

Finalmente, para $K=\omega_1\sqrt{e_1-e_3}$ y $iK'=\omega_3\sqrt{e_1-e_3}$ hallamos:

$$K=\pi\frac{[\vartheta_3(0)]^2}{2},\quad iK'=\pi\tau\frac{[\vartheta_3(0)]^2}{2}. \qquad (6.12:13)$$

6.13. Finalmente, tenemos que deducir también las fórmulas que expresan los desarrollos de las theta-funciones en productos infinitos y aplicarlas para la representación de las funciones $\wp(z)$ y $\zeta(z)$ en forma de series de fracciones simples rápidamente convergentes. Naturalmente, los desarrollos de las theta-funciones en productos infinitos se pueden obtener fácilmente del conocido desarrollo en producto de la función $\sigma(z)$. Mas aquí nos interesarán aquellos desarrollos en los que las theta-funciones se consideran como funciones de

$$t=s^2=e^{2\pi i v}=e^{\pi i\frac{z}{\omega_1}}.$$

Comencemos con $\vartheta_3(v)$. Esta función entera de período 2π es uniforme y analítica respecto de $t=e^{2\pi i v}$ $(0<|t|<\infty)$:

$$\vartheta_3(v)=\sum_{-\infty}^{\infty} b_n t^n.$$

En virtud de que ésta, como función de v, tiene los ceros simples $v=n-\frac{1}{2}+\left(m-\frac{1}{2}\right)\tau$, considerándola como función de t

tendrá los ceros simples:

$$t = e^{2\pi i v} = -e^{(2m-1)\pi i \tau} = -q^{2m-1} \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Examinemos primero los ceros $-q^{-1}, -q^{-3}, -q^{-5}, \ldots$

Es obvio que la función $\psi(t) = \prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2m-1}t)$ es entera y posee los ceros indicados. En efecto, la convergencia absoluta y uniforme de este producto en cualquier conjunto acotado de puntos del plano es consecuencia de la convergencia de la serie $\sum_{1}^{\infty} |q|^{2m-1}$ $(|q| < 1)$.

Pasando a examinar los ceros $-q, -q^3, -q^5, \ldots$, hallaremos que la función

$$\chi(t) = \prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2m-1}t^{-1}),$$

la cual se expresa por un producto que es absoluta y uniformemente convergente en cualquier conjunto cerrado que no contenga al punto $t = 0$, es analítica en todos los puntos, a excepción del origen de coordenadas, y posee ceros simples en los puntos indicados. Por consiguiente, la función

$$\psi(t)\chi(t) = \prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2m-1}t)\prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2m-1}t^{-1})$$

es analítica para $0 < |t| < \infty$ y posee los mismos ceros que la función $\vartheta_3(v)$ (en el plano t).

Volviendo a la variable v mediante la sustitución $t = e^{2\pi i v}$, obtenemos la función

$$\nu(v) = \psi(e^{2\pi i v})\chi(e^{2\pi i v}) = \prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2m-1}e^{2\pi i v})\prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2m-1}e^{-2\pi i v}),$$

la cual es entera (respecto de v), es periódica, de período 1 y posee los mismos ceros que $\vartheta_3(v)$.

De aquí se deduce que $\frac{\vartheta_3(v)}{\nu(v)}$ es una función entera de período 1.

Observando que

$$\nu(v + \tau) = \prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2m+1}e^{2\pi i v})\prod_{1}^{\infty}(1 + q^{2m-3}e^{-2\pi i v}) =$$

$$= \frac{1 + q^{-1}e^{-2\pi i v}}{1 + qe^{2\pi i v}}\nu(v) = q^{-1}e^{-2\pi i v}\nu(v) = N\nu(v),$$

sacamos la conclusión de que, al sustituir v por $v + \tau$, la función $\nu(v)$ adquiere un factor igual que $\vartheta_3(v)$. Por ello, $\frac{\vartheta_3(v)}{\nu(v)}$ es una

función elíptica de períodos 1 y τ y, por consiguiente, es constante, puesto que es entera. En resumen,

$$\vartheta_3(v) = C\nu(v) = C\prod_{1}^{\infty}[(1+q^{2m-1}e^{2\pi i v})(1-q^{2m-1}e^{-2\pi i v})],$$

donde C es una constante.

Utilizando la tercera fila de la tabla (*) en la pág. 412 hallamos:

$$\vartheta_4(v) = \vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right) = C\prod_{1}^{\infty}[(1-q^{2m-1}e^{2\pi i v})(1-q^{2m-1}e^{-2\pi i v})],$$

$$\vartheta_2(v) = \frac{1}{M}\vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right) = Cq^{\frac{1}{4}}e^{\pi i v}\prod_{1}^{\infty}[(1+q^{2m}e^{2\pi i v})(1+q^{2m-2}e^{-2\pi i v})],$$

$$\vartheta_1(v) = -\frac{i}{M}\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right) =$$

$$= -Ciq^{\frac{1}{4}}e^{\pi i v}\prod_{1}^{\infty}[(1-q^{2m}e^{2\pi i v})(1-q^{2m-2}e^{-2\pi i v})].$$

Escribamos las fórmulas obtenidas en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1(v) &= -Ciq^{\frac{1}{4}}(e^{\pi i v}-e^{-\pi i v})\prod_{1}^{\infty}[(1-q^{2m}e^{2\pi i v})(1-q^{2m}e^{-2\pi i v})] = \\
&= 2Cq^{\frac{1}{4}}\operatorname{sen}\pi v\prod_{1}^{\infty}(1-2q^{2m}\cos 2\pi v+q^{4m}),\\
\vartheta_2(v) &= Cq^{\frac{1}{4}}(e^{\pi i v}+e^{-\pi i v})\prod_{1}^{\infty}[(1+q^{2m}e^{2\pi i v})(1+q^{2m}e^{-2\pi i v})] = \\
&= 2Cq^{\frac{1}{4}}\cos\pi v\prod_{1}^{\infty}(1+2q^{2m}\cos 2\pi v+q^{4m}),\\
\vartheta_3(v) &= C\prod_{1}^{\infty}[(1+q^{2m-1}e^{2\pi i v})(1+q^{2m-1}e^{-2\pi i v})] = \\
&= C\prod_{1}^{\infty}(1+2q^{2m-1}\cos 2\pi v+q^{4m-2}),\\
\vartheta_4(v) &= C\prod_{1}^{\infty}[(1-q^{2m-1}e^{2\pi i v})(1-q^{2m-1}e^{-2\pi i v})] = \\
&= C\prod_{1}^{\infty}(1-2q^{2m-1}\cos 2\pi v+q^{4m-2})
\end{aligned}\right\}\quad(6.13{:}1)$$

Estas son las fórmulas pedidas. Para determinar aquí C, utilicemos la relación (6.12:8).

Se tiene:

$$\vartheta_1'(0) = \lim_{v \to 0} \frac{\vartheta_1(v)}{v} = 2C\pi q^{\frac{1}{4}} \prod_1^\infty (1 - q^{2m})^2,$$

$$\vartheta_2(0) = 2Cq^{\frac{1}{4}} \prod_1^\infty (1 - q^{2m})^2, \qquad \vartheta_3(0) = C \prod_1^\infty (1 + q^{2m-1})^2,$$

$$\vartheta_4(0) = C \prod_1^\infty (1 - q^{2m-1})^2.$$

Por consiguiente,

$$\prod_1^\infty (1 - q^{2m})^2 = C^2 \prod_1^\infty (1 + q^{2m})^2 \prod_1^\infty (1 + q^{2m-1})^2 \prod_1^\infty (1 - q^{2m-1})^2.$$

Consideremos el producto $\prod_1^\infty (1 - q^n)^2$. En virtud de su convergencia absoluta ($|q| < 1$) éste puede expresarse en la forma

$$\prod_1^\infty (1 - q^n)^2 = \prod_1^\infty (1 - q^{2m})^2 \prod_1^\infty (1 - q^{2m-1})^2 =$$

$$= \prod_1^\infty (1 - q^m)^2 \prod_1^\infty (1 + q^m)^2 \prod_1^\infty (1 - q^{2m-1})^2,$$

de donde, sustituyendo en los primeros productos del segundo miembro m por n y simplificando, resulta:

$$1 = \prod_1^\infty (1 + q^n)^2 \prod_1^\infty (1 - q^{2m-1})^2 =$$

$$= \prod_1^\infty (1 + q^{2m})^2 \prod_1^\infty (1 + q^{2m-1})^2 \prod_1^\infty (1 - q^{2m-1})^2.$$

De aquí se deduce que

$$\prod_1^\infty (1 - q^{2m})^2 = C^2$$

y

$$C = \pm \prod_1^\infty (1 - q^{2m}).$$

C es una función de τ (o de q) que es analítica en el semiplano superior. Si $q = e^{\pi i \tau}$ es un número real positivo (lo cual será

si τ es imaginario puro), entonces C es un número real. De la fórmula para $\vartheta_3(0)$ se deduce que

$$\vartheta_3(0)=1=C\prod_1^{\infty}(1+q^{2m-1})^2,$$

es decir, en la expresión de C se debe tomar el signo $+$.

En resumen,

$$C=\prod_1^{\infty}(1-q^{2m}). \tag{6.13:2}$$

Para aplicar las fórmulas obtenidas a la representación de las funciones $\sigma(z)$, $\zeta(z)$ y $\wp(z)$, partiremos de las fórmulas (6.11:4). Resulta ($z=2\omega_1 v$):

$$\sigma(z)=C_1\exp[2\omega_1\eta_1 v^2]\operatorname{sen}\pi v\prod_1^{\infty}(1-q^{2m}e^{2\pi iv})(1-q^{2m}e^{-2\pi iv}).$$

Para determinar C_1, dividamos ambos miembros por z y pasemos a límites para $z\to 0$. Obtenemos:

$$1=\frac{C_1\pi}{2\omega_1}\prod_1^{\infty}(1-q^{2m})^2=C_1C^2\pi,$$

de donde

$$C_1=\frac{2\omega_1}{\pi C^2}.$$

Por consiguiente,

$$\sigma(z)=\frac{2\omega_1}{\pi C^2}\exp 2\omega_1\eta_1 v^2\operatorname{sen}\pi v\prod_1^{\infty}[(1-q^{2m}e^{2\pi iv})(1-q^{2m}e^{-2\pi iv})]. \tag{6.13:3}$$

Tomando de ambos miembros la derivada logarítmica respecto de z, hallaremos:

$$\zeta(z)=\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=\frac{4\omega_1\eta_1 v}{2\omega_1}+\frac{\pi}{2\omega_1}\operatorname{cotg}\pi v+$$

$$+\sum_1^{\infty}\frac{2\pi i}{2\omega_1}\left[\frac{q^{2m}e^{-2\pi iv}}{1-q^{2m}e^{-2\pi iv}}-\frac{q^{2m}e^{2\pi iv}}{1-q^{2m}e^{2\pi iv}}\right],$$

o sea,

$$\zeta(z)=2\eta_1 v+\frac{\pi}{2\omega_1}\left[\operatorname{cotg}\pi v+i\sum_1^{\infty}\left(\frac{2q^{2m}e^{-2\pi iv}}{1-q^{2m}e^{-2\pi iv}}-\frac{2q^{2m}e^{2\pi iv}}{1-q^{2m}e^{2\pi iv}}\right)\right]. \tag{6.13:4}$$

Derivando esta igualdad respecto de z y cambiando los signos, obtenemos:

$$\wp(z) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \operatorname{cosec}^2 \pi v -$$

$$-\frac{\pi^2}{\omega_1^2}\sum_1^{\infty}\left[\frac{q^{2m}e^{-2\pi i v}}{(1-q^{2m}e^{-2\pi i v})^2}+\frac{q^{2m}e^{2\pi i v}}{(1-q^{2m}e^{2\pi i v})^2}\right]. \qquad (6.13:5)$$

Los desarrollos obtenidos poseen una convergencia suficientemente satisfactoria (gracias a los factores q^{2m}). Por ello, en todos los cálculos numéricos con funciones de Weierstrass se debe tener más predilección por estos desarrollos que por aquellas expresiones que empleábamos en la definición inicial de estas funciones.

§ 7. FUNCION CARACTERISTICA $T(\rho)$

7.1. Apliquemos la fórmula de Poisson-Jentzsch del ap. 4.1, cap. 6 al estudio de las funciones que son meromorfas en un círculo K: $|z| \leqslant R$, donde $R < \infty$ (círculo finito) o $R = \infty$ (el plano finito). Sea $f(z)$ una función meromorfa en el círculo K; supongamos que $a_1, a_2, \ldots$ son sus ceros y que $b_1, b_2, \ldots$ son sus polos, dispuestos por orden de no decrecimiento de sus módulos, donde los puntos a_j y b_k son distintos de $z = 0$ y cada uno de ellos viene escrito tantas veces como sea el orden del cero o del polo. Sea $c_\lambda z^\lambda$ el término menor del desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en un entorno de $z = 0$, de modo que $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)}{z^\lambda} = c_\lambda \neq 0$. Entonces, en virtud de la fórmula (4.1:2′) del cap. 6, para $r = |z| < \rho$ y cualquier ρ, $0 < \rho < R$, se tiene:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha})|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha =$$

$$= \ln\left|\frac{f(re^{i\theta})}{r^\lambda}\right| + \lambda\ln\rho - \sum_1^{n(\rho)}\ln\frac{\rho|z-a_h|}{|\rho^2-\bar{a}_h z|} + \sum_1^{p(\rho)}\ln\frac{\rho|z-b_h|}{|\rho^2-\bar{b}_h z|}.$$

donde $n(\rho)$ y $p(\rho)$ indican la cantidad de puntos a_j y b_h, respectivamente, situados en el círculo $|z| < \rho$ (teniendo en cuenta los órdenes de estos puntos). Haciendo en esta fórmula $r = 0$, obtenemos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha = \ln|c_\lambda| + \lambda\ln\rho + \sum_1^{n(\rho)}\ln\frac{\rho}{|a_h|} - \sum_1^{p(\rho)}\ln\frac{\rho}{|b_h|}.$$

Según la fórmula (4.1:8) del cap. 6, la suma $\sum_{1}^{n(\rho)} \ln \frac{\rho}{|a_k|}$ puede expresarse en forma integral

$$\sum_{1}^{n(\rho)} \ln \frac{\rho}{|a_k|} = \int_0^\rho \frac{n(t)}{t}\,dt;$$

análogamente

$$\sum_{1}^{p(\rho)} \ln \frac{\rho}{|b_k|} = \int_0^\rho \frac{p(t)}{t}\,dt.$$

Por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha = \ln |c_\lambda| + \lambda \ln \rho +$$

$$+ \int_0^\rho \frac{n(t)}{t}\,dt - \int_0^\rho \frac{p(t)}{t}\,dt. \qquad (7.1:1)$$

Obsérvese también que la fórmula (7.1:1) sigue siendo válida si por $n(t)$ y $p(t)$ se entiende la cantidad de ceros o polos, respectivamente, en el círculo cerrado $|z| \leqslant t$ y no en el círculo abierto $|z| \leqslant t$ (véase la pág. 226).

Expresemos la fórmula (7.1:1) de una forma más simétrica. Con este fin, introduzcamos la función

$$n(t, f) = n(t, \infty),$$

que representa la cantidad de polos que tiene $f(z)$ (teniendo en cuenta sus órdenes) en el círculo $|z| \leqslant t$; aquí $n(0, \infty)$ denota el orden del polo posible en el punto $z = 0$. Entonces, para cualquier $A \neq \infty$

$$n\left(t, \frac{1}{f-A}\right) = n(t, A)$$

determina la cantidad de polos de la función $\frac{1}{f(z)-A}$, es decir, la cantidad de A-puntos de $f(z)$ en el mismo círculo $|z| \leqslant t$. En particular, $n(t, 0)$ denota la cantidad de ceros que tiene $f(z)$ en el círculo $|z| \leqslant t$ y $n(0, 0)$ denota el orden del cero posible en el punto $z = 0$.

Mediante las notaciones introducidas obtenemos:

$$n(t) = n(t, 0) - n(0, 0), \quad p(t) = n(t, \infty) - n(0, \infty)$$

y

$$\lambda(0) = n(0, 0) - n(0, \infty).$$

Lo último se debe a que, si $\lambda > 0$, entonces $n(0, \infty) = 0$ y $\lambda = n(0, 0)$; si $\lambda < 0$, entonces $n(0, 0) = 0$ y $\lambda = -n(0, \infty)$; finalmente, si $\lambda = 0$, entonces $n(0, 0) = n(0, \infty) = 0$. Representemos también $\ln |f(\rho e^{i\alpha})|$ en la forma:

$$\ln |f(\rho e^{i\alpha})| = \ln^+ |f(\rho e^{i\alpha})| - \ln^- |f(\rho e^{i\alpha})| = \ln^+ |(\rho e^{i\alpha})| - \ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha})|}$$

(véase el ap. 5.1, cap. 6). La fórmula (7.1:1) toma la forma:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\alpha})| \, d\alpha + \int_0^{\rho} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} dt + n(0, \infty) \ln \rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha})|} d\alpha + \int_0^{\rho} \frac{n(t, 0) - n(0, 0)}{t} dt + n(0, 0) \ln \rho + \ln |c_\lambda|. \tag{7.1:2}$$

La última relación muestra que existe un equilibrio peculiar entre los valores de una función meromorfa que son mayores que la unidad en valor absoluto y los que son menores que la unidad en valor absoluto. En efecto, en el primer miembro figuran integrales que dependen de los valores de la función que son mayores que la unidad en valor absoluto y de la cantidad de polos que hay en el círculo $|z| \leqslant t$, mientras que en el segundo miembro (si no se cuenta la constante $\ln |c_\lambda|$) figuran integrales que dependen de los valores de la función que son menores que la unidad en valor absoluto y de la cantidad de ceros que hay en el mismo círculo.

7.2. Apliquemos la fórmula (7.1:2) a la función $f(z) - A$, donde A es un número finito arbitrario. Observando que esta función tiene los mismos polos y con los mismos órdenes que $f(z)$, obtenemos que para ella la distribución de los polos se caracteriza por la función anterior $n(t, \infty)$ y la distribución de los ceros, por la función $n(t, A)$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\alpha}) - A| \, d\alpha + \int_0^{\rho} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} dt + n(0, \infty) \ln \rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha}) - A|} d\alpha + \int_0^{\rho} \frac{n(t, A) - n(0, A)}{t} dt +$$

$$+ n(0, A) \ln \rho + \ln |c(A)|,$$

donde $c(A)$ es el coeficiente del término inferior (distinto de cero) en el desarrollo de Laurent de la función $f(z) - A$ en un entorno del punto $z = 0$. Observando que

$$\ln^+ |f(\rho e^{i\alpha}) - A| \leqslant \ln^+ (|f| + |A|) \leqslant \ln 2 + \ln |f(\rho e^{i\alpha})| + \ln^+ |A|$$

y que

$$\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})| = \ln^+|A + (f - A)| \leqslant \ln 2 + \ln^+|f(\rho e^{i\alpha}) - A| + \ln^+|A|,$$

resulta:

$$\ln^+|f(\rho e^{i\alpha}) - A| = \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})| + \theta_1(\ln^+|A| + \ln 2),$$

donde $-1 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$. Por ello

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha}) - A|}\,d\alpha + \int_0^{\rho} \frac{n(t, A) - n(0, A)}{t}\,dt + n(0, A)\ln\rho =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha + \int_0^{\rho} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t} + n(0, \infty)\ln\rho + \varphi_A(\rho), \tag{7.2:1}$$

donde

$$|\varphi_A(\rho)| \leqslant \ln^+|A| + \ln 2 + |\ln|c(A)||.$$

Aclaremos el significado de (7.2:1). Introduzcamos primero otras notaciones más; hagamos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha}) - A|}\,d\alpha = m(\rho, A),$$

$$\int_0^{\rho} \frac{n(t, A) - n(0, A)}{t}\,dt + n(0, A)\ln\rho = N(\rho, A). \tag{7.2:2}$$

Tanto una como la otra son funciones de ρ que dependen además del número complejo A; ambas son no negativas. Influyen en la cantidad $m(\rho, A)$ solamente aquellos valores de $f(\rho e^{i\alpha})$ que satisfacen a la condición

$$|f(\rho e^{i\alpha}) - A| < 1,$$

y además, influyen tanto más (en el sentido del crecimiento de $m(\rho, A)$) cuanto más se aproximen a A los valores de $f(\rho e^{i\alpha})$ y cuanto mayor sea la medida angular de aquellos arcos de la circunferencia $|z| = \rho$ en los cuales $f(\rho e^{i\alpha})$ se diferencia poco de A. En otras palabras, la cantidad $m(\rho, A)$ aprecia de un modo especial el grado de *aproximación en media de la función* $f(z)$ *al número* A en la circunferencia $|z| = \rho$.

En la cantidad $N(\rho, A)$ sólo influye directamente la distribución de los puntos en los que $f(z)$ *toma exactamente el valor* A, es decir, la cantidad $n(t, A)$ de A-puntos de $f(z)$ en el círculo $|z| < t$, considerada como función de t.

La segunda de las fórmulas (7.2:2) muestra que $N(\rho, A)$ crece (no decrece) junto con ρ (para A fijado). Precisando, de la misma fórmula se deduce que

$$\frac{dN(\rho, A)}{d\ln\rho} = n(\rho, A) - n(0, A) + n(0, A) = n(\rho, A)$$

para cada ρ tal que en la circunferencia $|z| = \rho$ no haya ningún A-punto de la función $f(z)$ (si en la circunferencia $|z| = \rho_0$ hay A-puntos de la función $f(z)$, entonces $n(\rho, A)$ admite discontinuidad de primera especie en el punto $\rho = \rho_0$). Como $n(\rho, A)$ es una función no decreciente de ρ, de aquí se deduce que $N(\rho, A)$ es una función c o n v e x a de $\ln\rho$.

Obsérvese que $m(\rho, A)$ no sólo no es convexa, sino que, por lo general, no es una función no decreciente. Así, por ejemplo, si $f(z)$ es un polinomio de grado no infreior al primero, la función $m(\rho, 0)$ es distinta de cero (es positiva) para cada ρ que sea igual al módulo de un cero cualquiera de la función, y se anula para todos los valores de ρ, comenzando desde un valor suficientemente grande de ρ (tal que sea $|f(\rho e^{i\alpha})| \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$).

En lo que se refiere a las funciones que figuran en el segundo miembro de (7.2:1), se observa que éstas son similares en todo a $m(\rho, A)$ y $N(\rho, A)$, con la única diferencia que en lugar del valor finito A figura ∞. Precisando, en el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha$$

para un ρ dado, influyen solamente los valores del módulo $|f(\rho e^{i\alpha})|$ que son mayores que la unidad, y además, tanto más cuanto mayor sea $|f(\rho e^{i\alpha})|$ (cuanto más «se aproxime» $f(z)$ a ∞) y cuanto mayor sea la medida angular de aquellos arcos de la circunferencia $|z| = \rho$ en los cuales $|f(\rho e^{i\alpha})|$ es grande. Del mismo modo, en el valor

$$\int_0^{\rho} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t}\,dt + n(0, \infty)\ln\rho$$

sólo influye directamente la distribución de los polos de la función $f(z)$, es decir, la cantidad de polos $n(t, \infty)$ que hay en el círculo $|z| \leqslant t$, considerada como función de t. Todo lo dicho justifica la introducción de las siguientes notaciones:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha = m(\rho, \infty),$$

$$\int_0^{\rho} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t}\,dt + n(0, \infty)\ln\rho = N(\rho, \infty), \qquad (7.2:3)$$

La función $N(\rho, \infty)$ crece (no decrece) junto con ρ y es una función convexa de $\ln \rho$; la función $m(\rho, \infty)$, por lo general, no sólo no es convexa, sino que tampoco es no decreciente.

Mediante las notaciones introducidas la fórmula (7.2:1) se escribe así:

$$m(\rho, A) + N(\rho, A) = m(\rho, \infty) + N(\rho, \infty) + \varphi_A(\rho).$$

Hagamos también

$$m(\rho, \infty) + N(\rho, \infty) = T(\rho); \qquad (7.2:4)$$

entonces

$$m(\rho, A) + N(\rho, A) = T(\rho) + \varphi_A(\rho); \qquad (7.2:5)$$

esta fórmula es válida también para $A = \infty$ (en este caso ésta se convierte en la fórmula (7.2:4)). Hemos obtenido la siguiente proposición:

Primer teorema fundamental de la teoría de las funciones meromorfas. *Para toda función $f(z)$ que sea meromorfa en el círculo $|z| < R \leqslant \infty$, existe una función $T(\rho)$, definida en el intervalo $0 < \rho < R$, tal que, para cualquier número complejo A (finito o infinito) la suma $m(\rho, A) + N(\rho, A)$* (cuyo valor depende solamente de la medida en que los valores de la función $f(z)$ se aproximan en media a A, y también de la frecuencia con que $f(z)$ toma el valor A) *difiere de $T(\rho)$ en una función acotada $\varphi_A(\rho)$* ($|\varphi_A(\rho)| \leqslant \ln^+ |A| + \ln 2 + |\ln|c(A)||$, *si* $A \neq \infty$, *y* $\varphi_\infty(\rho) \equiv 0$, *si* $A = \infty$). La función $T(\rho)$ se llama función característica de la función meromorfa $f(z)$.

Este teorema puede considerarse como una generalización extremadamente amplia del hecho según el cual las funciones meromorfas elementales — las funciones racionales — toman cualquier valor complejo A en una misma cantidad de puntos, igual al orden de la función (véase el t. I, ap. 4.1, cap. 2).

En resumen, la suma $m(\rho, A) + N(\rho, A)$ no depende del valor A (salvo una función acotada $\varphi_A(\rho)$). Este teorema permite afirmar (en el caso en que la función característica crece indefinidamente cuando ρ tiende a R) que si para cierto A la cantidad de A-puntos de la función $f(z)$ es relativamente pequeño y, por consiguiente, los valores de la función $N(\rho, A)$ no son relativamente grandes, entonces los valores de la función $m(\rho, A)$ tienen que ser relativamente grandes, es decir, la función se aproxima bastante bien en media a A. Es justo también lo recíproco. Así, pues, la insuficiente cantidad de A-puntos se recompensa con una buena aproximación media de la función $f(z)$ hacia el punto A y una mala aproximación media hacia A trae consigo un aumento de la cantidad de A-puntos. Tal es el significado y la importancia del primer teorema fundamental de la teoría de las funciones meromorfas.

Este teorema se amplía esencialmente con un teorema capital más difícil, denominado segundo teorema fundamental de la teoría de las funciones meromorfas *), del cual, en particular, se deduce que para una mayoría preponderante de valores de A la función $m(\rho, A)$ es infinitamente pequeña en comparación con la función característica $T(\rho)$. Por esto, la parte principal en la suma $m(\rho, A) + N(\rho, A)$ corresponde a la función $N(\rho, A)$. Para dar a esta afirmación un sentido exacto, llamemos a un valor A d e f e c t o o v a l o r e x c e p c i o n a l (en el sentido de R. N e v a n l i n n a) de la función meromorfa dada $f(z)$ si para este

$$\underline{\lim}_{\rho\to R} \frac{m(\rho, A)}{T(\rho)} = \delta(A) > 0.$$

De la relación (7.2:5) se deduce que

$$\delta(A) = 1 - \overline{\lim}_{\rho\to R} \frac{N(\rho, A)}{T(\rho)} \leqslant 1 \qquad (7.2:6)$$

(suponiendo que $T(\rho) \to \infty$ para $\rho \to R$). Por lo tanto, el número $\delta(A)$, denominado d e f e c t o del valor A, muestra lo que le falta a la razón $\frac{N(\rho, A)}{T(\rho)}$ para ser igual a la unidad (en el límite cuando ρ tiende a R).

Del segundo teorema fundamental mencionado se deduce que para cualquier función $f(z) \not\equiv$ const, que sea meromorfa en el plano finito (como se demostrará en el ap. 7.4, para ella $T(\rho) \to \infty$ si $\rho \to \infty$), y también para una función meromorfa en un círculo finito (con la condición $\underline{\lim}_{\rho\to R} \frac{\ln \frac{1}{R-\rho}}{T(\rho)} = 0$, la cual no siempre se cumple), el conjunto de todos los valores excepcionales es, en primer lugar, no más que numerable, y en segundo lugar, la suma de los defectos de todos estos valores no es superior a dos:

$$\Sigma\delta(A) \leqslant 2 \qquad (7.2:7)$$

(r e l a c i ó n d e l o s d e f e c t o s).

De aquí se deduce que pueden existir no más de dos valores con el defecto máximo posible, igual a uno. Como tales valores se caracterizan completamente por la condición

$$\lim_{\rho\to R} \frac{N(\rho, A)}{T(\rho)} = 0$$

*) En este curso no incluimos el segundo teorema fundamental. Véase la monografía de R. N e v a n l i n n a Eindeutige analytische Funktionen, Springer, Berlín; 2ª ed., 1953 y también el libro de W. K. H a y m a n, Meromorphic functions, Oxford at the Clarendon Press 1964.

(lo cual se deduce de la fórmula (7.2:6)), se puede afirmar que *existen no más de dos valores A para los cuales la función $N(\rho, A)$ es infinitamente pequeña en comparación con $T(\rho)$*. Esta afirmación contiene como un caso particular el teorema de Picard para las funciones meromorfas. Al final del capítulo octavo la obtendremos de otro modo.

7.3. Ilustremos lo expuesto en el ap. 7.2 con unos cuantos ejemplos:

1) Función racional. Sea $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, donde $P(z)$ es un polinomio de grado p, $Q(z)$ es un polinomio de grado q y $P(z)$ y $Q(z)$ no tienen ceros comunes. Entonces $f(z)$ es una función racional de orden $r = \max(p, q)$. Supongamos, para precisar, que $p > q$; entonces $r = p$. Para todos los valores suficientemente grandes de ρ, se tiene:

$$f(z) = az^{p-q}[1 + \varepsilon(z)],$$

donde, a es la razón de los coeficientes de los términos superiores de los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$, $\varepsilon(z)$ es una función racional que tiende a cero cuando $z \to \infty$. Por lo tanto,

$$\ln|f(\rho e^{i\alpha})| = (p-q)\ln\rho + O(1)^{*)}$$

y, por consiguiente,

$$m(\rho, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha = (p-q)\ln\rho + O(1).$$

Si ρ es superior al módulo máximo ρ' de los ceros del polinomio $Q(z)$, entonces la cantidad de polos $n(\rho, \infty)$ de la función $f(z)$ conserva un valor constante, igual a q. Por ello, para $N(\rho, \infty)$ obtenemos:

$$N(\rho, \infty) = \int_0^{\rho} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t}\,dt + n(0, \infty)\ln\rho =$$

$$= \int_0^{\rho'} \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t}\,dt + \int_{\rho'}^{\rho} \frac{q\,dt}{t} - \int_{\rho'}^{\rho} \frac{n(0, \infty)\,dt}{t} + n(0, \infty)\ln\rho =$$

---

*) $O(1)$ denota una cantidad acotada. En general, se escribe $\varphi(\rho) = O[\psi(\rho)]$ si $\varphi(\rho)$ y $\psi(\rho)$ están definidas para todos los valores suficientemente grandes de ρ y $|\varphi(\rho)| < C|\psi(\rho)|$, donde $C < \infty$ es cierta constante. Análogamente, $o(1)$ denota una cantidad que tiende a cero. En general, se escribe

$$\varphi(\rho) = o[\psi(\rho)] \quad \text{si} \quad \lim_{\rho\to\infty} \frac{\varphi(\rho)}{\psi(\rho)} = 0.$$

$$= q \ln \rho + \left[\int\limits_0^{\rho} \frac{n(t,\ \infty) - n(0,\ \infty)}{t}\, dt + (n(0,\ \infty) - q) \ln \rho' \right] =$$

$$= q \ln \rho + O(1);$$

y, por consiguiente,

$$T(\rho) = m(\rho,\ \infty) + N(\rho,\ \infty) = p \ln \rho + O(1).$$

De aquí se deduce que

$$\delta(\infty) = \varliminf_{\rho \to \infty} \frac{m(\rho,\ \infty)}{T(\rho)} = 1 - \frac{q}{p} > 0,$$

es decir, ∞ es un valor excepcional (en el sentido de R. Nevanlinna) para la función racional $f(z)$ si $p > q$. Demostremos que éste es el único valor excepcional. Sea $A \neq \infty$; de la relación

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{f(z) - A} = 0$$

se deduce que

$$\ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\theta}) - A|} = 0$$

para todos los valores suficientemente grandes de ρ y, por consiguiente,

$$m(\rho,\ A) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha}) - A|}\, d\alpha = 0$$

(para valores de ρ suficientemente grandes).

Así, pues, $\delta(A) = 0$ si $A \neq \infty$, o sea, los valores finitos A no son excepcionales para $f(z)$.

Instamos al lector que demuestre, que si $p = q$, el único valor excepcional para $f(z)$ es el cociente a de los coeficientes de los términos superiores de los polinomios $P(z)$ y $Q(z)$, y si $p < q$, el valor excepcional es igual a cero. En cada uno de estos casos, para la función característica resulta:

$$T(\rho) = r \ln \rho + O(1),$$

de modo que para cualquier función racional

$$T(\rho) = O(\ln \rho).$$

2) Función exponencial. Esta función no se anula ni se hace infinita. Por lo tanto, para ella

$$N(\rho,\ \infty) = N(\rho,\ 0) = 0,$$

es decir, ambos valores 0 y ∞ son excepcionales con el valor máximo del defecto, igual a uno. Calculemos la función característica $T(\rho)$ y comprobemos que la función exponencial no posee ningún valor más con defecto positivo. Observando que

$$\ln|\exp(\rho e^{i\alpha})| = \rho\cos\alpha$$

es positivo en el semiplano de la derecha y es negativo en el semiplano de la izquierda, hallamos:

$$m(\rho,\ \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|\exp(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha = \frac{\rho}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos d\alpha = \frac{\rho}{\pi}$$

y análogamente

$$m(\rho,\ 0) = \frac{\rho}{\pi}.$$

Por consiguiente,

$$T(\rho) = m(\rho,\ \infty) + N(\rho,\ \infty) = \frac{\rho}{\pi}.$$

Si $A \neq 0$ y $A \neq \infty$, entonces

$$N(\rho,\ A) = \int_0^{\rho} \frac{n(t,\ A) - n(0,\ A)}{t}\,dt + n(0,\ A)\ln\rho$$

Pero los A-puntos de la función e^z son los valores $\operatorname{Ln} A = \ln|A| + i(\arg a + 2k\pi)$; éstos están situados en la recta $\operatorname{Re} z = \ln|A|$ y la distancia entre ellos es igual a 2π. Como la circunferencia $|z| = t$ intercepta en esta recta un segmento de longitud $2\sqrt{t^2 - (\ln|A|)^2}$, la cantidad de A-puntos que caen en el círculo $|z| \leq t$ se acota del modo siguiente:

$$n(t,\ A) \sim \frac{2\sqrt{t^2 - (\ln A)^2}}{2\pi} \sim \frac{t}{\pi}$$

y, por consiguiente,

$$N(\rho,\ A) \sim \int_1^{\rho} \frac{\frac{1}{\pi}t - n(0,\ A)}{t}\,dt + n(0,\ A)\ln\rho \sim \frac{1}{\pi}\rho = T(\rho).$$

De aquí que, para el valor del defecto del número A ($A \neq 0$, $A \neq \infty$) se tiene:

$$\delta(A) = 1 - \varlimsup_{\rho\to\infty} \frac{N(\rho,\ A)}{T(\rho)} = 0.$$

3) En el caso de una función racional se ha observado sólo un valor excepcional. Este valor ecxepcional era el $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$. La función

exponencial para $z \to \infty$ tiende uniformemente a ∞ en el ángulo $|\arg z| < \frac{\pi}{2} < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ y a cero en el ángulo opuesto por el vértice a éste. En correspondencia con esto, aquí hay dos valores excepcionales: 0 y ∞. Sea ahora n cualquier número natural $\geqslant 2$. Dividamos el plano por rayos que partan del origen de coordenadas en $2n$ ángulos iguales: $d_1, d_2, \ldots, d_{2n}$, comenzando desde el ángulo d_1: $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2n}$. Demostremos que para $z \to \infty$ la función entera $g_n(z) = \int\limits_0^z \exp(-z^n)\, dz$ tiende a ∞ en los ángulos d_{2j} $(j = 1, \ldots$ $\ldots, n)$, y en cada uno de los ángulos d_{2j+1} $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ tiende al límite finito $A_j = Ie^{\frac{2\pi ij}{n}}$, donde $I = \int\limits_0^\infty e^{-t^n}\, dt$ $(t > 0)$. Este comportamiento de la función $g_n(z)$ arroja como consecuencia de que la misma posee $n+1$ valores excepcionales:

$$\infty,\ A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_{n-1}.$$

Obsérvese primero que

$$\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-\rho^n \cos\theta)\, d\theta = \rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-\rho^n \operatorname{sen}\theta)\, d\theta <$$

$$< \rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{2}{\pi}\rho^n\theta\right) d\theta < \frac{\pi}{2}\rho^{1-n} \to 0$$

para $\rho \to \infty$.

Apliquemos el teorema integral de Cauchy a la función $\exp(-\zeta^n)$ y al contorno de algún sector del círculo $|z| \leqslant \rho$, perteneciente a d_{2j+1}; uno de los radios que limitan el sector lo dirigiremos por la bisectriz del ángulo d_{2j+1}, la cual forma el ángulo $\frac{2\pi j}{n}$ con la dirección positiva del eje real, y el otro lo dirigiremos hacia el punto

$$z = \rho \exp\left[i\left(\frac{2\pi j}{n} + \alpha\right)\right], \quad |\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2n}.$$

Resulta:

$$g_n(z) - e^{\frac{2\pi ij}{n}} \int\limits_0^\rho e^{-t^n}\, dt = \int\limits_{\rho e^{\frac{2\pi ij}{n}}}^{z} e^{-\zeta^n}\, d\zeta,$$

de donde

$$\left| g_n(z) - e^{\frac{2\pi i j}{n}} \int_0^{\rho} e^{-t^n}\,dt \right| < \left| \int_{\frac{2\pi j}{n}}^{\frac{2\pi j}{n}+\alpha} \exp(-\rho^n \cos n\theta)\,\rho\,d\theta \right| =$$

$$= \frac{\rho}{n} \left| \int_0^{\alpha n} \exp(-\rho^n \cos\theta)\,d\theta \right| \leqslant \frac{\rho}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-\rho^n \cos\theta)\,d\theta < \frac{\pi}{2}\rho^{1-n}.$$

Como $\lim\limits_{\rho\to\infty} e^{\frac{2\pi i j}{n}} \int\limits_0^{\rho} e^{-t^n}\,dt = A_j$, de aquí se deduce, en primer lugar, que $g_n(z)$ para $z \to \infty$ tiende uniformemente al límite A_j en d_{2j+1}, y, en segundo lugar, que para cualquier rayo L que parta del punto $z = 0$ y que pertenezca a $\overline{d_{2j+1}}$:

$$\int_L \exp(-\zeta^n)\,d\zeta = A_j.$$

Para acotar inferiormente $m(\rho, A_j)$ se necesita obtener una cota asintótica para $|g_n(z) - A_j|$. Trazando un rayo L por el punto $z = \rho \exp\left(\frac{2\pi j i}{n} + \alpha i\right)$, $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2n}$, hallamos:

$$g_n(z) - A_j = g_n(z) - \int_L \exp(-\zeta^n)\,d\zeta =$$

$$= -\int_z^{\infty} \exp(-\zeta^n)\,d\zeta = \frac{1}{n}\int_z^{\infty} \zeta^{-n+1} d\exp(-\zeta^n) =$$

$$= -\frac{1}{n} z^{-n+1}\exp(-z^n) - \frac{n-1}{n^2}\int_z^{\infty} \zeta^{-2n+1} d\exp(-\zeta^n) =$$

$$= -\frac{1}{n} z^{-n+1}\exp(-z^n) + \frac{n-1}{n^2} z^{-2n+1}\exp(-z^n) -$$

$$- \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2}\int_z^{\infty} \zeta^{-2n}\exp(-\zeta^n)\,d\zeta.$$

Como $|z^{-n+1}\exp(-z^n)| = \rho^{-n+1}\exp(-\rho^n \cos n\alpha)$ y

$$\left| \int_z^{\infty} \zeta^{-2n}\exp(-\zeta^n)\,d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\rho}^{\infty} t^{-2n}\exp(-t^n \cos n\alpha)\,dt \leqslant \frac{1}{2n-1}\rho^{-2n+1}\exp(-\rho^n \cos n\alpha),$$

resulta:

$$g_n(z) - A_j = -\frac{1}{n} z^{-n+1} \exp(-z^n)[1+o(1)], \quad z \in d_{2j+1}$$

(se podría haber sustituido $o(1)$ por la cota más exacta $O(\rho^{-n})$, mas para lo que sigue no se necesita tanta exactitud).

Por consiguiente:

$$\ln \frac{1}{|g_n(z) - A_j|} = \rho^n \cos n\alpha + \ln\{n\rho^{n-1}[1+o(1)]\} =$$
$$= \rho^n [\cos n\alpha + o(1)], \quad z \in d_{2j+1},$$

de donde

$$m(\rho, A_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|g_n(z) - A_j|} d\alpha \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi j/n - \pi/2n}^{2\pi j/n + \pi/2n} \ln^+ \frac{1}{|g_n(z) - A_j|} d\alpha = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^n \cos\theta \, d\theta + o(\rho^n) =$$
$$= \frac{1}{\pi n} \rho^n [1+o(1)].$$

Calculemos, finalmente, $T(\rho) = m(\rho, \infty)$ (puesto que $N(\rho, \infty) = 0$); para ello, acotemos $g_n(z)$ en los ángulos d_{2j} ($j = 1, 2, \ldots, n$). Obsérvese que la bisectriz del ángulo d_{2j} forma el ángulo $\frac{(2j-1)\pi}{n}$ con la dirección positiva del eje real. Por ello, cada punto $z \in d_{2j}$, $z \neq 0$, se caracteriza por la expresión $z = \rho \exp\left[\frac{(2j-1)\pi i}{n} + \alpha i\right]$, donde $|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2n}$. Integrando dos veces por partes, el valor de la función $g_n(z)$ en este punto puede escribirse en la forma:

$$g_n(z) = \int_0^z \exp(-\zeta^n)\, d\zeta = \int_1^z \exp(-\zeta^n)\, d\zeta + O(1) =$$
$$= -\frac{1}{n} z^{-n+1} \exp(-z^n) + \frac{n-1}{n^2} z^{-2n+1} \exp(-z^n) +$$
$$+ \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} \int_1^z \zeta^{-2n} \exp(-\zeta^n)\, d\zeta + O(1).$$

Pero si $z = \rho \exp\left[\frac{(2j-1)\pi i}{n} + \alpha i\right]$ y $n|\alpha| \leqslant \frac{\pi}{2}$, resulta

$$|z^{-n+1} \exp(-z^n)| = \rho^{-n+1} \exp(\rho^n \cos n\alpha),$$
$$\left| \int_1^z \zeta^{-2n} \exp(-\zeta^n)\, d\zeta \right| \leqslant \int_1^\rho t^{-2n} \exp(t^n \cos n\alpha)\, dt$$

y

$$\int_1^{\rho} t^{-2n}\exp(t^n\cos n\alpha)\,dt = o\,[\rho^{-n+1}\exp(\rho^n\cos n\alpha)] \qquad (n \geqslant 2).$$

Esta última relación se comprueba aplicando la regla de l'Hospital a la fracción:

$$\frac{\int_1^{\rho} t^{-2n}\exp(t^n\cos n\alpha)\,dt}{\rho^{-n+1}\exp(\rho^n\cos n\alpha)}.$$

Por consiguiente, en cada uno de los ángulos d_{2j} $(j = 1, \ldots, n)$ es válida la acotación:

$$g_n(z) = -\frac{1}{n}z^{-n+1}\exp(-z^n)\,[1+o(1)];$$

por lo cual, para $z = \rho\exp\left[\frac{(2j-1)\pi i}{n}+\alpha i\right]\in d_{2j}$:

$$\ln|g_n(z)| = \rho^n\cos n\alpha + \ln\left\{\frac{1}{n}\rho^{-n+1}[1+o(1)]\right\} = \rho^n\,[\cos n\alpha + o(1)].$$

Además, como se observó anteriormente, en cada uno de los ángulos d_{2j+1}:

$$\ln|g_n(z)| = \ln|A_j| + o(1) = O(1).$$

De aquí se deduce que

$$m(\rho,\infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|g_n(z)|\,d\alpha =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2\pi}\int_{(2j-1)\pi/n-\pi/2n}^{(2j-1)\pi/n+\pi/2n}\ln^+|g_n(z)|\,d\alpha + O(1) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\rho^n}{2\pi n}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta + o(1)\right] + O(1) = \frac{\rho^n}{\pi}[1+o(1)].$$

Finalmente,

$$\delta(A_j) = \varliminf_{\rho\to\infty}\frac{m(\rho, A_j)}{T(\rho)} = \varliminf_{\rho\to\infty}\frac{m(\rho, A_j)}{m(\rho,\infty)} \geqslant \varliminf_{\rho\to\infty}\frac{\frac{1}{\pi n}\rho^n[1+o(1)]}{\frac{1}{\pi}\rho^n[1+o(1)]} = \frac{1}{n};$$

además,

$$\delta(\infty) = \varliminf_{\rho\to\infty}\frac{m(\rho,\infty)}{T(\rho)} = 1.$$

En resumen, queda demostrado que todos los valores: ∞, $A_0, \ldots, A_{n-1}$, tienen defectos positivos. Como la suma de los defectos calculados:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \delta(A_j) + \delta(\infty) \geqslant 2,$$

y en virtud de la relación de los defectos esta suma no puede ser superior a 2, se deduce que

$$\delta(A_j) = \frac{1}{n}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

4) Función $\wp(z)$. Esta función ofrece interés porque carece de valores excepcionales.

Comenzaremos con el cálculo de $N(\rho, \infty)$. Como en cada paralelogramo de períodos la función $\wp(z)$ tiene un polo doble, calcularemos primero la cantidad de paralelogramos que están enteramente situados en el círculo cerrado $|z| \leqslant \rho$; supongamos que éstos hay $\nu(\rho)$. Después calcularemos la cantidad $\mu(\rho)$ de paralelogramos que tienen cada uno de ellos al menos un punto común con el círculo cerrado $|z| \leqslant \rho$. Está claro que

$$2\nu(\rho) \leqslant n(\rho, \infty) \leqslant 2\mu(\rho).$$

Designando con la letra D el área de cada paralelogramo de períodos y con la letra d la longitud de la diagonal mayor, tendremos:

$$\pi\rho^2 > \nu(\rho) D > \pi(\rho - d)^2,$$

$$[\mu(\rho) - \nu(\rho)] D < \pi(\rho + d)^2 - \pi(\rho - d)^2 = 4\pi\rho d.$$

En efecto, $\nu(\rho)$ paralelogramos situados en el círculo $|z| \leqslant \rho$ cubren por completo el círculo $|z| \leqslant \rho - d$, mientras que $\mu(\rho) - \nu(\rho)$ paralelogramos que tienen puntos comunes con la circunferencia $|z| = \rho$ están contenidos en el anillo circular $\rho - d \leqslant |z| \leqslant \rho + d$ (se supone que $\rho > d$).
Por ello

$$\frac{\pi\rho^2}{D} > \nu(\rho) > \frac{\pi}{D}(\rho - d)^2,$$

$$\mu(\rho) < \nu(\rho) + \frac{4\pi\rho d}{D} < \frac{\pi\rho^2}{D} + \frac{4\pi\rho d}{D}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{2\pi\rho^2}{D} - \frac{4\pi d\rho}{D} + \frac{2\pi d^2}{D} < n(\rho, \infty) < \frac{2\pi\rho^2}{D} + \frac{8\pi\rho d}{D},$$

o sea,

$$n(\rho, \infty) = \frac{2\pi\rho^2}{D} + O(\rho).$$

Por lo tanto, para $N(\rho, \infty)$ obtenemos (obsérvese que $n(0, \infty) = 2$):

$$N(\rho, \infty) = \int_0^\rho \frac{n(t, \infty) - 2}{t}\, dt + 2 \ln \rho = \int_1^\rho \frac{n(t, \infty)\, dt}{t} + O(1) = \frac{\pi \rho^2}{D} + O(\rho).$$

Calculemos ahora

$$m(\rho, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |\wp(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha$$

y demostremos que $m(\rho, \infty) = O(1)$. Con este fin, cubramos todo el plano por tales paralelogramos de períodos que los polos de la función $\wp(z)$ coincidan con los centros de estos paralelogramos.

Sea Δ_0 uno de estos paralelogramos y sea z_0 su centro. Como la función $\wp(z)$ tiene en Δ_0 el único polo doble en z_0, para $\wp(z)$ resulta la desigualdad

$$|\wp(z)| < \frac{C^2}{|z - z_0|^2},$$

la cual es válida en todos los puntos del paralelogramo Δ_0. Aquí C es la misma constante para cualquier paralelogramo Δ, si z_0 denota el centro de este paralelogramo Δ (aquí nos basamos en que $\wp(z)$ es una función doblemente periódica). Consideremos ahora todos los paralelogramos que tienen puntos comunes con la circunferencia $|z| = \rho$, y sean $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\varkappa(\rho)}$ los arcos en que se divide la circunferencia por estos paralelogramos. Según lo anterior la cantidad de tales paralelogramos es:

$$\varkappa(\rho) = \mu(\rho) - \nu(\rho) < \frac{\pi(\rho + d)^2 - \pi(\rho - d)^2}{D} = \frac{4\pi\rho d}{D}.$$

Si el arco σ_j pertenece al paralelogramo Δ_j y z_j es el centro del paralelogramo, entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_j} \ln^+ |\wp(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha < \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_j} \ln^+ \frac{C^2}{|\rho e^{i\alpha} - z_j|^2}\, d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{C^2}{|\rho e^{i\alpha} - z_j|^2}\, d\alpha.$$

Para acotar la última integral, consideremos el arco Σ_j que intercepta el círculo $|z - z_j| \leqslant C$ en la circunferencia $|z| = \rho$, y sea $2\gamma_j$ el ángulo central correspondiente con el vértice en el punto $z = 0$. Es obvio que γ_j es un ángulo agudo para ρ suficientemente grande, puesto que $\frac{|z_j|}{\rho} \to 1$ para $\rho \to \infty$ (no hay que olvidarse que z_j es el centro de un paralelogramo de períodos que tiene puntos

comunes con la circunferencia $|z| = \rho$). Por ello, de la desigualdad $\operatorname{sen} \gamma_j \leqslant \frac{C}{\rho}$ se desprende que $\gamma_j = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Ahora se tiene:

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{C^2}{|\rho e^{i\alpha} - z_j|^2} \, d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_j} \ln \frac{C^2}{|\rho e^{i\alpha} - z_j|^2} \, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_j} \ln \frac{C^2}{\rho^2 + r_j^2 - 2\rho r_j \cos(\alpha - \theta_j)} \, d\alpha,$$

donde $z_j = r_j e^{i\theta_j}$. Integrando por partes hallamos:

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_j} \frac{2\rho r_j \operatorname{sen}(\alpha - \theta_j)(\alpha - \theta_j)\, d\alpha}{\rho^2 + r_j^2 - 2\rho r_j \cos(\alpha - \theta_j)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\gamma_j} \frac{2\rho r_j \operatorname{sen} \alpha \cdot \alpha}{(\rho - r_j)^2 + 4\rho r_j \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} \, d\alpha,$$

de donde

$$I_j \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{\gamma_j} \frac{\alpha^2}{\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\alpha^2}{4}} \, d\alpha < \frac{\pi \gamma_j}{2}$$

y, por consiguiente,

$$I_j = O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Por esta razón

$$m(\rho, \infty) - \sum_1^{\varkappa(\rho)} \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_j} \ln^+ |\wp(\rho e^{i\alpha})| \, d\alpha = O\left(\frac{\varkappa(\rho)}{\rho}\right) = O(1).$$

Así, pues, para la función característica $T(\rho)$ resulta:

$$T(\rho) = m(\rho, \infty) + N(\rho, \infty) = \frac{\pi\rho^2}{D} + O(\rho).$$

Si ahora A es un valor finito arbitrario, la acotación de la función $N(\rho, A)$ será similar en todo a la acotación realizada de la función $N(\rho, \infty)$. En efecto, cada paralelogramo de períodos contiene dos ceros de la función $\wp(z) - A$ y, por consiguiente,

$$n(\rho, A) = \frac{2\pi\rho^2}{D} + O(\rho),$$

de donde

$$N(\rho, A) = \frac{\pi\rho^2}{D} + O(\rho).$$

En virtud del primer teorema fundamental, para $m(\rho, A)$ obtenemos:

$$m(\rho, A) = T(\rho) - N(\rho, A) + O(1) = O(\rho).$$

Así, pues, para cualquier valor A, finito o infinito,

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{m(\rho, A)}{T(\rho)} = 0,$$

es decir, ningún valor es excepcional para la función $\wp(z)$.

7.4. En este apartado estudiaremos las propiedades generales de la función característica $T(\rho)$. Ante todo, demostraremos que $T(\rho)$, del mismo modo que el logaritmo del módulo máximo $M(\rho)$ de una función analítica, es no decreciente y representa una función convexa de $\ln \rho$ (compárese con el teorema de los tres círculos, ap. 3.2, cap. 6). En la demostración partiremos del hecho de que la función $N(\rho, \infty)$ posee las propiedades pedidas (véase el ap. 7.2), y procuraremos expresar $T(\rho)$ mediante $N(\rho, \infty)$. Supongamos primero que $f(0) \neq \infty$; aplicando la fórmula (7.1:1) a la función $f(z) - e^{i\vartheta}$, donde ϑ es un número real fijo, hallaremos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha}) - e^{i\vartheta}|\, d\alpha = \ln|f(0) - e^{i\vartheta}| + N(\rho, e^{i\vartheta}) - N(\rho, \infty) \tag{7.4:1}$$

o bien, multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{2\pi} d\vartheta$ e integrando desde 0 hasta 2π:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha}) - e^{i\vartheta}|\, d\vartheta\right] d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(0) - e^{i\vartheta}|\, d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(\rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta - N(\rho, \infty). \tag{7.4:2}$$

Consideremos la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|w - e^{i\vartheta}|\, d\vartheta,$$

donde w es un número fijo. Si $|w| \leqslant 1$, entonces, aplicando la fórmula general (7.1:1) a la función $\ln|\zeta - w|$, tendremos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|w - e^{i\vartheta}|\, d\vartheta = \ln|w| - \ln|w| = 0;$$

si $|w|>1$, la función $\ln|w-\zeta|$ es armónica en el círculo $|\zeta|\leqslant 1$, de donde

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|w-e^{i\vartheta}|\,d\vartheta=\ln|w|.$$

En resumen, en todos los casos

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|w-e^{i\vartheta}|\,d\vartheta=\ln^+|w|.$$

Por ello, la fórmula (7.4:2) toma la forma:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|=\ln^+|f(0)|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(\rho,e^{i\vartheta})\,d\vartheta-N(\rho,\infty),$$

o sea,

$$T(\rho)=m(\rho,\infty)+N(\rho,\infty)=\ln^+|f(0)|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(\rho,e^{i\vartheta})\,d\vartheta. \quad (7.4:3)$$

En el caso en que $f(0)=\infty$, en lugar de la fórmula inicial (7.4:1) tendríamos:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\alpha})-e^{i\vartheta}|\,d\alpha=\ln|c_\lambda|+N(\rho,e^{i\vartheta})-N(\rho,\infty),$$

donde c_λ es el coeficiente del término inferior en el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en un entorno del punto $z=0$. Por esta razón, en este caso la fórmula (7.4:3) se sustituye por la fórmula

$$T(\rho)=\ln|c_\lambda|+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}N(\rho,e^{i\vartheta})\,d\vartheta. \quad (7.4:3')$$

En uno y otro caso vemos que las propiedades de no decrecimiento y convexidad de la función $T(\rho)$, considerada como función de $\ln\rho$, se deducen de las propiedades correspondientes de la función $N(\rho,e^{i\vartheta})$. Precisando,

$$T(\rho')-T(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[N(\rho',e^{i\vartheta})-N(\rho,e^{i\vartheta})]\,d\vartheta\geqslant 0$$

para $\rho'>\rho$ y

$$\frac{dT(\rho)}{d\ln\rho}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dN(\rho,e^{i\vartheta})}{d\ln\rho}\,d\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}n(\rho,e^{i\vartheta})\,d\vartheta$$

es una función no decreciente de $\ln\rho$.

Obsérvese que si $f(z)$ es una función meromorfa en todo el plano finito ($R = \infty$) y $f(z) \not\equiv$ const, entonces $T(\rho)$ necesariamente tiende al infinito cuando ρ tiende al infinito. En efecto, designando $f(0)$ con A, tendremos en virtud del teorema fundamental

$$m(\rho, A) + N(\rho, A) = T(\rho) + O(1),$$

de donde

$$N(\rho, A) = \int_0^\rho \frac{n(t, A) - n(0, A)}{t}\, dt + n(0, A) \ln \rho \leqslant T(\rho) + O(1);$$

mas, por otra parte,

$$N(\rho, A) \geqslant n(0, A) \ln \rho \geqslant \ln^+ \rho.$$

Por lo tanto,

$$\ln \rho \leqslant T(\rho) + O(1),$$

de donde se deduce que

$$\lim_{\rho\to\infty} T(\rho) = \infty$$

y, además,

$$\varliminf_{\rho\to\infty} \frac{T(\rho)}{\ln \rho} \geqslant 1.$$

En el caso de funciones meromorfas en un círculo finito ($R < \infty$) no hay razones para afirmar que la función característica $T(\rho)$ tiende al infinito cuando ρ tiende a R. Consideremos, en particular, el caso de funciones que no tienen polos en el círculo $|z| < R$; entonces, para éstas

$$N(\rho, \infty) = 0 \quad \text{y} \quad T(\rho) = m(\rho, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha.$$

Ya se vio en el ap. 5.2, cap. 6, que la condición de que la última función esté acotada cuando ρ tiende a R es equivalente a la hipótesis de que $f(z)$ pueda expresarse en el círculo $|z| < R$ en forma de un cociente de dos funciones analíticas que estén acotadas en valor absoluto. En realidad, este resultado se extendió en el ap. 6.4 del mismo capítulo a las funciones meromorfas. A saber, se había demostrado allí que el conjunto de las dos condiciones:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (R - |b_k|) < +\infty \quad \text{y} \quad \varlimsup_{\rho\to R} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\alpha})|\, d\alpha < +\infty,$$

donde $\{b_k\}$ es la sucesión de los polos de la función $f(z)$ que están situados en el círculo $|z| < R$, es equivalente a la condición de

que $f(z)$ se exprese en el mismo círculo en forma de un cociente de dos funciones analíticas y acotadas en valor absoluto.

Comprobemos que estas condiciones expresan que $T(\rho)$ está acotada. En efecto, de lo dicho en el ap. 4.2, cap. 6, se deduce que la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(R-|b_k|)$ equivale a la convergencia del producto infinito $\prod_{k=1}^{\infty}\frac{R}{|b_k|}$, lo cual, a su vez, equivale a que esté acotado

$$\ln\prod_{k=1}^{p(\rho)}\frac{\rho}{|b_k|}=\sum_{1}^{p(\rho)}\ln\frac{\rho}{|b_k|}\quad \text{cuando } \rho\to R.$$

Pero

$$\sum_{1}^{p(\rho)}\ln\frac{\rho}{|b_k|}=\int_0^{\rho}\frac{p(t)}{t}\,dt=\int_0^{\rho}\frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}\,dt$$

(véase el ap. 7.1); al fin y al cabo, las condiciones que determinan la clase de las funciones meromorfas de forma acotada en el círculo $|z|<R$, equivalen a que estén acotadas las cantidades

$$N(\rho)=\int_0^{\rho}\frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}\,dt+n(0,\infty)\ln\rho\quad \text{y}\quad m(\rho,\infty),$$

es decir, a que esté acotada la función característica $T(\rho)$. En resumen, la clase de las funciones meromorfas de forma acotada coincide con la clase de las funciones de característica acotada.

7.5. Estudiemos el caso de una función trascendente entera $f(z)$ y aclaremos para ésta la relación entre el módulo máximo $M(\rho)$ y la función característica $T(\rho)$. Como en este caso $N(\rho,\infty)=0$, resulta:

$$T(\rho)=m(\rho,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha\leqslant\ln^+M(\rho).$$

Pero $\ln M(\rho)$ tiende a ∞ junto con ρ; por ello,

$$\ln^+M(\rho)=\ln M(\rho),$$

comenzando desde cierto ρ, y se tiene:

$$T(\rho)\leqslant\ln M(\rho).$$

Por otra parte, según la fórmula de Poisson-Jentzsch,

$$\ln|f(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha})| \frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha -$$

$$-\ln\left[\frac{\rho^\lambda}{r^\lambda}\prod_1^{n(\rho)}\frac{\rho}{|a_k|}\right] \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha})| \frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+|f(e^{i\alpha})| \frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\rho+r}{\rho-r}\, m(\rho, \infty) \leqslant \frac{\rho+r}{\rho-r}\, T(\rho);$$

por lo cual

$$\ln M(r) \leqslant \frac{\rho+r}{\rho-r}\, T(\rho).$$

Así, pues,

$$T(r) \leqslant \ln M(r) \leqslant \frac{\rho+r}{\rho-r}\, T(\rho), \qquad (7.5:1)$$

de donde

$$\ln T(r) \leqslant \ln\ln M(r) \leqslant \ln\frac{\rho+r}{\rho-r} + \ln T(\rho).$$

Por consiguiente, haciendo $\rho = 2r$, obtenemos:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln T(r)}{\ln r} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln T(2r)}{\ln r} = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln T(2r)}{\ln (2r)},$$

o sea,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} = \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln T(r)}{\ln r}.$$

Recordando la definición de orden de crecimiento de una función entera (ap. 1.1), vemos que en esta definición puede utilizarse la función característica $T(r)$ en lugar del módulo máximo $M(r)$, sustituyendo $\ln M(r)$ por $T(r)$.

Examinemos ahora el caso de una función $f(z)$ que es meromorfa en el plano finito y no es entera. Aquí la función $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ no puede desempeñar inmediatamente el mismo papel que desempeñaba en la teoría de las funciones enteras. En efecto, $M(r)$ ya no es una función no decreciente, puesto que, haciéndose infinita para cada $r = r_0$ que coincida con el módulo de algún polo de la función $f(z)$, toma valores finitos para todos los valores de

r suficientemente próximos a r_0 y distintos de r_0. Además, deja ya de coincidir con el módulo máximo en el círculo cerrado: $\max_{|z|\leq r} |f(z)|$. La función característica $T(r)$ la cual, como se vio en el ap. 7.4, es una función no decreciente y convexa de $\ln r$, representa una sustitución natural del módulo máximo para una función meromorfa arbitraria. Aplicándola se puede extender el concepto de orden de crecimiento a cualesquiera funciones meromorfas, suponiendo por definición que el orden de crecimiento de la función es $\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln T(r)}{\ln r}$.

Para ilustrar esto, determinemos el orden de crecimiento de la función $\operatorname{tg} z$. Como se sabe, esta función no toma los valores i y $-i$ (t. 1, ap. 4.10, cap. 2). Por lo tanto, en este caso $N(\rho, i) = 0$ y, por consiguiente, para calcular $T(\rho)$ se tiene (en virtud del teorema fundamental del ap. 7.2):

$$T(\rho) = m(\rho, i) + O(1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|\operatorname{tg}(\rho e^{i\alpha}) - i|}\, d\alpha + O(1).$$

Pero

$$\frac{1}{|\operatorname{tg}(\rho e^{i\alpha}) - i|} = \frac{|\exp(i\rho e^{i\alpha}) + \exp(-i\rho e^{i\alpha})|}{|2\exp(i\rho e^{i\alpha})|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\exp(\rho \operatorname{sen}\alpha) + \exp(-\rho \operatorname{sen}\alpha)}{2\exp(-\rho \operatorname{sen}\alpha)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp(2\rho \operatorname{sen}\alpha);$$

la última cantidad no supera a 1 si $\pi \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, por lo cual en el segmento $[\pi, 2\pi]$:

$$\ln^+ \frac{1}{|\operatorname{tg}(\rho e^{i\alpha}) - i|} = 0.$$

En el intervalo $0 < \alpha < \pi$ se tiene:

$$2\rho \operatorname{sen}\alpha > \ln \frac{1}{|\operatorname{tg}(\rho e^{i\alpha}) - i|} =$$

$$= 2\rho \operatorname{sen}\alpha + \ln \frac{1 + e^{-2\rho \operatorname{sen}\alpha}}{2} > 2\rho \operatorname{sen}\alpha - \ln 2;$$

por lo cual

$$\ln^+ \frac{1}{|\operatorname{tg}(\rho e^{i\alpha}) - i|} = 2\rho \operatorname{sen}\alpha + O(1)$$

y, por consiguiente,

$$T(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2\rho \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha + O(1) = \frac{2}{\pi}\rho + O(1).$$

De aquí se deduce, finalmente, que el orden de crecimiento de la función $\operatorname{tg} z$ es igual a

$$\varlimsup_{\rho\to\infty} \frac{\ln\left[\frac{2}{\pi}\rho+O(1)\right]}{\ln\rho}=1.$$

En resumen, $\operatorname{tg} z$ es una función meromorfa de primer orden.

Calculemos también el orden de la función meromorfa $\wp(z)$. Como para ésta $T(\rho)=\frac{\pi\rho^2}{D}+O(\rho)$, donde D es el área del paralelogramo fundamental de períodos (véase el ejemplo 4) del ap. 7.3), resulta

$$\varlimsup_{\rho\to\infty}\frac{\ln T(\rho)}{\ln\rho}=2,$$

es decir, la función elíptica $\wp(z)$ es de segundo orden.

7.6. Para terminar este párrafo deduzcamos la fórmula general para la representación de las funciones meromorfas de orden finito.

Partiremos de la fórmula de Poisson — Jentzsch

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\alpha})|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2r\rho\cos(\alpha-\theta)}\,d\alpha=$$

$$=\ln\left|\frac{f(re^{i\theta})}{r^\lambda}\right|+\lambda\ln\rho-\sum_1^{n(\rho)}\ln\frac{\rho|z-a_k|}{|\rho^2-\bar a_k z|}+\sum_1^{p(\rho)}\ln\frac{\rho|z-b_k|}{|\rho^2-\bar b_k z|}.$$

Está claro que la función armónica que figura en el primer miembro de la igualdad es la parte real de la función analítica de $z=re^{i\theta}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\alpha})|\cdot\frac{\rho e^{i\alpha}+z}{\rho e^{i\alpha}-z}\cdot d\alpha$$

(véase la fórmula (1.2:15), cap. 6), y la función armónica del segundo miembro de la igualdad representa la parte real de la siguiente función analítica:

$$\operatorname{Ln}\frac{f(z)}{z^\lambda}+\lambda\ln\rho-\sum_1^{n(\rho)}\operatorname{Ln}\frac{\rho(z-a_k)}{\rho^2-\bar a_k z}+\sum_1^{p(\rho)}\operatorname{Ln}\frac{\rho(z-b_k)}{\rho-\bar b_k z};$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|f(\rho e^{i\alpha})|\frac{\rho e^{i\alpha}+z}{\rho e^{i\alpha}-z}d\alpha=Ci+\operatorname{Ln}\frac{f(z)}{z^\lambda}+\lambda\ln\rho-$$

$$-\sum_1^{n(\rho)}\operatorname{Ln}\frac{\rho(z-a_k)}{\rho^2-\bar a_k z}+\sum_1^{p(\rho)}\operatorname{Ln}\frac{\rho(z-b_k)}{\rho^2-\bar b_k z}. \quad (7.6:1)$$

Designemos con q el menor número entero para el cual se cumple la igualdad

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{T(\rho)}{\rho^{q+1}} = 0 \qquad (0 \leqslant q < \infty).$$

Tal número existe, pues, por la hipótesis, $f(z)$ es una función de orden finito μ. Evidentemente, $q = [\mu]$ si μ no es un número entero y $q = \mu$ o $q = \mu - 1$ si μ es un número entero. Derivando la fórmula (7.6:1) término a término $q+1$ veces obtenemos que

$$\frac{d^{q+1}\operatorname{Ln} f(z)}{dz^{q+1}} = \lambda \frac{(-1)^q q!}{z^{q+1}} + \sum_1^{n(\rho)} \frac{(-1)^q q!}{(z-a_k)^{q+1}} +$$

$$+ \sum_1^{n(\rho)} \frac{q!\,\bar{a}_k^{q+1}}{(\rho^2-\bar{a}_k z)^{q+1}} - \sum_1^{p(\rho)} \frac{(-1)^q q!}{(z-b_k)^{q+1}} - \sum_1^{p(\rho)} \frac{q!\,\bar{b}_k^{q+1}}{(\rho^2-\bar{b}_k z)^{q+1}} +$$

$$+ \frac{(q+1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha})| \cdot \frac{2\rho e^{i\alpha}}{(\rho e^{i\alpha}-z)^{q+2}}\, d\alpha. \qquad (7.6:2)$$

Consideremos las funciones

$$S_\rho(z) = q! \sum_1^{n(\rho)} \frac{\bar{a}_k^{q+1}}{(\rho^2-\bar{a}_k z)^{q+1}} - q! \sum_1^{p(\rho)} \frac{\bar{b}_k^{q+1}}{(\rho^2-\bar{b}_k z)^{q+1}}$$

$$I_\rho(z) = \frac{(q+1)!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(\rho e^{i\alpha})| \frac{2\rho e^{i\alpha}}{(\rho e^{i\alpha}-z)^{q+2}}\, d\alpha$$

y demostremos que éstas tienden a cero cuando ρ tiende al infinito y, además, uniformemente respecto de z, $|z| \leqslant r < \infty$. En efecto, si $|z| \leqslant r < \rho$, se tiene:

$$\left| \frac{\bar{a}_k}{\rho^2-\bar{a}_k z} \right| \leqslant \frac{|a_k|}{\rho^2-|a_k|\,|z|} \leqslant \frac{1}{\rho-r},$$

puesto que $|a_k| \leqslant \rho$. Por consiguiente,

$$\left| \sum_1^{n(\rho)} \frac{\bar{a}_k^{q+1}}{(\rho^2-\bar{a}_k z)^{q+1}} \right| \leqslant \frac{n(\rho,0)}{(\rho-r)^{q+1}} = \frac{n(\rho,0)}{\rho^{q+1}} \cdot \left(1-\frac{r}{\rho}\right)^{-q-1};$$

pero

$$n(\rho,0) = n(\rho,0) \int_\rho^{e\rho} \frac{dt}{t} \leqslant \int_\rho^{e\rho} \frac{n(t,0)}{t}\, dt \leqslant N(e\rho,0) < T(e\rho) + O(1);$$

por lo tanto,

$$\frac{n(\rho, 0)}{\rho^{q+1}} < \frac{e^{q+1}T(e\rho)}{(e\rho)^{q+1}} + \frac{O(1)}{\rho^{q+1}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad \rho \to \infty.$$

Así, pues,

$$\lim_{\rho\to\infty} \sum_{1}^{n(\rho)} \frac{\bar{a}_k^{q+1}}{(\rho^2 - \bar{a}_k z)^{q+1}} = 0;$$

del mismo modo se demuestra que

$$\lim_{\rho\to\infty} \sum_{1}^{p(\rho)} \frac{\bar{b}_k^{q+1}}{(\rho^2 - \bar{b}_k z)^{q+1}} = 0.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{\rho\to\infty} S_\rho(z) = 0.$$

Acotemos ahora el módulo de la integral $I_\rho(z)$:

$$|I_\rho(z)| \leqslant \frac{(q+1)!\,\rho}{\pi(\rho - r)^{q+2}} \int_0^{2\pi} |\ln|f(\rho e^{i\alpha})||\,d\alpha =$$

$$= \frac{(q+1)!\,\rho}{\pi(\rho - r)^{q+2}} \left[\int_0^{2\pi} \ln^+|f(\rho e^{i\alpha})|\,d\alpha + \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|f(\rho e^{i\alpha})|}\,d\alpha\right] =$$

$$= \frac{(q+1)!}{\pi\left(1 - \frac{r}{\rho}\right)^{q+2}} \frac{m(\rho, \infty) + m(\rho, 0)}{\rho^{q+1}} <$$

$$< \frac{(q+1)!}{\pi\left(1 - \frac{r}{\rho}\right)^{q+1}} \frac{2T(\rho) + O(1)}{\rho^{q+1}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad \rho \to \infty.$$

Por esta razón, de la fórmula (7.6:2) se deduce la relación siguiente:

$$\frac{d^{q+1}\ln f(z)}{dz^{q+1}} = (-1)^{q+1} q! \lim_{\rho\to\infty} \left[\sum_{1}^{p(\rho)} \frac{1}{(z - b_k)^{q+1}} - \frac{\lambda}{z^{q+1}} - \sum_{1}^{n(\rho)} \frac{1}{(z - a_k)^{q+1}}\right], \tag{7.6·3}$$

siendo uniforme la convergencia en cada círculo $|z| \leqslant r < \infty$. De aquí, integrando bajo el signo del límite $q+1$ veces, obtenemos:

$$\ln f(z) = \lambda \ln z + \sum_{0}^{q} c_j z^j + \lim_{\rho\to\infty} \left\{\sum_{1}^{n(\rho)} \left[\ln\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) + \right.\right.$$

$$+\frac{z}{a_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_k}\right)^q\right]-\sum_{1}^{p(\rho)}\left[\ln\left(1-\frac{z}{b_k}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{z}{b_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_k}\right)^q\right]\Bigg\}+2m\pi i, \qquad (7.6:4)$$

donde los coeficientes $j!\,c_j$ $(j=0, \ldots, q)$ representan los valores de $\frac{d^j \ln[f(z)\,z^{-\lambda}]}{dz^j}$ en el punto $z=0$ y $m=m_z$ es un número entero. Llegamos al siguiente teorema: *toda función meromorfa en el plano finito, que satisface a la condición* $\lim\limits_{\rho\to\infty}\frac{T(\rho)}{|\rho^{q+1}|}=0$ (q es un número entero), *se expresa según la fórmula* (7.6:4) *o según la fórmula siguiente*:

$$f(z)=z^\lambda \exp\left(\sum_{0}^{q} c_j z^j\right)\times$$

$$\times\lim_{\rho\to\infty}\frac{\prod\limits_{1}^{n(\rho)}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\exp\left[\frac{z}{a_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_k}\right)^q\right]}{\prod\limits_{1}^{p(\rho)}\left(1-\frac{z}{b_k}\right)\exp\left[\frac{z}{b_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_k}\right)^q\right]}. \qquad (7.6:5)$$

Si las series $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{|a_k|^{q+1}}$ y $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{|b_k|^{q+1}}$ son convergentes, entonces los productos infinitos

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\exp\left[\frac{z}{a_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_k}\right)^q\right]$$

y

$$\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_k}\right)\exp\left[\frac{z}{b_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_k}\right)^q\right]$$

convergen absoluta y uniformemente en cada círculo de radio finito. En este caso la fórmula (7.6:5) se puede sustituir por la siguiente:

$$f(z)=z^\lambda \exp\left(\sum_{1}^{q} c_j z^j\right)\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)\exp\left[\frac{z}{a_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_k}\right)^q\right]}{\prod\limits_{1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_k}\right)\exp\left[\frac{z}{b_k}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_k}\right)^q\right]}. \qquad (7.6:6)$$

Así, pues, para $\operatorname{tg} z$ la función característica tiene la forma $T(\rho) = \frac{2\rho}{\pi} + O(1)$ y, por consiguiente, $q = 1$. Como los ceros de $\operatorname{tg} z$ son los puntos $j\pi$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, y los polos son: $(2j+1)\frac{\pi}{2}$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, las series $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|a_k|^2}$ y $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|b_h|^2}$ son convergentes y la fórmula (7.6:6) toma la forma:

$$\operatorname{tg} z = z e^{c_0 + c_1 z} \frac{\prod_{-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{j\pi}\right) e^{\frac{z}{j\pi}}}{\prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{(2j+1)\frac{\pi}{2}}\right) e^{\frac{z}{(2j+1)\frac{\pi}{2}}}} =$$

$$= z e^{c_0 + c_1 z} \frac{\prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2 \pi^2}\right)}{\prod_{1}^{\infty} \left[1 - \frac{4z^2}{(2j+1)^2 \pi^2}\right]}.$$

Como $\frac{\operatorname{tg} z}{z}$ es una función par, el coeficiente c_1 tiene que ser igual a cero. De la relación $\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{tg} z}{z} = 1$ sale que $c_0 = 0$ (o $2m\pi i$, donde m es un número entero); por consiguiente,

$$\operatorname{tg} z = z \cdot \frac{\prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2 \pi^2}\right)}{\prod_{1}^{\infty} \left[1 - \frac{4z^2}{(2j+1)^2 \pi^2}\right]}.$$

Claro, esta fórmula puede obtenerse fácilmente partiendo del conocido desarrollo de $\operatorname{sen} z$ en producto infinito.

Si $f(z)$ es una función entera de orden μ, entonces, según el apartado anterior, tendremos para esta función

$$\overline{\lim_{\rho \to \infty}} \frac{\ln T(\rho)}{\ln \rho} = \mu.$$

De aquí se deduce que a la función $f(z)$ se le puede aplicar la relación (7.6:5), haciendo en ésta $q = [\mu]$ o $q = [\mu] - 1$ (de modo que

se cumpla la relación $\lim\limits_{\rho\to\infty}\frac{T(\rho)}{\rho^{q+1}}=0\Big)$ y sustituyendo por la unidad el producto que figura en el denominador. Entonces tendremos:

$$f(z)=z^{\lambda}\exp\Big(\sum_{0}^{q}c_jz^j\Big)\prod_{1}^{\infty}\Big(1-\frac{z}{a_k}\Big)\exp\Big(\frac{z}{a_k}+\ldots+\frac{1}{q}\Big(\frac{z}{a_k}\Big)^q\Big].$$

Hemos obtenido el desarrollo de una función entera de orden finito en producto infinito; este resultado se obtuvo de otro modo en el § 2 del presente capítulo.

Finalmente, apliquemos la fórmula (7.6:6) para demostrar el siguiente teorema:

Para que una función $f(z)$, meromorfa en el plano finito, sea racional, es necesario y suficiente que se cumpla la relación

$$\underline{\lim}\,\frac{T(\rho)}{\ln\rho}=r<\infty. \qquad (7.6:7)$$

Esta relación es necesaria, pues para una función racional se tiene: $T(\rho)=O(\ln\rho)$ (véase el ejemplo 1, ap. 7.3). Para demostrar que es suficiente, obsérvese que, debido a la condición (7.6:7), para cualquier valor A, finito o infinito, se tiene:

$$\underline{\lim}_{\rho\to\infty}\frac{N(\rho,A)}{\ln\rho}\leqslant\underline{\lim}_{\rho\to\infty}\frac{T(\rho)}{\ln\rho}=r<\infty.$$

Pero, para cualquier $\rho_0>1$ se tiene también

$$N(\rho,A)=\int_0^{\rho}\frac{n(t,A)-n(0,A)}{t}\,dt+n(0,A)\ln\rho\geqslant$$

$$\geqslant\int_1^{\rho}\frac{n(t,A)-n(0,A)}{t}\,dt+n(0,A)\ln\rho\geqslant$$

$$\geqslant\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{n(t,A)}{t}\,dt\geqslant n(\rho_0,A)\ln\rho\Big(1-\frac{\ln\rho_0}{\ln\rho}\Big).$$

Por consiguiente,

$$n(\rho_0,A)\leqslant\underline{\lim}_{\rho\to\infty}\frac{N(\rho,A)}{\ln\rho}\leqslant r,$$

es decir, la cantidad de A-puntos de la función $f(z)$ en cualquier círculo no es superior a r. Por ello, en particular, no es superior a r también la cantidad de ceros n_0 y la cantidad de polos p_0 en todo

el plano finito. Utilizando esto, y teniendo en cuenta que en la fórmula (7.6:5) se puede poner en el caso dado $q = 0$, hallamos de ésta:

$$f(z) = z^{\lambda} \exp c_0 \cdot \frac{\prod_{1}^{n_0} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)}{\prod_{1}^{n_0} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right)},$$

o sea, $f(z)$ es una función racional de grado no superior a r.

Evidentemente, el teorema demostrado se puede formular del modo siguiente:

Para toda función trascendente $f(z)$, que sea meromorfa en el plano finito, se cumple la relación

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{T(\rho)}{\ln \rho} = \infty.$$

CAPITULO

OCTAVO

CONCEPTO DE SUPERFICIE DE RIEMANN. PROLONGACION ANALITICA

§ 1. CONCEPTO DE SUPERFICIE. SUPERFICIE ABSTRACTA DE RIEMANN

1.1. Generalizando las propiedades de diversas superficies elementales se llega al concepto de superficie topológica.

Sea E un conjunto infinito, a cuyos elementos los llamaremos puntos. Supongamos que en el mismo se ha elegido un sistema determinado de subconjuntos $\{U\}$ que posee las propiedades siguientes:

a) a cada punto $e \in E$ se han puesto en correspondencia ciertos conjuntos de U (al menos uno); estos conjuntos contienen al punto e, se designan con $U(e)$ y se llaman entornos del punto e;

b) para cualesquiera dos entornos de un mismo punto e existe un tercer entorno del punto e que está contenido en cada uno de los dos dados;

c) si $e' \in U(e)$, entonces existe $U(e') \subset U(e)$;

d) si el punto e' es distinto de e, entonces existen $U(e')$ y $U(e)$ sin puntos comunes.

Los conjuntos E, en los cuales se han elegido tales sistemas de subconjuntos, forman una clase especial de e s p a c i o s t o p o l ó g i c o s y se llaman T_2- e s p a c i o s*).

En un T_2-espacio E, para cada conjunto M se puede definir el concepto de puntos de acumulación como tales puntos de E que cualquier entorno de los mismos contiene un conjunto infinito de puntos de M; luego se pueden introducir los conceptos de clausura del conjunto M, de conjuntos abiertos y cerrados, conexión. los conceptos de recintos y continuos, de curvas continuas y, en particular,

---

*) Sobre los espacios topológicos y los conceptos referentes a éstos véase P. S. A l e x á n d r o v, Introducción a la teoría general de los conjuntos y funciones (П. С. А л е к с а н д р о в, Введение в общую теорию множеств и функций, ОГИЗ, Гостехиздат, М.—Л., 1948, Прибавление к главе шестой).

de Jordan, de compacidad, etc. Todo esto se hace igual que, por ejemplo, para los conjuntos en el plano. Sometiendo a un T_2-espacio E a unas condiciones complementarias determinadas, se llega al concepto de superficie topológica. Tales condiciones son:

α) E es conexo (es decir, cualquiera que sea la división del mismo en dos subconjuntos disjuntos, al menos uno de ellos contiene puntos de acumulación del otro).

β) Existe un sistema B de recintos de E, que no es más que numerable, y tal que, para cada punto $e_0 \in E$ y cada entorno $U(e_0)$, se puede señalar uno de los recintos del sistema B que contiene al punto e_0 y está contenido en este entorno. (De un espacio que satisface a esta condición, se dice que posee una base numerable B).

γ) Cada punto $e_0 \in E$ posee un entorno $U(e_0)$ que admite una transformación biunívoca y bicontinua $z = \varphi_{e_0}(e)$ en un recinto simplemente conexo g_{e_0} del plano z, por ejemplo, en el círculo unidad o en todo el plano finito. (De un espacio que posee esta propiedad se dice que es localmente homeomorfo al plano).

En este caso la continuidad de la transformación $z = \varphi_{e_0}(e)$ en un punto $e_1 \in U(e_0)$ se entiende en el sentido siguiente: Para cada entorno k: $|z - z_1| < \rho$ del punto $z_1 = \varphi(e_1)$ existe un entorno $U(e_1) \subset U(e_0)$ tal que $z = \varphi_{e_0}(e) \in k$ si $e \in U(e_1)$.

De un modo similar se define la continuidad de la transformación inversa $e = \varphi_{e_0}^{-1}(z)$.

La condición γ) permite reducir el estudio de los entornos $U(e_0)$ al estudio de los recintos simplemente conexos g_{e_0} correspondientes mediante la transformación homeomorfa $z = \varphi_{e_0}(e)$. Se puede decir que todo entorno $U(e_0)$ posee la misma estructura (topológica) que un recinto simplemente conexo del plano.

Obsérvese que en la transformación $z = \varphi_{e_0}(e)$ los conjuntos cerrados y abiertos de puntos del entorno $U(e_0)$ se convierten en conjuntos cerrados y abiertos de puntos del recinto g_{e_0}, respectivamente. Demostremos esto, por ejemplo, para el caso de un conjunto abierto $M \subset U(e_0)$.

Sea $z_1 = \varphi_{e_0}(e_1)$ un punto de la imagen $m = \varphi_{e_0}(M)$ de este conjunto. Suponiendo que éste no es interior para m, hallaremos una sucesión de puntos $\{\zeta_n\}$, pertenecientes a g_{e_0} y no pertenecientes a m, que converge hacia z_1. Sus preimágenes $\varepsilon_n = \varphi_{e_0}^{-1}(\zeta_n)$ tienen que converger a e_1, pues la función $\varphi_{e_0}^{-1}(z)$ es continua. Por consiguiente, éstas estarán contenidas en el conjunto M comenzando desde cierto n en adelante (debido a que e_1 es un punto interior del conjunto M). Pero de aquí se deduce que $\zeta_n = \varphi_{e_0}(\varepsilon_n)$ tienen que pertenecer a $m = \varphi_{e_0}(M)$ comenzando desde cierto n en adelante. De la contradicción obtenida sacamos la conclusión de que la imagen de un conjunto abierto en la transformación $z = \varphi_{e_0}(e)$ es también un conjunto abierto.

Un T_2-espacio que posea las propiedades enumeradas (que sea conexo, que exista una base numerable y que haya para cada punto un entorno homeomorfo a un recinto simplemente conexo del plano), se llama superficie topológica (abreviadamente, superficie) o variedad bidimensional*).

Las superficies se dividen en cerradas, las cuales se caracterizan por la propiedad de compacidad, es decir, que cualquier conjunto infinito de puntos pertenecientes a ellas posee al menos un punto de acumulación, y abiertas, en las cuales existen conjuntos infinitos sin puntos de acumulación.

He aquí unos cuantos ejemplos elementales de superficies.

1) El plano finito en un espacio euclídeo con la definición ordinaria de entorno, representa una superficie abierta.

2) La esfera (o el plano ampliado) es una superficie cerrada.

3) El toro, obtenido por rotación de una circunferencia de radio r alrededor de un eje situado en un plano con la circunferencia y que no tiene puntos comunes con ella.

Si R es la distancia desde el centro de la circunferencia hasta el eje de rotación ($R > r$), entonces el entorno de un punto del toro se puede definir como la parte del toro que cae dentro de cualquier esfera con el centro en este punto y de radio menor que $2r$ y $2(R - r)$. En esta definición el conjunto de puntos del toro es una superficie cerrada.

4) Dividamos el plano finito en franjas $2\pi k \leqslant x < 2\pi(k + 1)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) y llamemos a los puntos z y z' congruentes si $z' - z = 2m\pi$, donde m es un número entero. Para cada punto del plano existe un conjunto infinito (numerable) de puntos congruentes con él y situados uno en cada franja. Uniéndolos en una clase podemos considerar cualquier punto como representante de toda la clase, en el sentido de que a la misma clase van a pertenecer los puntos del plano que son congruentes con el punto dado, y sólo ellos. Llamemos entorno de una clase dada al conjunto de las clases que se representan por puntos situados en el interior de un círculo de radio $\rho \leqslant \pi$ con el centro en uno de los puntos de la clase. Con tal definición el conjunto E de todas las clases posibles representa una superficie. Esta superficie es homeomorfa al cilindro circular recto

$$\xi = \rho \cos \theta, \qquad \eta = \rho \operatorname{sen} \theta, \qquad \zeta = \zeta, \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

puesto que, poniendo en correspondencia a cada clase representada por el punto $z = x + iy$ de la franja fundamental ($0 \leqslant x < 2\pi$) el punto $\xi = \rho \cos x$, $\eta = \rho \operatorname{sen} x$, $\zeta = y$ del cilindro, resulta, como

*) A veces, en la definición de variedad se omite la condición de existencia de una base numerable. Entonces el concepto de variedad bidimensional resulta ser más amplio que el concepto de superficie.

fácilmente se observa, una correspondencia homeomorfa entre la superficie E y los puntos del cilindro. La superficie construida aquí es abierta.

5) Dividamos el plano finito en rectángulos

$$2\alpha m \leqslant x < 2\alpha (m+1), \qquad 2\beta n \leqslant y < 2\beta (n+1)$$

(α y β son unos números reales positivos fijados) y llamemos a los puntos z y z' congruentes si $z' - z = 2\alpha m + 2i\beta n$. Para cada punto

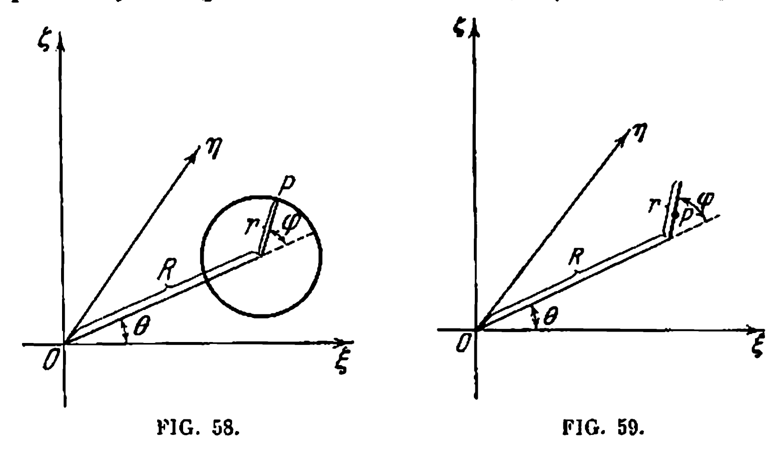


FIG. 58. FIG. 59.

del plano resulta un conjunto infinito numerable de puntos congruentes, situados uno en cada rectángulo. Reuniéndolos en una clase, se puede considerar cualquiera de ellos como representante de toda la clase. Llamemos entorno de una clase dada al conjunto de las clases que se representan por puntos situados en un círculo de radio $\rho \leqslant \min(\alpha, \beta)$ con el centro en uno de los puntos de la clase. Con tal definición el conjunto E de todas las clases posibles representa una superficie. Esta superficie es homeomorfa al toro, por ejemplo, al toro de rotación del ejemplo 3). En efecto, con una elección adecuada de los ejes coordenados y de los parámetros φ y θ (fig. 58) las ecuaciones de este último pueden expresarse en la forma

$$\xi = (R + r\cos\varphi)\cos\theta, \qquad \eta = (R + r\cos\varphi)\operatorname{sen}\theta, \qquad \zeta = r\operatorname{sen}\varphi$$
$$(0 \leqslant \theta < 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi),$$

y si se pone en correspondencia a la clase representada por el punto $z = x + iy$ del paralelogramo fundamental: $0 \leqslant x < 2\alpha$, $0 \leqslant y < 2\beta$, el punto del toro que se determina por los valores de los

parámetros $\theta = \frac{2\pi}{\alpha} x$ y $\varphi = \frac{2\pi}{\beta} y$, resulta una correspondencia homeomorfa entre E y el conjunto de los puntos del toro.

6) Consideremos la franja $-1 < y < 1$ y llamemos a dos puntos de la misma $z' = x' + iy'$ y $z = x + iy$ congruentes en uno de los dos casos: $x' - x = 4\pi k$ y $y' = y$ (k es un número entero) o $x' - x = (2k + 1) 2\pi$ y $y' = -y$. Reuniendo en una clase los puntos congruentes y definiendo el entorno de una clase como el conjunto de todas las clases que se representan por todos los puntos de cualquier círculo contenido en la franja con el centro en uno de los puntos de esta clase, hallaremos que el conjunto E de todas las clases representa una superficie. Fácilmente se comprueba que ésta es homeomorfa a la banda (o cinta) de Möbius, cuyo modelo puede obtenerse recortando un rectángulo de papel de base 2π y de altura 2, doblándolo de tal modo que se unan a pares los puntos de los lados laterales que son simétricos respecto del centro del rectángulo, y pegando uno a otro los lugares unidos. Se puede obtener un modelo análogo si en cada posición de la circunferencia, cuya rotación forma el toro determinado por cierto valor del ángulo θ, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, se toma en lugar de la circunferencia el radio que forma el ángulo $\varphi = \theta$ con el plano $\xi O \eta$ (fig. 59).

1.2. Las superficies nos van a interesar solamente en la medida en que para las funciones definidas en ellas o en los recintos pertenecientes a las mismas se pueda introducir el concepto de analiticidad (del mismo modo que este concepto se introdujo para las funciones definidas en los recintos del plano o de la esfera).

Fijemos para cada punto e_0 un entorno determinado $U_0 = U(e_0)$ y llamémoslo entorno *selecto* de este punto; fijemos también una transformación homeomorfa determinada $t = \lambda(e) = \lambda_{e_0}(e)$ de este entorno sobre algún recinto simplemente conexo $g = g_{e_0}$ del plano finito que contenga al origen de coordenadas. Exigiremos que se cumpla la condición $\lambda_{e_0}(e_0) = 0$. A la función $t = t_{e_0} = \lambda_{e_0}(e)$ la llamaremos *parámetro local* (o también *parámetro de uniformación local*) del punto e_0. A continuación someteremos al sistema de parámetros locales a una restricción esencial.

Una función $w = F(e)$ del punto e situado en la superficie dada (los valores de la función son números complejos), definida en un entorno del punto e_0 contenido en U_0, se transforma en la función $F[\lambda^{-1}(t)] = F^*(t)$ del parámetro complejo t, definida en un recinto perteneciente a g que contiene al punto $t = 0$.

Supongamos que existe un entorno $u_0 \subset U_0$ del punto e_0 tal, que $F^*(t)$ es una función analítica en el recinto correspondiente que pertenece a g. Sería natural llamar en este caso a la función $F(e)$ analítica en el entorno u_0 del punto e_0 de la superficie dada y, junto

con ello, llamarla analítica en cada punto perteneciente al entorno u_0. Sin embargo, para admitir esta definición se necesita una condición complementaria respecto del sistema de parámetros locales $\{\lambda_{e_0}(e)\}$.

En efecto, sea $e_1 \neq e_0$ un punto de aquel entorno $u_0 \subset U_0$ del punto e_0 en el cual $F(e)$ es una función analítica. Tiene que existir un entorno u_1 del punto e_1 que esté contenido en u_0; podemos exigir también que esté contenido también en el entorno selecto U_1 del punto e_1. Como u_1 pertenece a u_0, $F(e)$ es analítica en u_1. Pero, por otra parte, de la analiticidad de la función $F(e)$ en un entorno del punto e_1 se puede juzgar basándose en la transformación $\tau = t_{e_1} = \lambda_{e_1}(e)$, la cual transforma la función $F(e)$ en $F[\lambda_{e_1}^{-1}(\tau)] = F^{**}(\tau)$. Para que nuestra definición de analiticidad no nos lleve a ninguna contradicción, es necesario exigir que la última función también sea analítica en cierto recinto que contenga al punto $\tau = 0$. Hagamos, en particular, $F(e) = \lambda_{e_0}(e) = t$. Entonces tendremos $F^*(t) = t$, y como esta función es analítica en el recinto g, la función $t = \lambda_{e_0}(e)$ se debe suponer analítica en la superficie en todo el entorno U_0. Para el punto $e_1 \in U_0$, el cual corresponde al valor $t = t_1$ en la transformación $t = \lambda_{e_0}(e)$, hallamos según lo anterior que la función $t = F^{**}(\tau) = \lambda_{e_0}\lambda_{e_1}^{-1}(\tau)$ tiene que ser analítica en un entorno del punto $\tau = 0$ y, además, univalente, puesto que la transformación $t = \lambda_{e_0}\lambda_{e_1}^{-1}(\tau)$ es biunívoca. Esta es la condición a la que hay que someter los parámetros locales:

A) *Si* $t = \lambda_{e_0}(e)$ *es un parámetro local del punto* e_0 *y* e_1 *es algún punto del entorno selecto correspondiente del punto* e_0, *entonces este parámetro tiene que ser una función analítica del parámetro* $\tau = \lambda_{e_1}(e)$ *en cierto entorno del punto* $\tau = 0$.

Cumpliéndose esta condición, toda función $w = F(e)$, cuya analiticidad en $u_0 \subset U$ se haya establecida mediante el parámetro local $t = \lambda_{e_0}(e)$, será analítica también en un entorno de cualquier punto $e_1 \in u_0$ si es estable su analiticidad mediante el parámetro local $\tau = \lambda_{e_1}(e)$.

La selección del sistema de parámetros locales para la superficie dada la someteremos a la condición hallada, sin detenernos por ahora en el problema de la posibilidad de tal selección. Del método mismo de obtención de la condición A) se deduce que, cumpliéndose ésta respecto de cada función $w = F(e)$, definida en cierto recinto D de la superficie, también para cada punto $e_0 \in D$ se puede dar una respuesta unívoca a la pregunta de si esta función es analítica en la superficie en un entorno del punto e_0 o no lo es.

Una superficie E, para cuyos puntos se ha elegido un sistema de parámetros locales que satisface a la condición A), se llama superficie abstracta de Riemann.

Expresándose de una manera descriptiva, las superficies de Riemann son aquellas que están preparadas de un modo especial para que, respecto de las funciones del punto sobre las mismas que toman valores complejos, el problema de la analiticidad o no analiticidad de estas funciones tenga un sentido tan determinado como para las funciones del punto en el plano o en la esfera. Obsérvese que el plano y la esfera (el plano ampliado) son los ejemplos más simples de superficies de Riemann. Para la primera de éstas por parámetro local para un punto arbitrario z_0 se puede tomar $t = z - z_0$ (el entorno selecto será entonces, por ejemplo, un círculo con el centro en z_0), mientras que para la segunda (habiendo realizado previamente su proyección estereográfica sobre el plano), también $t = z - z_0$ para cada punto finito y $t = \frac{1}{z}$ para el punto del infinito (para el último punto, el entorno selecto será entonces la parte exterior de un círculo con el centro en el origen de coordenadas). Hagamos un resumen de lo expuesto:

Sea E una superficie a cada uno de cuyos puntos e_0 se han puesto en correspondencia cierto entorno U_0 (entorno selecto) y una función $t = \lambda_{e_0}(e)$ (parámetro local) que realiza una transformación homeomorfa de U_0 en un recinto simplemente conexo del plano t que contiene al punto $t = 0$, de modo que al punto e_0 le corresponda el cero. Si en este caso se cumple la condición:

A) el parámetro local t_{e_0} del punto e_0 es una función analítica $t(\tau) = \lambda_{e_0}\lambda_{e_1}^{-1}(\tau)$ del parámetro local $\tau = t_{e_1}$ para cada punto $e_1 \in U_0$ en cierto entorno del punto

$$\tau = 0$$

que depende de e_1, entonces E se llama superficie abstracta de Riemann (respecto del sistema dado de parámetros locales).

En la superficie abstracta, para cualquier función del punto $w = F(e)$ que tome valores complejos se puede dar una respuesta unívoca a la pregunta de si es ésta analítica en un entorno de algún punto e_0, en el cual ella esté definida, o no lo es. Precisando, la respuesta será afirmativa o negativa según que sea $F[\lambda_{e_0}^{-1}(t)]$ una función analítica en un entorno del punto $t = 0$ o no lo sea.

Las definiciones establecidas aquí no serán completas si no se les agrega la condición, según la cual dos superficies abstractas de Riemann que se obtienen de dos superficies E y E' (que pueden ser idénticas) mediante dos sistemas de parámetros locales $\{\lambda_{e_0}(e)\}$ y $\{\lambda'_{e'_0}(e')\}$, se consideran como superficies idénticas de Riemann. Esta condición consiste en lo siguiente: E y E' tienen que admitir una transformación homeomorfa $e' = \Phi(e)$ una en la otra tal, que los parámetros locales $\lambda_{e_0}(e)$ se transformen en funciones $\lambda_{e_0}\Phi^{-1}(e')$ analíticas en ciertos entornos de los puntos correspondientes $e'_0 =$

$= \Phi(e_0)$, y los parámetros locales $\lambda'_{e'_0}(e')$ se transformen en funciones $\lambda'_{e'_0}\Phi(e)$ analíticas en ciertos entornos de los puntos correspondientes $e_0 = \Phi^{-1}(e'_0)$.

De esta condición se deduce que toda función $w = F(e)$ que sea analítica en cierto recinto D en la superficie E, se convierte, en la transformación $e' = \Phi(e)$, en una función analítica en el recinto correspondiente D' de la superficie E', y recíprocamente; por lo tanto, ambas superficies de Riemann no se distinguen entre sí como portadoras del argumento de la función analítica.

1.3. Aclaremos con ejemplos los conceptos introducidos en el ap. 1.2.

Obsérvese que todo recinto G del plano (o de la esfera) se puede considerar como una superficie de Riemann, si por parámetro local del punto $z_0 \in G$ se toma $t = z - z_0$ $\left(\text{o } t = \frac{1}{z} \text{ si } z_0 = \infty\right)$. Sean G y D dos recintos; hallemos las condiciones según las cuales éstos representan una misma superficie abstracta de Riemann. Como ya sabemos, la condición general consiste en la existencia de una transformación homeomorfa $w = \Phi(z)$ de un recinto en el otro, tal que el parámetro local $w - w_0$ se transforme en una función analítica de $z - z_0$ (y, recíprocamente, $z - z_0$ se debe transformar en una función analítica de $w - w_0$); aquí $w = \Phi(z)$ y $w_0 = \Phi(z_0)$. Pero esto significa que en un entorno de cada punto $z_0 \in G$ es válido un desarrollo de la forma

$$\Phi(z) = \Phi(z_0) + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \ldots,$$

es decir, $\Phi(z)$ es analítica en el recinto G. Como la transformación $w = \Phi(z)$ es homeomorfa, sacamos la conclusión de que es también conforme. Por consiguiente, dos recintos G y D del plano representan una misma superficie abstracta de Riemann cuando, y sólo cuando, existe una transformación conforme de uno de ellos sobre el otro. De aquí se deduce, por ejemplo, que todos los recintos simplemente conexos, cuyas fronteras contienen más de un punto, representan una misma superficie abstracta de Riemann. Por el contrario, entre los recintos biconexos ya se encuentra un conjunto infinito e incluso no numerable de superficies de Riemann distintas.

Es suficiente considerar el conjunto de todos los anillos circulares. Ya sabemos (ap. 2.1, cap. V) que dos anillos de éstos pueden transformarse conformemente uno en otro cuando, y sólo cuando, son semejantes entre sí. Por consiguiente, los anillos $r < |z| < R$ y $\rho < |z| < P$ representan distintas superficies de Riemann si $\frac{R}{r} \neq \frac{P}{\rho}$.

He aquí un ejemplo sencillo que muestra que una misma superficie (topológica) puede representar superficies de Riemann iguales

o distintas para una elección diferente del sistema de parámetros locales. Examinemos el plano finito. Este es una superficie de Riemann si para cada punto z_0 se hace $t_{z_0} = z - z_0$. Se puede llegar a la misma superficie de Riemann si para cada punto z_0 se elige el parámetro local en forma de una función analítica arbitraria $\lambda_{z_0}(z)$ cuyo desarrollo en cierto entorno del punto z_0 tenga la forma

$$t_{z_0} = \lambda_{z_0}(z) = \alpha_1 (z - z_0) + \alpha_2 (z - z_0)^2 + \ldots \qquad (\alpha_1 \neq 0)$$

(tal función es univalente en cierto entorno del punto z_0 y, por consiguiente, realiza una transformación conforme de este entorno en un recinto simplemente conexo que contiene al origen de coordenadas). Para convencerse de que en estos dos métodos de elección resulta una misma superficie de Riemann, es suficiente tomar la transformación idéntica $w = z$.

Señalemos ahora un sistema de parámetros locales según el cual el plano se convierte en una superficie de Riemann distinta de las anteriores. Con este fin, realicemos una transformación homeomorfa del plano w en el círculo unidad (por ejemplo, mediante la función $\zeta = \psi(w)$, donde $\zeta = \frac{w}{|w|} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} |w|$, si $w \neq 0$ y $\zeta = 0$ si $w = 0$) y elijamos para el punto w_0 el parámetro local $t_{w_0} = \zeta(w) - \zeta(w_0)$. Entonces la condición A) del apartado anterior quedará cumplida, puesto que los parámetros locales para dos puntos distintos w_0 y w_1 están ligados por la relación

$$t = \zeta(w_1) - \zeta(w_0) + \tau$$

(aquí $t = t_{w_0} = \zeta(w) - \zeta(w_0)$ y $\tau = t_{w_1} = \zeta(w) - \zeta(w_1)$), es decir, cada uno de estos parámetros es una función analítica del otro. Por consiguiente, con la elección indicada de los parámetros locales el plano representa una superficie de Riemann. Esta será distinta de aquélla, a la cual le corresponden los parámetros $t_{z_0} = z - z_0$. En efecto, es obvio que siendo $t_{w_0} = \zeta(w) - \zeta(w_0)$, la función $\zeta(w)$ es uniforme y analítica en toda la superficie. Si ambas superficies son idénticas, existe una transformación homeomorfa de una sobre otra: $w = \Phi(z)$, en la cual la función $\zeta(w)$ se convertirá en una función $\zeta^*(z)$ analítica en cada punto del plano finito z, es decir, desarrollable en serie

$$\zeta^*(z) = \zeta^*(z_0) + A_1 (z - z_0) + \ldots$$

en un entorno de cada punto z_0. Por consiguiente, la función $\zeta^*(z)$ es entera y, además, acotada ($|\zeta^*(z)| < 1$), lo cual, según el teorema de Liouville, es imposible, puesto que $\zeta^*(z) \not\equiv$ const.

El lector demostrará fácilmente que el plano con los parámetros locales $t_{w_0} = \zeta(w) - \zeta(w_0)$ es idéntica (como superficie abstracta de Riemann) al círculo, donde por parámetros locales se toman $t_{z_0} = z - z_0$.

Volviendo al concepto general de superficie abstracta de Riemann, aclaremos el significado geométrico de la introducción del sistema de parámetros locales que satisface a la condición A) del apartado precedente. Supongamos que en la superficie topológica dada se ha establecido tal sistema de parámetros locales. Entonces en esta superficie se puede introducir el concepto de ángulo entre dos líneas curvas y se pueden medir los ángulos exactamente igual que en el plano o en la esfera. Precisando, sean γ_0' y γ_0'' dos arcos de Jordan que pasan por un punto e_0 de la superficie. Mediante el parámetro local $t = t_{e_0} \doteq \lambda_{e_0}(e)$ estas curvas se transforman en dos arcos de Jordan δ_0' y δ_0'' del plano t que pasan por el origen de coordenadas. Si estos últimos poseen tangentes en el punto $t = 0$ y, por consiguiente, forman entre sí cierto ángulo, diremos que los arcos γ_0' y γ_0'' forman también un ángulo en el punto e_0 de la superficie, y por medida de este ángulo tomaremos la medida del ángulo formado por los arcos δ_0' y δ_0'' en el plano.

Con tal definición de los ángulos la transformación del entorno selecto U_0 del punto e_0 mediante la función $t = \lambda_{e_0}(e)$ en el recinto simplemente conexo $g = g_{e_0}$ del plano t será conforme en el punto e_0. El significado de la condición A) consiste en que ésta garantiza que sea también conforme la transformación en todos los demás puntos del entorno selecto U_0. En efecto, si $e_1 = \lambda_{e_0}^{-1}(t_1) \in U_0$ y γ_1' y γ_1'' son arcos de Jordan que pasan por el punto e_1 y forman en él un ángulo α, en el sentido de la definición admitida, entonces en la transformación $\tau = t_{e_1} = \lambda_{e_1}(e)$ estos arcos se convierten en arcos δ_1' y δ_1'' que pasan por el punto $\tau = 0$ y forman en éste el ángulo α. En virtud de la condición A), el parámetro t es una función analítica del parámetro τ en un entorno del punto $\tau = 0$ que es, además, univalente (pues la correspondencia entre τ y t es biunívoca). Por ello, la transformación $t = \lambda_{e_0}\lambda_{e_1}^{-1}(\tau)$ es conforme y transforma δ_1' y δ_1'' en un par de arcos $\tilde{\delta}_1'$ y $\tilde{\delta}_1''$ que pasan por el punto t_1 y forman también en el mismo el ángulo α. Pero los mismos arcos $\tilde{\delta}_1'$ y $\tilde{\delta}_1''$ se forman directamente en la transformación $t = \lambda_{e_0}(e)$ como imágenes de los arcos γ_1' y γ_1''. De aquí se deduce que la transformación $t = \lambda_{e_0}(e)$ es conforme en todos los puntos de U_0.

Vemos, pues, que en cualquier superficie de Riemann se pueden definir los conceptos de ángulo y su medida, de modo que esta superficie no sólo admita en un entorno de cada punto una transformación homeomorfa en un recinto simplemente conexo del plano (lo cual es propio de cada superficie), sino que también admita una transformación conforme. Tal transformación se realiza mediante los parámetros locales que figuran en la definición de superficie de Riemann.

Considerando que en cada superficie de Riemann se ha introducido la medición de los ángulos del modo indicado anteriormente, se puede enunciar de otra manera la condición de identidad o distinción

de dos superficies de Riemann dadas de formas distintas. Precisando, *dos superficies abstractas de Riemann son idénticas o distintas según que exista o no exista una transformación conforme de una de estas superficies sobre la otra.*

En efecto, en caso de identidad de dos superficies abstractas de Riemann E y E', se trata de la existencia de una transformación homeomorfa de una de ellas sobre la otra, tal que los parámetros locales en una superficie son funciones analíticas de los puntos correspondientes de la otra superficie. Si al punto $e_0 \in E$ le corresponde el punto $e_0' \in E'$, entonces de aquí se deduce que el parámetro local $t = t_{e_0}$ es una función analítica del parámetro $t' = t'_{e_0'}$ en un entorno del punto $t' = 0$, y recíprocamente: t' es una función analítica de t en un entorno del punto $t = 0$. Por esta razón, en la transformación considerada de E sobre E', entre los parámetros locales t_{e_0} y $t'_{e'_0}$ en los entornos de los puntos $t = 0$ y $t' = 0$ se establece una correspondencia biunívoca y analítica, es decir, una correspondencia conforme. Pero en E y E' los ángulos entre las curvas que pasan por los puntos e_0 y e_0' se determinan como los ángulos formados por las curvas en el plano que se obtienen en las transformaciones $t = \lambda_{e_0}(e)$ y $t' = \lambda'_{e_0'}(e')$. Por ello, la existencia de una correspondencia conforme entre los parámetros locales significa la correspondencia conforme entre las superficies E y E', que es lo que se afirmaba.

Al comienzo de este apartado, en el caso de recintos del plano, considerados como superficies de Riemann, señalábamos que para éstos la identidad significaba la posibilidad de transformar uno de ellos en el otro. Ahora vemos que esto mismo ocurre en el caso de cualesquiera superficies abstractas de Riemann.

De aquí se deduce que en las superficies abstractas de Riemann solamente se pueden estudiar las propiedades más generales de las funciones analíticas que no varían al realizar cualquier transformación conforme de una superficie en otra. Si se quieren estudiar las propiedades que pueden alterarse al realizar alguna transformación conforme, se deben introducir unos elementos complementarios en la misma definición de superficie de Riemann, de modo que éstos permitan en condiciones determinadas establecer una diferencia entre las superficies que se transforman conformemente una en la otra.

§ 2. TRIANGULACION DE UNA SUPERFICIE. TRANSFORMACIONES INTERIORES

2.1. Sea E una superficie topológica; supongamos que F es un conjunto de puntos de ella que es homeomorfo a un recinto cerrado del plano limitado por una curva de Jordan. Entonces F representa también un recinto cerrado sobre la superficie, cuya frontera Γ es

una curva de Jordan. Fijemos en Γ tres puntos cualesquiera A, B y C, y llamemos **triángulo** (topológico) sobre la superficie E al conjunto F junto con estos tres puntos fijados en la frontera. A los puntos A, B y C los llamaremos vértices, a los arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ y $\widehat{CA}$ (se tiene en cuenta cada vez aquel arco, entre los dos posibles, que no contiene el tercer vértice) los llamaremos lados del triángulo y a los puntos interiores del conjunto F, puntos interiores del triángulo. A una fijación de un orden (cíclico) determinado de los vértices del triángulo ABC o ACB la llamaremos **orientación** del triángulo, y al triángulo mismo, para el cual está fijado el orden de los vértices, lo llamaremos **triángulo orientado**. Es obvio que cualquier triángulo admite dos y sólo dos orientaciones distintas.

Supongamos que la superficie E está dividida en triángulos $\{\Delta\}$ de tal modo que se cumplen las siguientes condiciones: 1) ningún punto interior de un triángulo Δ pertenece a otro triángulo Δ' del mismo sistema $\{\Delta\}$; 2) todo punto frontera de un triángulo Δ, distinto de sus vértices, pertenece también a un triángulo Δ', y sólo a uno, que tiene con Δ un lado común; además, todos los puntos comunes de los triángulos Δ y Δ' pertenecen a este lado; 3) si dos triángulos no tienen un lado común, entonces, tienen un vértice común, y sólo uno, o carecen de puntos comunes; 4) para cada punto de la superficie E existe un entorno que se cubre por un número finito de triángulos Δ.

El sistema de triángulos $\{\Delta\}$ que engendra tal división, así como la división misma, se llama **triangulación de la superficie**. Se puede demostrar que cualquier superficie admite triangulación. Aquí no vamos a exponer esta demostración (por cierto, es elemental), puesto que para las superficies que nos interesan la existencia de la triangulación se establece inmediatamente.

Deduzcamos algunas propiedades de la triangulación.

Sea A el vértice de algún triángulo $\Delta_0 \in \{\Delta\}$. En virtud de las condiciones 1) y 2) éste no puede ser interior ni punto frontera distinto de los vértices ni punto de alguno de los demás triángulos Δ. Debido a la condición 4), existe un entorno U del punto A que se cubre por un número finito de triángulos $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$. Ninguno de los triángulos distintos de los últimos puede tener puntos en el interior de U. En efecto, si existiese tal triángulo Δ, entonces en U habría algún punto interior perteneciente a los triángulos $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ (a uno o a varios), distintos de Δ, lo cual es imposible debido a la condición 1).

Sea AB uno de los dos lados del triángulo Δ_0 que tienen un vértice común A. Entonces, en virtud de la condición 2), existe un triángulo Δ', distinto de Δ_0, para el cual AB es uno de los lados. Como sus puntos están situados en cualquier entorno del punto A,

éste tiene que coincidir con uno de los triángulos $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$. Consideremos su lado AB' distinto de AB. Este no puede pertenecer a Δ_0, debido a la condición 2); por consiguiente, en virtud de la misma propiedad 2) existe un triángulo Δ'' ($\Delta'' \neq \Delta_0$ y $\Delta'' \neq \Delta'$) al cual pertenece AB'. Este triángulo también tiene que coincidir con uno de los triángulos $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$.

Continuemos estos razonamientos. Como el número de triángulos que cubren U es igual a m, resultan en total n triángulos distintos $\Delta_0, \Delta', \Delta'', \ldots, \Delta^{(n)}$, donde $3 \leqslant n \leqslant m$, cada uno de los cuales tiene con el precedente un lado común que parte del vértice A. Además, el lado $AB^{(n)}$ del triángulo $\Delta^{(n)}$ que no es común con $\Delta^{(n-1)}$ será común con $\Delta^{(0)}$ (en caso contrario el número n de triángulos considerados podría aumentarse más) y distinto de AB.

Realizando una transformación homeomorfa de un entorno del punto A (que coincida con U o forme una parte propia del mismo) en un recinto simplemente conexo del punto z, vemos que las imágenes de las partes de los triángulos $\Delta_0, \Delta', \ldots, \Delta^{(n)}$ pertenecientes a este entorno, colocándose cíclicamente alrededor de la imagen z_0 del punto A, cubren un entorno del punto z_0. Por consiguiente, los triángulos $\Delta_0, \Delta', \ldots, \Delta^{(n)}$ cubren el entorno del punto A. Así, pues, cada vértice A de cualquier triángulo $\Delta_0 \in \{\Delta\}$ es un vértice común de una cantidad finita $n \geqslant 3$ de triángulos del mismo sistema, los cuales están colocados en un orden cíclico alrededor del punto A y cubren cierto entorno del mismo.

Llamaremos cadena que une a dos triángulos cualesquiera Δ_0 y Δ' a un conjunto finito de triángulos $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n = \Delta'$ tal que cada uno de ellos tiene un lado común con el anterior. Demostremos que dos triángulos cualesquiera Δ_0 y Δ', pertenecientes a cierta triangulación $\{\Delta\}$ de la superficie considerada, pueden unirse por una cadena formada por triángulos de la misma triangulación. Fijemos Δ_0 y consideremos todos los triángulos que pueden unirse con Δ_0 mediante una cadena de triángulos pertenecientes a $\{\Delta\}$ (figurará aquí Δ_0 y también los tres triángulos que tienen con Δ_0 lados comunes, etc.). Supongamos que con estos triángulos no se agota todo el sistema $\{\Delta\}$. Entonces el conjunto de todos los puntos de la superficie tiene que descomponerse en dos conjuntos no vacíos E_1 y E_2, donde el primero consta de los puntos pertenecientes a los triángulos que se unen por una cadena con Δ_0 y el segundo, de los puntos pertenecientes a los triángulos que no pueden unirse por una cadena con Δ_0. Todo punto $e_1 \in E_1$ o es interior para algún triángulo, o es un punto frontera distinto de los vértices (entonces está situado en el lado común de dos triángulos), o finalmente, es el vértice común de varios triángulos que están situados en un orden cíclico y cubren cierto entorno de este punto. En todos los casos, cada uno de los triángulos a que pertenece e_1 puede unirse por una cadena con Δ_0

y, por consiguiente, e_1 es un punto interior del conjunto E_1. Del mismo modo, ninguno de los triángulos que contienen a $e_2 \in E_2$ puede unirse por una cadena con Δ_0 (si se supone que uno de ellos puede unirse por una cadena con Δ_0, entonces esto mismo se puede hacer también con todos los demás, de donde se deduce que $e_2 \in E_1$); por consiguiente, e_2 es un punto interior del conjunto E_2.

Así, pues, E_1 y E_2 son dos conjuntos no vacíos disjuntos en los que se descompone toda la superficie; además, ninguno de ellos contiene puntos de acumulación del otro. Resulta una contradicción con la propiedad de conexión de la superficie. De aquí se deduce que cualquier triángulo del sistema $\{\Delta\}$ puede unirse con Δ_0 por una cadena compuesta de triángulos del mismo sistema.

Basándose en el último resultado, demostremos que el conjunto de triángulos del sistema $\{\Delta\}$ tiene que ser finito o numerable. Con este fin, numeremos todos los triángulos, comenzando desde Δ_0, después, todos los triángulos que tienen lados comunes con Δ_0, más tarde, todos los triángulos que tienen lados comunes con los que ya se han numerado, etc.

Si después de cualquier número de pasos existen triángulos no numerados, entonces el proceso continuará indefinidamente, y resultará un conjunto numerable de triángulos. Como en este caso quedarán numerados todos los triángulos que pueden unirse con Δ_0 por una cadena, el conjunto indicado agotará a todo el sistema $\{\Delta\}$.

Obsérvese que el conjunto de los triángulos $\{\Delta\}$ será finito cuando, y sólo cuando, la superficie dada es cerrada. En efecto, si el sistema $\{\Delta\}$ es finito, entonces toda la superficie se cubre por un número finito de conjuntos homeomorfos a recintos cerrados del plano, limitados por curvas de Jordan y, por consiguiente, compactos. Por ello, la superficie representa también un conjunto compacto, o sea, es cerrada. Recíprocamente, supongamos que la superficie es cerrada. Si admitiese una triangulación $\{\Delta\}$ que constase de un conjunto infinito de triángulos, entonces, eligiendo sendos puntos dentro de los triángulos, obtendríamos un conjunto infinito de puntos de la superficie que carecería de puntos de acumulación. En efecto, cada punto de la superficie posee un entorno que puede cubrirse por un número finito de triángulos y que, por consiguiente, contiene solamente un número finito de puntos en cuestión.

En la fig. 60 está representada en proyección estereográfica la triangulación de la esfera; en la fig. 61 se representa la triangulación del toro en forma de un rectángulo, cuyos puntos de los lados opuestos tienen que identificarse dos a dos (tienen que «pegarse»). En ambos casos hay una cantidad finita de triángulos (8 y 18). En la fig. 62 está representada la triangulación de la superficie abierta de la banda de Möbius en forma de un rectángulo, en el cual se identifican los puntos de los lados laterales que son simétricos al centro de éste.

2.2. Sean E y E' dos superficies y sea $e' = f(e)$ una transformación continua de E en E'. Si existe una triangulación $\{\Delta\}$ de la superficie E tal, que esta transformación es homeomorfa en cada triángulo y en cierto entorno de cada uno de sus puntos frontera, a excepción, posiblemente, de los vértices del triángulo, entonces

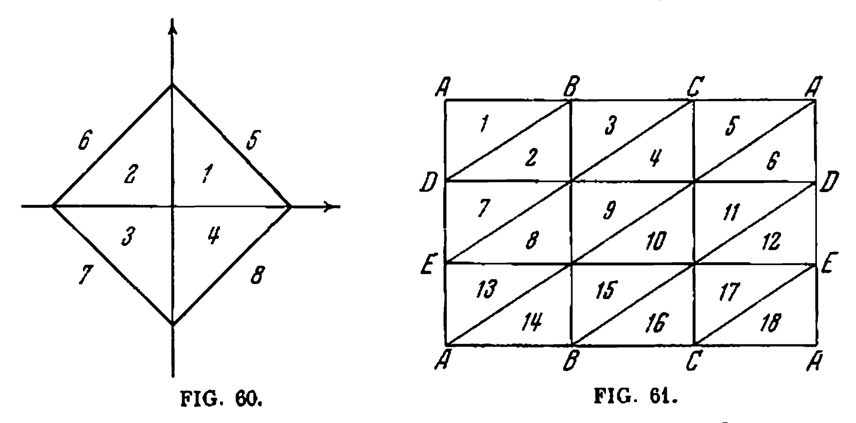


FIG. 60. FIG. 61.

ésta se llama **transformación interior** (en el sentido de S. Stoïlow).

Es obvio que cualquier transformación homeomorfa es interior. A S. Stoïlow le pertenece el teorema de que una *transformación continua de una superficie E en otra que transforme cada conjunto*

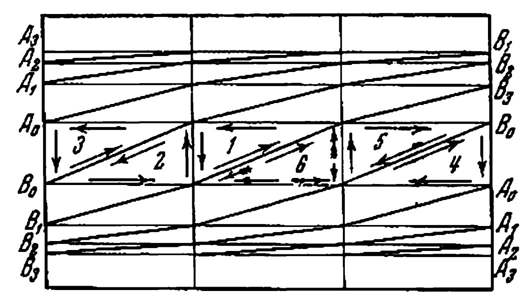


FIG. 62.

abierto en otro abierto y que no transforme en un punto a ningún continuo distinto de un punto, es una transformación interior. El teorema recíproco es evidente.

Aquí consideraremos la transformación de una superficie dada E en la esfera E', designando los puntos de la esfera E' por los números

complejos correspondientes: $e' = z$. Obsérvese que no cualquier superficie admite una transformación interior en la esfera.

Sean Δ_0 y Δ' dos triángulos en la superficie dada E. Unámoslos por una cadena de triángulos y orientando Δ_0 de un modo determinado, orientemos después todos los demás triángulos de la cadena de tal modo que el lado común de cada par de triángulos contiguos (el precedente y el siguiente) se recorra en sentidos opuestos entre sí. Entonces el triángulo Δ' obtiene una orientación completamente determinada, que depende de la orientación del triángulo Δ_0 y de la elección de la cadena que une Δ' con Δ_0. Si para cualquier par de triángulos Δ_0 y Δ' la orientación de Δ' depende solamente de la orientación de Δ_0 y no varía al sustituir una cadena que una estos triángulos por otra cadena cualquiera, entonces la superficie dada se llama o r i e n t a b l e (y también b i l a t e r a l o de dos caras). Se puede demostrar*) que, por ejemplo, el plano, la esfera, el toro, son superficies orientables. En la demostración podemos limitarnos a considerar triángulos pertenecientes a una triangulación determinada cualquiera de la superficie.

Si en la superficie dada, para algún par de triángulos Δ_0 y Δ' existen dos cadenas que conducen a orientaciones distintas del triángulo Δ' para una misma orientación inicial del triángulo Δ_0, entonces la superficie se llama n o o r i e n t a b l e (unilateral o de una cara). Puede servir de ejemplo elemental de tal superficie la cinta o banda de Möbius, lo que se puede ver examinando las dos cadenas representadas en la fig. 62, que unen los triángulos 1 y 6 (una cadena consta de seis y la otra de dos triángulos).

Supongamos que $z = f(e)$ realiza una transformación interior de una superficie E en la esfera E'. Entonces cada uno de los triángulos del sistema $\{\Delta\}$ que figura en la definición de transformación interior se transforma en cierto triángulo de la esfera; además, a una orientación determinada del triángulo en E le corresponde una orientación determinada del triángulo esférico. Si se supone que en E existen dos cadenas que unen Δ_0 y Δ' y que dan lugar a orientaciones distintas del triángulo Δ' para una orientación fijada del triángulo Δ_0, entonces lo mismo tiene que cumplirse también para las imágenes de estos triángulos en la esfera. Pero esto último es imposible, puesto que la esfera es una superficie orientada. De aquí se deduce que sólo *las superficies orientadas pueden admitir una transformación interior en la esfera*.

Demostremos que *cualquier superficie orientable E admite una transformación interior en la esfera*. Sea $\{\Delta\}$ una triangulación fijada de la superficie E. Numeremos los triángulos $\{\Delta\}$ de tal modo que cada uno que sigue tenga un lado común al menos con uno de los triángulos de menor índice (ya se vio en el

*) Véase, por ejemplo, P. S. A l e x á n d r o v, Topología combinatoria (П. С. А л е к с а н д р о в, Комбинаторная топология).

ap. 2.1 que tal numeración es posible) y, orientando el triángulo Δ_1, transmitamos la orientación correspondiente a todos los demás triángulos de $\{\Delta\}$ mediante las cadenas que unen Δ_1 con cada uno de estos triángulos. Resultará que todos los triángulos Δ quedarán orientados de tal manera que el lado común de dos triángulos se recorrerá en éstos en sentidos opuestos entre sí.

Construiremos la transformación interior de la superficie E en la esfera aplicando el método de inducción. Con este fin, realicemos una transformación homeomorfa de Δ_1 sobre un triángulo esférico cualquiera δ_1 y supongamos que para cierto número natural n los triángulos $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ ya han obtenido transformaciones homeomorfas sobre los triángulos esféricos $\delta_1, \ldots, \delta_n$, de tal modo que la transformación $z = f_n(e)$ del conjunto $E_n = \bigcup_{j=1}^{n} \Delta_j$ sobre el conjunto $E'_n = \bigcup_{j=1}^{n} \delta_j$ es uniforme y continua y, además homeomorfa, en ciertos entornos de aquellos puntos frontera de los triángulos $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, distintos de los vértices, que son interiores a E_n.

Demostremos que también se puede hallar para el conjunto $E_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{n+1} \delta_j$ una transformación $z = f_{n+1}(e)$ que posea las mismas propiedades.

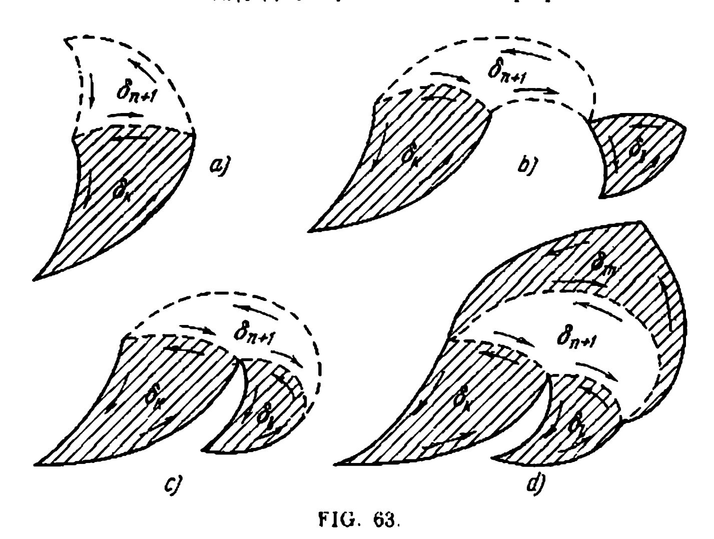


FIG. 63.

Hagamos $f_{n+1}(e) = f_n(e)$ en todos los puntos del conjunto E_n. El conjunto de los puntos frontera del triángulo Δ_{n+1}, pertenecientes a E_n, puede constar: a) de un lado; b) de un lado y del vértice opuesto; c) de dos lados; d) de tres lados. Eligiendo el triángulo esférico δ_{n+1} (la imagen del triángulo Δ_{n+1}) se tienen que suponer dados, según el caso, o un lado del mismo, o un lado y el vértice, o dos lados, o finalmente, los tres lados.

La elección de tal triángulo esférico δ_{n+1} está indicada en la fig. 63, donde se representan los cuatro casos que corresponden a las posibilidades a), b),

c) y d). Obsérvese que en cada uno de estos casos se consigue construir el triángulo δ_{n+1} de tal modo que en ciertos entornos de sus puntos, distintos de los vértices y pertenecientes a los triángulos de menores índices (δ_k, δ_l o δ_m), no tenga puntos interiores comunes con estos triángulos. Aquí nos basamos esencialmente en que la superficie es orientable, lo cual queda claro al observar la fig. 64, donde están representados los casos c) y d) que pueden encontrarse al probar aplicar unos razonamientos similares a una superficie no orientable.

Una vez elegido el triángulo δ_{n+1} no queda más que definir $z = f_{n+1}(e)$ en los puntos del triángulo Δ_{n+1} de tal manera que esta función realice una transformación homeomorfa de Δ_{n+1} sobre δ_{n+1}, teniendo que coincidir esta transformación con $z = f_n(e)$ en los puntos del triángulo Δ_{n+1} que son comunes con E_n. Siempre es posible tal construcción. Para convencerse de esto, realicemos una transformación homeomorfa de δ_{n+1} sobre el círculo $|\zeta| \leqslant 1$ (por ejemplo, una transformación conforme). Según el concepto de triángulo sobre la superficie, Δ_{n+1} admite una transformación homeomorfa sobre un recinto cerrado limitado por una curva de Jordan y, por consiguiente, también sobre

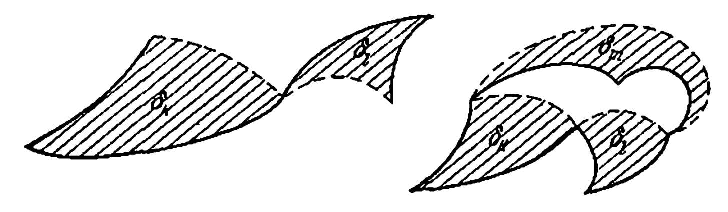


FIG. 64.

el círculo $|t| \leqslant 1$. En cada una de estas transformaciones auxiliares las imágenes de los vértices de los triángulos considerados serán unas ternas de puntos situados en las circunferencias unidades, y las imágenes de los lados de los triángulos serán los arcos de estas circunferencias con los extremos en estos puntos. Por lo tanto, el problema se ha reducido a una transformación homeomorfa del círculo $|t| \leqslant 1$ sobre el círculo $|\zeta| \leqslant 1$, con la condición de que ya se ha establecido una correspondencia homeomorfa entre: a) un arco en $|t| = 1$ y un arco en $|\zeta| = 1$, o b) un arco y un punto en $|t| = 1$, no perteneciente al arco, y un arco y un punto en $|\zeta| = 1$ no perteneciente al arco, o c) dos arcos (con un extremo común) en $|t| = 1$ y dos arcos (con un extremo común) en $|\zeta| = 1$, o d) toda la circunferencia $|t| = 1$ y toda la circunferencia $|\zeta| = 1$.

Podemos limitarnos a considerar solamente el último caso, puesto que la correspondencia homeomorfa en los casos a), b) y c) se puede extender a toda la circunferencia, empleando, por ejemplo, la interpolación lineal. Así, pues, no queda más que realizar una transformación homeomorfa del círculo $|t| \leqslant 1$ sobre el círculo $|\zeta| \leqslant 1$, con la condición de que ya se ha establecido una correspondencia $0 = \lambda(\varphi)$ entre los puntos de las circunferencias unidades ($t = e^{i\theta}$ y $\zeta = e^{i\varphi}$). Se alcanza el objetivo haciendo $\zeta = 0$ para $t = 0$ y $\zeta = re^{i\lambda(\varphi)}$ para $t = re^{i\varphi}$, $0 < r \leqslant 1$.

En resumen, si existe una transformación $z = f_n(e)$ del conjunto $E_n = \bigcup_{j=1}^{n} \Delta_j$ en la esfera que es continua en E_n y es homeomorfa en cada uno de los triángulos $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ y también en ciertos entornos de aquellos puntos frontera que son distintos de los vértices y son interiores a E_n, entonces existe tam-

bién una transformación $z = f_{n+1}(e)$ del conjunto $E_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{n+1} \Delta_j$ que posee unas propiedades similares en E_{n+1} y que coincide con $f_n(e)$ en los puntos del conjunto E_n. Finalmente, de aquí se deduce la existencia de una transformación interior $z = f(e)$ de la superficie E en la esfera, determinada en cada E_n por la condición $f(e) = f_n(e)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

2.3. Estudiemos la transformación interior $z = f(e)$ de la superficie E en la esfera en los entornos de aquellos puntos de la superficie E, en los que la transformación no es homeomorfa. Como tales puntos sólo pueden ser los vértices de los triángulos del sistema $\{\Delta\}$, lo más que puede haber es un conjunto numerable de ellos; además, este conjunto no posee puntos de acumulación en E. Sea e_0 el vértice de un triángulo Δ_0, en cualquier entorno del cual la transformación considerada no es homeomorfa. Esto significa que en cada entorno del punto e_0 existen distintos puntos en los cuales $f(e)$ toma valores iguales. Como e_0 es un vértice común de un número finito n de triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, y en cada uno de estos la transformación es homeomorfa, resulta que un mismo valor no puede tomar la función $f(e)$ más que en n puntos distintos. Hagamos $f(e_0) = z_0$ y consideremos un entorno K_0 del punto z_0 que no contenga puntos de las imágenes de los lados de los triángulos $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, que son opuestos a e_0. Este entorno se cubre por las imágenes de los triángulos indicados. Demostremos que a cada punto $z \in K_0$, $z \neq z_0$, le corresponde una misma cantidad m $(1 < m \leqslant n)$ de preimágenes situadas en los triángulos $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ (además de éstas pueden existir otras preimágenes que no pertenezcan a los triángulos indicados). En efecto, supongamos que m denota el mayor número de preimágenes de este tipo para los puntos pertenecientes a K_0. Si para $z' \in K_0$ el número de preimágenes es igual a m, entonces habrá la misma cantidad de preimágenes para cada punto de cierto entorno del punto z'. En efecto, sean $e'_1, \ldots, e'_m$ las preimágenes, distintas entre sí, del punto z' y sean U'_j los entornos de los puntos e'_j $(j = 1, \ldots, m)$, sin puntos comunes dos a dos, pertenecientes a $\bigcup_{j=1}^{n} \Delta_j$ y tales que la transformación $z = f(e)$ es homeomorfa en cada uno de ellos. Las imágenes $f(U'_j) = K'_j$ de estos entornos contienen cierto entorno K del punto z'; está claro que cada punto $z \in K$ tiene una sola imagen en cada U'_j, siendo distintas entre sí todas estas imágenes. De aquí que la cantidad total de preimágenes del punto z también es igual a m.

Por lo tanto, el conjunto M de puntos de $K_0 \setminus z_0$, para los cuales la cantidad de preimágenes es igual a m, es abierto. Demostraremos que éste coincide con todo el recinto $K_0 \setminus z_0$, comprobando para ello que cada punto del recinto $K_0 \setminus z_0$ que es de acumulación para M, pertenece a M (véase el ap. 4.5, cap. I). En efecto, sea

$z'' \in K_0 \setminus z_0$ un punto de acumulación del conjunto M; supongamos que el número μ de sus preimágenes, contenidas en $\bigcup_{j=1}^{n} \Delta_j$ es menor que m. Tomando para cada una de estas preimágenes e_j'' un entorno U_j'' $(j = 1, \ldots, \mu)$ de un modo semejante a lo que se hizo anteriormente para los puntos e_j', hallaremos que en cualquier entorno del punto z'' existen puntos z_k que tienen preimágenes situadas en $\bigcup_{j=1}^{n} \Delta_j$ y no pertenecientes a $\bigcup_{j=1}^{\mu} U_j$. Pasando a sucesiones parciales, obtendremos unos puntos $z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots, z_{k_p}, \ldots$ tales que $z_{k_p} \to z''$ para $p \to \infty$, y cuyas preimágenes $e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_p}, \ldots$ convergen hacia un punto e'' distinto de los puntos e_j''. Como $f(e'') = \lim_{p\to\infty} f(e_{k_p}) = \lim_{p\to\infty} z_{k_p} = z'' \in K_0$, resulta que e'' no está situado en los lados de los triángulos $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ opuestos a e_0; no obstante, e' está contenido en el conjunto $\bigcup_{j=1}^{n} \Delta_j$.

Hemos obtenido que el número de preimágenes del punto z'' tiene que ser superior a μ, es decir, la hipótesis de que $\mu < m$ da lugar a una contradicción

Así, pues, la imagen z_0 de un punto $e_0 \in E$, en cualquier entorno del cual se vulnera el homeomorfismo de la transformación interior, posee un entorno K_0 tal, que para cada punto $z \in K_0$, $z \neq z_0$, la cantidad m de preimágenes en el interior de $\Delta_1 + \ldots + \Delta_n$ es la misma.

Designemos $f(\Delta_j)$ mediante δ_j; los triángulos δ_j se sitúan alrededor del punto z_0 de tal modo que cada triángulo siguiente posee un lado común con el anterior, y el último, δ_n, tiene un lado común con el primero, δ_1. De lo demostrado se deduce que estos triángulos realizan un *cubrimiento m-múltiple del entorno* K_0 del punto z_0, o sea, que cada punto $z \in K_0$ $(z \neq z_0)$ pertenece a m triángulos distintos δ_j (si z está situado en los lados de algunos triángulos, entonces, en este cálculo, cada par de triángulos para los cuales z_0 es un punto frontera común, se toma por un triángulo).

Consideremos en un entorno del punto e_0 la transformación auxiliar $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}} = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$ y demostremos que ésta es homeomorfa. En efecto, cada triángulo Δ_j $(j = 1, \ldots, n)$ con el vértice en el punto e_0 admite una transformación homeomorfa sobre un triángulo δ_j con el vértice en el punto z_0. A su vez, mediante las ramas uniformes de la función $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}}$, δ_j admite una transformación homeomorfa sobre un triángulo con el vértice en el

origen de coordenadas. Fijando en δ_1 una rama determinada de $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}}$, obtendremos en el plano t un triángulo determinado σ_1. En el triángulo δ_2 que tiene frontera con δ_1 a lo largo de un lado común, elegiremos aquella rama de la función $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}}$ que toma en los puntos de este lado los mismos valores que la rama anterior. Entonces, por imagen del triángulo δ_2 en el plano t obtendremos un nuevo triángulo σ_2, con el vértice en el origen de coordenadas, el cual tiene un lado común con σ_1. La transformación $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}}$, definida del modo indicado, será homeomorfa no sólo en los puntos de los triángulos δ_1 y δ_2, sino también en ciertos entornos de cada punto de su lado común, a excepción del punto z_0. Continuando este razonamiento, definiremos una función $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}}$ en cada uno de los triángulos δ_j y, por consiguiente, en cada triángulo Δ_j.

La transformación correspondiente $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$ transforma el conjunto de triángulos Δ_j en el conjunto de triángulos σ_j con el vértice común $t = 0$; cada uno de estos tiene un lado común con el anterior, y el último tiene un lado común con el primero. Esto es debido a que, cuando z, recorriendo todos los triángulos δ_j uno tras otro, vuelve al triángulo inicial δ_1, el argumento de $z - z_0$ varía en $2\pi m$ y, por consiguiente, los valores de $t = (z - z_0)^{\frac{1}{m}}$ vuelven a los valores de la rama inicial.

Obsérvese también que en entornos suficientemente pequeños de los puntos del lado común, distintos de los vértices, los triángulos correspondientes no tienen puntos interiores comunes. Por ello, los triángulos σ_j cubren cierto entorno del punto $t = 0$.

Como la transformación definida $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$ es uniforme, a distintos valores de t les tienen que corresponder como preimágenes distintos puntos e. Comprobemos que en un entorno suficientemente pequeño del punto $t = 0$ a cada valor t le corresponde solamente una preimagen e. Suponiendo lo contrario, admitamos para $t' \neq 0$ al menos dos preimágenes. Como t' es uno de los m valores de $(z' - z_0)^{\frac{1}{m}}$ y cada uno de los $m - 1$ demás valores tiene que tener al menos una preimagen, en total, para m valores $(z' - z_0)^{\frac{1}{m}}$ hallamos al menos $m + 1$ preimágenes distintas. Pero las últimas también son preimágenes del punto z' en la transformación $z = f(e)$, y si z' está suficientemente próximo a z_0 (lo cual ocurrirá cuando t' esté suficientemente próximo a cero), obtenemos una contradicción, puesto que z' sólo tiene m preimágenes.

Así, pues, la transformación $e = \varphi(t)$, que es recíproca respecto de $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$, es uniforme en cierto entorno del punto $t = 0$. De todo lo expuesto anteriormente sobre esta transformación se deduce inmediatamente que ésta es continua. Por esto, $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$ es verdaderamente homeomorfa en un entorno del punto $e = e_0$.

Todos estos razonamientos se efectuaron para el caso en que $f(e_0) = z_0$ es un número finito. En caso contrario, es decir, cuando $z_0 = \infty$, se debe considerar $\frac{1}{f(e)}$ en lugar de $f(e) - f(e_0)$ y se debe tomar el parámetro local en la forma $t = [f(e)]^{-\frac{1}{m}}$.

En resumen, para una transformación interior arbitraria $z = f(e)$ de la superficie E en la esfera y para cada punto $e_0 \in E$, se pueden señalar un número natural m y un entorno U_0, tales que la transformación $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$ (o $t = [f(e)]^{-\frac{1}{m}}$) es homeomorfa en este entorno. No queda más que añadir a esto que m puede ser superior a la unidad lo más para un conjunto numerable de puntos que no tiene puntos de acumulación en la superficie.

§ 3. SUPERFICIE DE RIEMANN EN EL SENTIDO PROPIO DE LA PALABRA

3.1. Los hechos establecidos en el párrafo anterior permiten considerar cada superficie E, en la que se ha fijado alguna transformación interior $z = f(e)$ de la misma en la esfera, como superficie de Riemann. Precisando, para cada punto $e_0 \in E$ elegimos por parámetro local $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$ para aquel valor m y aquel entorno del punto e_0 de los cuales se hablaba al final del § 2 (si $f(e_0) = \infty$, hacemos $t = [f(e)]^{-\frac{1}{m}}$). Si e' pertenece a este entorno y $\tau = [f(e) - f(e')]^{\frac{1}{m'}}$ es el parámetro local correspondiente, entonces tendremos:

$$t = [f(e') - f(e_0) + \tau^{m'}]^{\frac{1}{m}}$$

y t será una función analítica de τ en cierto entorno del valor $\tau = 0$, si $f(e') \neq f(e_0)$. Pero siempre se puede satisfacer a esta condición sustituyendo el entorno inicial del punto e_0 por otro menor, de modo que en éste sea $f(e') \neq f(e_0)$ si $e' \neq e_0$ (puede ser necesaria tal sustitución sólo en el caso en que $m > 1$; debido a la definición de transformación interior, el punto e_0 siempre posee un entorno en el cual

se cumple la condición pedida). Así, pues, el sistema elegido de parámetros locales satisface a la condición A) del ap. 1.2. Por consiguiente, con una elección tal de los parámetros locales la superficie E se convierte en una superficie de Riemann.

En el ap. 2.2 se había demostrado que toda superficie orientable admite una transformación interior en la esfera. Por ello, cada superficie orientable E puede convertirse en una superficie de Riemann fijando el sistema de parámetros locales $\{t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}\}$ engendrado por una transformación interior determinada $z = f(e)$. Suponiendo que se hace precisamente tal elección cada vez que se da una transformación interior de la superficie E en la esfera, vamos a considerar cualquier superficie con una transformación interior $z = f(e)$ definida en la misma como una superficie abstracta de Riemann.

Se llega a un nuevo concepto, en comparación con el concepto de superficie abstracta de Riemann, al identificar las dos superficies de Riemann: E, con la transformación interior fijada en la misma $z = f(e)$, y E', con la transformación interior $z = f'(e')$, cuando, y sólo cuando, existe una transformación homeomorfa de E' sobre E: $e' = \varphi(e)$, según la cual $z = f'(e')$ se transforma en $z = f(e)$ (o $z = f(e)$ en $z = f'(e')$), es decir,

$$z = f'[\varphi(e)] = f(e).$$

Dos superficies que satisfacen a esta condición representan una misma superficie abstracta de Riemann. En efecto, si $F(e)$ es una función analítica en un entorno del punto $e_0 \in E$:

$$F(e) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots$$

donde $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$ (para precisar, suponemos que $f(e_0) \neq \neq \infty$), entonces en la transformación $e' = \varphi(e)$ el entorno del punto e_0 se transforma en un entorno del punto $e_0' \in E'$, $f(e)$ se convierte en $f'(e')$ y, por consiguiente, para $F(e) = F\varphi^{-1}(e')$ resulta:

$$F(e) = \alpha_0 + \alpha_1 [f'(e') - f'(e_0')]^{\frac{1}{m}} + \alpha_2 [f'(e') - f'(e_0')]^{\frac{2}{m}} + \ldots =$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1 t' + \alpha_2 t'^2 + \ldots,$$

es decir, $F(e)$ se convierte en una función analítica en un entorno del punto correspondiente e'.

No obstante lo recíproco no es justo: dos superficies que representan una misma superficie abstracta de Riemann pueden no satisfacer a la condición expuesta anteriormente. Para ver esto, recurramos a ejemplos elementales.

Sea $E = E'$ el plano ampliado (la esfera). Designemos e con w, e' con w' y fijemos las transformaciones: $z = w$ y $z = w'^2$. La pri-

mera de éstas es una transformación homeomorfa (es precisamente la transformación idéntica) de la superficie E sobre la esfera, la segunda es homeomorfa en cada uno de los triángulos de la triangulación representada en la fig. 60 (pág. 466), y también en los entornos de los puntos frontera de estos triángulos, distintos de los vértices. Por ello, ambas transformaciones son interiores y convierten al plano ampliado en superficies de Riemann con los sistemas de parámetros locales: $t = w - w_0$ si $w_0 \neq \infty$ y $t = \frac{1}{w}$ si $w_0 = \infty$ (para E); $t' = w'^2 - w_0'^2$ si $w_0' \neq 0$, $t' = \sqrt{z} = w'$ si $w_0' = 0$, y $t' = z^{-\frac{1}{2}} = w'^{-1}$ si $w_0' = \infty$ (para E'). Las superficies E y E', consideradas como superficies abstractas de Riemann, son idénticas. En efecto, la transformación homeomorfa $w' = w$ convierte a una de ellas en la otra de tal modo que las funciones analíticas en una superficie se convierten en funciones analíticas en la otra superficie. Por ejemplo, si la función $\varphi(w)$ es analítica en un entorno del punto $w = w_0 \neq 0$:

$$\varphi(w) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots = \alpha_0 + \alpha_1 (w - w_0) + \ldots,$$

entonces, como $w = w' = (w_0'^2 + t')^{\frac{1}{2}}$, tendremos:

$$\varphi(w') = \alpha_0 + \alpha_1 [(w_0'^2 + t')^{\frac{1}{2}} - w_0] + \ldots = \beta_0 + \beta_1 t' + \ldots,$$

o sea, $\varphi(w')$ también es una función analítica. Del mismo modo, si $\varphi(w)$ es analítica en un entorno del punto $w = 0$:

$$\varphi(w) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots = \alpha_0 + \alpha_1 w + \ldots,$$

entonces, como $w = w' = t'$, resulta:

$$\varphi(w') = \alpha_0 + \alpha_1 t' + \ldots$$

o sea, se tiene de nuevo una función analítica.

Sin embargo, desde el nuevo punto de vista, según el cual en la definición de superficie de Riemann se incluye su transformación interior en la esfera, ambas superficies son distintas. En efecto, la función $z = f(e) = w$ toma valores distintos en puntos distintos de la superficie E, mientras que $z = f'(e') = w'^2$ puede tomar valores iguales en distintos puntos de la superficie E'. De aquí se deduce que mediante ninguna transformación homeomorfa de E' sobre E se puede transformar la función $z = f'(e')$ en $z = f(e)$.

Es evidente que si $E = E'$ es de nuevo el plano ampliado, pero las transformaciones interiores son: $z = \left(\frac{w}{w-1}\right)^2$ y $z = w'^2$, entonces existe la transformación homeomorfa $w' = \frac{w}{w-1}$ de la superficie E sobre E', la cual transforma $z = f'(e')$ en $z = f(e)$.

Por ello, en este caso ambas superficies de Riemann son también idénticas desde el nuevo punto de vista.

Hagamos un resumen de lo expuesto en forma de la definición siguiente:

Una superficie E, en la que se ha fijado una transformación interior $z = f(e)$ en la esfera, determina una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra, *o abreviadamente,* una superficie de Riemann; *dos superficies de Riemann en el sentido propio de la palabra se consideran idénticas si, y sólo si, existe una transformación homeomorfa de una sobre la otra según la cual la transformación interior que figura en la definición de la primera superficie se convierte en la transformación interior que figura en la definición de la segunda.*

Obsérvese que la transformación interior misma $z = f(e)$ es una función analítica en E en todos los puntos en los que $f(e)$ toma valores finitos. En efecto, si $f(e_0) \neq \infty$, entonces el parámetro local correspondiente a este punto tiene la forma $t = [f(e) - f(e_0)]^{\frac{1}{m}}$, de donde $f(e) = f(e_0) + t^m$ en un entorno del punto e_0.

Si $f(e_0) = \infty$, entonces $t = [f(e)]^{-\frac{1}{m}}$ y para $f(e)$ obtenemos: $f(e) = t^{-m}$. Diremos, en general, respecto de una función $F(e)$, definida en un entorno de un punto e_0 de una superficie de Riemann y que admite un desarrollo de la forma

$$F(e) = \alpha_{-m}t^{-m} + \alpha_{-m+1}t^{-m+1} + \ldots + \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots \quad (\alpha_{-m} \neq 0,\ m \geqslant 1),$$

que esta función tiene un polo en el punto e_0 ($t = t_{e_0}$ es el parámetro local). Podemos decir entonces que la transformación interior que figura en la definición de superficie de Riemann E en el sentido propio, es una función uniforme y analítica en esta superficie, a excepción de polos. Fácilmente se observa que el conjunto de estos últimos puntos no tiene puntos de acumulación en E.

3.2. Adjuntemos a cada superficie de Riemann, en el sentido propio de la palabra, una imagen geométrica perceptible, la cual la vamos a considerar como un modelo de esta superficie.

Dividamos la superficie E mediante una triangulación en triángulos $\{\Delta_n\}$, de modo que en cada uno de éstos la transformación $z = f(e)$ sea homeomorfa. La imagen $f(\Delta_n) = \delta_n$ en la transformación $z = f(e)$ es un triángulo en la superficie de la esfera.

Vamos a identificar (a «pegar») entre sí a los puntos pertenecientes a los triángulos δ_j y δ_k ($j \neq k$), cuando y sólo cuando, éstos sean las imágenes de unos mismos puntos de la superficie E. Debido a las condiciones a que satisface toda triangulación, pueden pegarse solamente los puntos frontera de los triángulos.

Los triángulos que tienen un vértice común z_0 formarán ciclos finitos de triángulos, donde cada uno de ellos quedará pegado con

el anterior a lo largo de un lado común que parte del vértice común. Si en este caso z_0 es la imagen de un punto $e_0 \in E$ tal, que en un entorno del mismo la transformación $z = f(e)$ es homeomorfa ($m = 1$), entonces el ciclo indicado cubre simplemente, formando una capa, cierto entorno del punto z_0 en la esfera. Si la transformación $z = f(e)$ no es homeomorfa en ningún entorno del punto e_0, entonces, como ya sabemos, existe un número natural m tal, que los triángulos del ciclo realizan un cubrimiento m-ple, de m capas, de un entorno del punto z_0. Todo el conjunto de triángulos $\{\delta_n\}$, pegados unos con otros del modo indicado (lo más que puede haber es un conjunto numerable), puede uno imaginárselo como una especie de manta, confeccionada por trozos de triángulos y capas que envuelven toda la esfera o solamente cierto recinto de la misma. Precisamente esta «manta» o «superficie multifacética» sirve de modelo de la superficie de Riemann en el sentido propio. Ordinariamente este modelo S no lo diferencian de la superficie representada por él mismo, llamándole también superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra. Operando con S se debe tener presente que la indicación de que z pertenece al conjunto de valores $f(e)$ no es suficiente para fijar un punto en la superficie S. Para que la determinación sea completa hay que indicar también su preimagen e, o aquel triángulo Δ_j al que pertenece e. Entonces, entre todos los puntos de la superficie S, a los que corresponde un mismo punto z (estos puntos los percibimos como «situados sobre z» o «que se proyectan sobre z»), se debe tomar el único punto perteneciente al triángulo $\delta_j = f(\Delta_j)$.

Consideremos el vértice común, situado sobre z_0, de un ciclo de triángulos $\{\delta_n\}$, que representa un recubrimiento m-ple ($m > 1$) de cierto entorno del punto z_0. Tal punto de la superficie S lo llamaremos p u n t o d e r a m i f i c a c i ó n de la superficie de Riemann; al número $m - 1$ lo llamaremos orden del punto de ramificación. De lo expuesto anteriormente se deduce que el conjunto de puntos de ramificación no es más que numerable y que éste no posee puntos de acumulación en S (no obstante, es fácil construir ejemplos en los que el conjunto de las proyecciones de todos los puntos de ramificación de la superficie de Riemann dada, es denso sobre toda la esfera).

Ya sabemos que en cada superficie de Riemann se introduce la medida de los ángulos de un modo muy natural. Esto se realiza en S de una manera muy perceptible. Si el punto dado de la superficie S, que está situado sobre z_0, no es un punto de ramificación, entonces el parámetro local $t = z - z_0$, y para determinar el ángulo entre dos curvas situadas en S que pasen por z_0, se debe proyectarlas sobre la esfera y hacer luego una traslación a z_0 (si $z_0 = \infty$, en lugar de la traslación se hace la transformación $t = \frac{1}{z}$) . Como en la

esfera la traslación no altera los ángulos, el ángulo entre las dos curvas dadas se mide directamente por el ángulo formado por sus proyecciones sobre la esfera. Cuando el vértice del ángulo, situado sobre z_0, es un punto de ramificación de orden $m-1$, el parámetro local $t=(z-z_0)^{\frac{1}{m}}$ y, por consiguiente, el ángulo entre las curvas en S es igual al ángulo entre sus proyecciones sobre la esfera dividido por m. Al calcular el ángulo formado por las proyecciones es necesario tener en cuenta correctamente el múltiplo de 2π, que corresponde a la variación continua del $\operatorname{Arg}(z-z_0)$ cuando el punto situado en S se desplaza continuamente en un entorno del vértice del ángulo desde uno de sus lados hasta el otro.

El modelo S de la superficie de Riemann E se contempla mejor cuando la superficie es cerrada y, por consiguiente, la triangulación de la superficie consta de una cantidad finita de triángulos Δ_1, $\Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Comprobemos que cada punto de la superficie de la esfera pertenece al conjunto de valores $z=f(e)$, es decir, que S envuelve a toda la esfera. En efecto, en virtud de las propiedades conocidas de la transformación interior, el conjunto $\{z=f(e)\}$ es abierto. Si z' es un punto de acumulación de este conjunto, entonces, como la superficie E es compacta, se puede hallar una sucesión de puntos $e_n \in E$, convergente hacia cierto punto $e' \in E$, tal que $\{z_n=f(e_n)\}$ converge hacia z'. Como la transformación $f(e)$ es continua, de aquí se deduce que $f(e')=z'$, es decir, z' pertenece al conjunto $\{z=f(e)\}$. Por lo tanto, este último conjunto tiene que coincidir con toda la esfera (ap. 4.5, cap. I). Excluyendo de la esfera las proyecciones de los puntos de ramificación (en el caso dado hay una cantidad finita de éstas), resulta un recinto G, cada uno de cuyos puntos z tiene una cantidad acotada de preimágenes $f^{-1}(z)$ sobre E (no más que una en cada triángulo), siendo la transformación $z=f(e)$ homeomorfa en un entorno de cada preimagen.

Razonando exactamente igual que en el ap. 2.3, observamos que cada punto del recinto G tiene una misma cantidad m de preimágenes en toda la superficie E. Esto significa que la superficie S, siendo el modelo de una superficie cerrada de Riemann, es un recubrimiento m-ple, o de m capas, de toda la esfera. Se suele decir también que ésta es una s u p e r f i c i e d e m h o j a s.

3.3. Expondremos aquí algunos conceptos auxiliares relacionados con las curvas analíticas. Una curva continua L se llama *analítica*, si su ecuación se puede expresar en la forma $z=\lambda(t)$ donde $\lambda(t)$ es una función analítica del parámetro t en el segmento $[\alpha, \beta]$. Debido a esto, la función $\lambda(t)$ es desarrollable en serie de potencias en un entorno de cada $t_0 \in [\alpha, \beta]$:

$$\lambda(t)=\sum_{0}^{\infty}(a_n+ib_n)(t-t_0)^n.$$

Asignando a t valores reales y separando las partes real e imaginaria, obtenemos:

$$x = \sum_0^\infty a_n (t - t_0)^n \quad \text{e} \quad y = \sum_0^\infty b_n (t - t_0)^n,$$

o sea, x e y también se expresan por series de potencias y, por consiguiente, son funciones analíticas de t.

Diremos que la curva es r e g u l a r a n a l í t i c a, si la función $\lambda(t)$ se puede elegir de tal modo que se cumpla la condición $\lambda'(t) \neq 0$ en todos los puntos del segmento $[\alpha, \beta]$. La condición de regularidad permite expresar la ecuación del arco de la curva en un entorno de cada punto $t = t_0$ en la forma $y = y(x)$, o en la forma $x = x(y)$, según que sea $x'(t_0) \neq 0$ o $y'(t_0) \neq 0$, donde las funciones $y(x)$ o $x(y)$ son analíticas en un entorno del punto $x = x_0$ o $y = y_0$, respectivamente.

Pueden servir de ejemplos de curvas regulares analíticas el segmento de una recta, la circunferencia, la elipse (sus ecuaciones correspondientes son:

$$z = z_0 + le^{i\theta}t, \qquad z = z_0 + re^{2\pi it},$$
$$z = z_0 + a\cos 2\pi t + ib \operatorname{sen} 2\pi t \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)).$$

La curva $z = t^3 + it^4$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ también es analítica, sin embargo, no es regular analítica. En efecto, realicemos una transformación monótona $t = \mu(\tau)$ tal, que la función $z = [\mu(\tau)]^3 + i[\mu(\tau)]^4$ siga siendo analítica. Sin restringir generalidad, se puede suponer que $\mu(0) = 0$. Entonces las funciones $[\mu(\tau)]^3$ y $[\mu(\tau)]^4$ tienen que ser también analíticas en un entorno del origen de coordenadas y, por consiguiente, $\frac{[\mu(\tau)]^4}{[\mu(\tau)]^3} = \mu(\tau)$ también es analítica en un entorno del punto $\tau = 0$, a excepción, posiblemente, del mismo punto $\tau = 0$, donde *a priori* puede haber un polo. Ahora bien, como esta función está acotada, tiene que ser también analítica en el origen de coordenadas, de donde

$$x'(0) = 3[\mu(\tau)]^2 \mu'(\tau)|_{\tau=0} = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 4[\mu(\tau)]^3 \mu'(\tau)|_{\tau=0} = 0.$$

En resumen, la curva no es regular analítica. Esta circunstancia se debe al hecho de que y se expresa mediante x así: $y = x^{\frac{4}{3}}$, y esta última función tiene singularidad en el punto $x = 0$ (igual que $x = y^{\frac{3}{4}}$ en el punto $y = 0$).

Obsérvese que la imagen de una curva regular analítica L: $z = \lambda(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, perteneciente a un recinto G, en una transformación conforme de este recinto en algún recinto D, es también una curva regular analítica. En efecto, si la función que realiza la trans-

formación es $w = f(z)$, entonces la ecuación de la imagen de la curva L puede expresarse en la forma $w = f\lambda(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$. Pero la función $f\lambda(t)$ es analítica en el segmento $[\alpha, \beta]$, siendo $\frac{dw}{dt} = \frac{df}{dz}\frac{dz}{dt} \neq 0$ en este segmento, de donde se deduce que la imagen de la curva L es una curva regular analítica.

Señalemos, finalmente, la siguiente propiedad importante de las curvas analíticas. *Sean*

$$L_1 : z = \lambda_1(t') \ (\alpha' \leqslant t' \leqslant \beta') \quad \text{y} \quad L_2 : z = \lambda_2(t'') \ (\alpha'' \leqslant t'' \leqslant \beta'')$$

dos curvas regulares analíticas. Si los conjuntos de los valores de los parámetros t' y t'', para los cuales L_1 y L_2 tienen puntos comunes, no son simultáneamente conjuntos finitos (por ejemplo, si el conjunto mismo de los puntos comunes es infinito), entonces L_1 y L_2 poseen arcos comunes (uno o dos), cuyos orígenes y extremos son los puntos iniciales y finales de las curvas L_1 y L_2.

Para entender el enunciado de este teorema es suficiente examinar el ejemplo de dos arcos de circunferencias. Estos pueden cortarse por un conjunto finito, compuesto de 0, 1 ó 2 puntos, o por un conjunto infinito, compuesto de uno o dos arcos de circunferencia.

Supongamos que para un conjunto infinito E' de valores t' los puntos de la curva L_1 también pertenecen a L_2. Sea t'_0 un punto de acumulación del conjunto E' y sea $\{t'_n\}$ una sucesión de puntos distintos de E', convergente hacia t'_0. Si $\lambda_1(t'_0) = z_0$, entonces, debido a la condición $\lambda'_1(t'_0) \neq 0$, la función $z = \lambda_1(t')$ realiza una transformación conforme de cierto entorno del punto $t' = t'_0$ en un recinto g que contiene al punto z_0. Como esta transformación es biunívoca, a distintos valores de t'_n que caen en este entorno les corresponden distintos puntos $z'_n = \lambda(t'_n)$ de la curva L_1, pertenecientes al recinto g. Estos puntos están situados en el arco $l_1 \subset L_1$ que corresponde a cierto entorno del punto t'_0. Según la definición del conjunto E', los puntos z'_n también están situados en L_2. Fijemos para cada uno de éstos un valor del parámetro t'': $z'_n = \lambda_2(t''_n)$ y, pasando en caso de necesidad a subsucesiones, supongamos que $\{t''_n\}$ converge hacia cierto punto t''_0. Es obvio que

$$\lambda_2(t''_0) = \lim_{n\to\infty} \lambda_2(t''_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda_1(t'_n) = \lambda_1(t'_0) = z_0.$$

Consideremos un entorno del punto t''_0 tan pequeño que el arco correspondiente $l_2 \subset L_2$ esté contenido en el recinto g. Es evidente que l_2 es una curva regular analítica $z = \lambda_2(t'')$ $(t''_0 - \varepsilon \leqslant t \leqslant t''_0 + \varepsilon)$, que posee un conjunto infinito de puntos $z'_n = \lambda_2(t''_n)$ que son comunes con el arco l_1. En la transformación conforme $t' = \lambda_1^{-1}(z)$ del recinto g en un entorno del punto t'_0 al arco l_1 le corresponderá

un intervalo del eje real que contiene a este punto, y al arco l_2, una curva regular analítica que corta al eje real en un conjunto infinito de puntos distintos con el punto de acumulación t_0'. La ordenada de los puntos de esta curva es una función analítica de t'', que se anula en un conjunto infinito de puntos distintos t_n'' con el punto de acumulación t_0''. De aquí se deduce que ésta es idénticamente nula, es decir, la imagen del arco l_2 coincide con la imagen del arco l_1 en cierto entorno del punto $t = t_0'$. Por ello, también el arco l_2 de la curva L_2 coincide con el arco l_1 de la curva L_1 en cierto entorno del punto $z_0 = \lambda_1(t_0') = \lambda_2(t_0'')$, el cual es un punto de acumulación para los puntos comunes de las curvas L_1 y L_2.

Así, pues, hemos demostrado que el arco de la curva L_1, en cierto segmento $\tau_1' \leqslant t' \leqslant \tau_2'$ que contiene en su interior a t_0', coincide con un arco de la curva L_2 en cierto segmento $\tau_1'' \leqslant t'' \leqslant \tau_2''$ que contiene en su interior a t_0''. Aplicando este mismo razonamiento a los puntos inicial y final del arco común hallado, podemos alargar este arco en las dos direcciones. Como según lo demostrado, todo punto de acumulación de los puntos comunes de las curvas L_1 y L_2 es un punto interior de su arco común, este proceso de alargamiento puede terminarse solamente cuando el arco común llegue hasta los puntos iniciales o finales de las curvas L_1 y L_2. Llamando, para abreviar, extremos a los puntos iniciales o finales, tendremos las siguientes posibilidades:

a) los extremos de la curva L_1 coinciden con los extremos de la curva L_2; entonces L_1 y L_2 coinciden (geométricamente, aunque puedan tener distintos sentidos del recorrido);

b) existe al menos un extremo de una curva que es un punto interior de la otra, y al menos un extremo de una de las curvas que no es interior de la otra; entonces L_1 y L_2 no coinciden y tienen un arco común;

c) los extremos de cada una de las curvas son interiores para la otra; entonces L_1 y L_2, por lo general, no coinciden y tienen dos arcos comunes (en este caso, si ambas curvas L_1 y L_2 son cerradas, éstas coinciden; si solamente una de las curvas es cerrada, entonces los dos arcos comunes se confunden en uno).

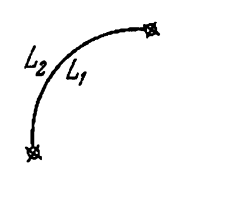
Todos estos casos quedan claros en la fig. 65.

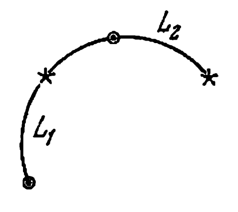
3.4. El método más simple de introducción de las superficies de Riemann en el sentido propio de la palabra en la teoría de funciones es el siguiente:

Se considera por superficie E un recinto arbitrario G del plano ampliado w, y en el mismo se considera una función meromorfa arbitraria $z = f(w) \not\equiv$ const. Como se demostrará en el presente apartado, $f(w)$ realiza una transformación interior del recinto G en la esfera (en el plano ampliado) y, por consiguiente, determina una superficie de Riemann en el sentido propio. Por lo tanto, toda

función meromorfa $z = f(w)$ en un recinto dado G determina una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra.

Basándose en el teorema de Stoïlow citado anteriormente (véase el ap. 2.2), la demostración de que $z = f(w) \not\equiv$ const realiza una transformación interior del recinto G, resulta evidente, puesto que $z = f(w)$ transforma cada conjunto abierto de puntos del recinto G en un conjunto abierto del plano ampliado (de la esfera); además, ninguno de los continuos situados en G y distintos de un punto se transforma en un punto (debido al teorema interior de unicidad). No obstante, esto mismo puede obtenerse también directamente. Es suficiente construir una triangulación del recinto G tal, que la transformación $z = f(w)$ sea homeomorfa, es decir, que la función $f(w)$ sea univalente, en cada uno de sus triángulos y también en los entornos de sus puntos frontera, distintos de los vértices.





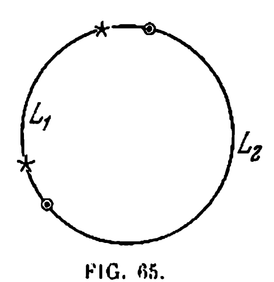


FIG. 65.

Comenzaremos la construcción señalando los puntos del recinto G en los que $f(w)$ toma valores múltiples. Tales puntos son: todos los ceros de $f'(w)$ y todos los polos múltiples de $f(w)$. El conjunto de los puntos indicados no es más que numerable. Numerémoslos en algún orden: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ y construyamos primero un recinto $K_1 \subset G$ que contenga al punto α_1 y tal, que todos los puntos $\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ estén situados fuera de $\overline{K}_1$ y que $\overline{K}_1$ se pueda dividir en una cantidad finita de sectores curvilíneos cerrados, en cada uno de los cuales $z = f(w)$ sea univalente. La posibilidad de tal construcción se deduce del ap. 1.1. cap. V. Precisando, si

$$f(w) = A_1 + a_k (w-\alpha_1)^k + \ldots = A_1 + a_k (w-\alpha_1)^k [1 + \ldots] =$$
$$= A_1 + [\varphi(w)]^k,$$

donde

$$\varphi(w) = \sqrt[k]{a_k}\,(w-\alpha_1) + \ldots \qquad (|k| > 1),$$

entonces la transformación $z = f(w)$ se puede expresar en la forma siguiente: $z = A_1 + \zeta^k$, donde $\zeta = \varphi(w)$ es una función univalente en un entorno U_1 del punto $w = \alpha_1$. Elijamos ahora el recinto $\overline{K}_1$

del entorno U_1 de tal modo que su imagen $\varphi(\overline{K}_1)$ sea un círculo con el centro en el punto 0: $|\zeta| \leqslant \rho$. Entonces la frontera del recinto K_1 será la imagen de la circunferencia: $\varphi^{-1}(|\zeta| = \rho)$, o sea, es una curva cerrada de Jordan que es regular analítica. Dividamos el círculo $|\zeta| \leqslant \rho$ mediante $|k| + 1$ radios en $|k| + 1$ sectores con ángulos iguales en el origen de coordenadas. Las preimágenes de estos sectores en la transformación $\zeta = \varphi(w)$ serán sectores cerrados con el vértice común $w = \alpha_1$, los cuales forman en su conjunto todo el recinto cerrado $\overline{K}_1$. Sus lados comunes son imágenes de los radios del círculo $|\zeta| \leqslant \rho$, es decir, son curvas regulares analíticas. No queda más que observar que la función $z = f(w)$ (o sea, $\zeta = \varphi(w)$ y $z = A_1 + \zeta^k$) es univalente en cada uno de los sectores construidos, y también en los entornos de sus puntos frontera, a excepción del punto $w = \alpha_1$. Está claro que tomando ρ suficientemente pequeño se puede conseguir que el recinto $\overline{K}_1$ pertenezca a cualquier entorno previamente asignado del punto α_1. Suponiendo que para los puntos $a_1, \ldots, a_n$ ya se han construido los recintos $K_1, \ldots, K_n$, podemos construir después el recinto $K_{n+1} \subset G$ que contenga al punto a_{n+1}, de tal modo, que no tenga puntos comunes con $\overline{K}_1, \ldots, \overline{K}_n$, que $a_{n+2}, \ldots, a_{n+p}, \ldots$ estén situados fuera de $\overline{K}_{n+1}$ y luego, que K_{n+1} se pueda dividir en una cantidad finita de sectores curvilíneos, en cada uno de los cuales la función $z = f(w)$ sea univalente. La frontera del recinto K_{n+1} y los lados comunes de los sectores serán curvas regulares analíticas. De este modo, quedarán construidos los recintos K_n para todos los puntos a_n en los que $f(z)$ toma valores múltiples. Para todos los demás puntos z_0 del recinto G construiremos sus entornos $U(z_0)$ tan pequeños que la función $z = f(w)$ sea univalente en $U(z_0)$.

Supongamos ahora que $\{G_n\}$ es una sucesión creciente de recintos que aproxima a G por el interior. Señalemos una cantidad finita de recintos $\{K_n\}$ y de entornos $\{U(z)\}$ que cubran $\overline{G}_1$ (aquí nos basamos en el lema de Heine-Borel); señalemos después una cantidad finita de recintos $\{K_n\}$ y de entornos $\{U(z)\}$ que cubran $\overline{G_2 - G_1}$, etc. Como resultado, obtendremos un conjunto numerable M de recintos (de tipo K_n o $U(z)$) que cubren todo el recinto G, de modo que cualquier conjunto cerrado $F \subset G$ queda cubierto por una cantidad finita de recintos de M. En este caso, la transformación $z = f(w)$ o es homeomorfa en los conjuntos cerrados de M (si se trata de $\overline{U}(z)$), o el recinto correspondiente $(\overline{K}_n)$ se divide en una cantidad finita de sectores en cada uno de los cuales esta transformación es homeomorfa (incluyendo los entornos de los puntos frontera de los sectores y excluyendo los entornos de su vértice común). Cada recinto $K_n \subset M$, así como cada círculo también $U(z) \subset M$, solamente se corta

con una cantidad finita de recintos de M. Como las fronteras de los recintos K_n y $U(z)$ son curvas regulares analíticas, éstas pueden cortarse entre sí solamente en una cantidad finita de puntos y, por consiguiente, cada uno de los recintos pertenecientes a M se divide en una cantidad finita de recintos por todos los recintos de la familia M que tienen puntos interiores comunes con el recinto en cuestión.

Esto mismo es cierto también para los sectores que forman K_n, puesto que la frontera de cada sector consta de una cantidad finita (de tres) curvas regulares analíticas. Los recintos cerrados mencionados (las partes de los recintos K_n y $U(z)$) en su conjunto cubren todo el recinto G; además, cada conjunto cerrado $F \subset G$ se cubre por una cantidad finita de ellos y ningún par de éstos tiene puntos interiores comunes. Consideraremos el conjunto de estos recintos cerrados como un p a r q u e t (o mosaico) que cubre el recinto G, y cada recinto por separado, como una t a r i m a de dicho parquet. Según la construcción, $z = f(w)$ determina un homeomorfismo de cada tarima del parquet sobre cierto recinto cerrado del plano ampliado z. La transformación también es homeomorfa en los entornos de los puntos frontera, a excepción de los puntos a_1, a_2, . . ., a_n, . . .

No queda más que dividir cada una de las tarimas del parquet en triángulos, para obtener una triangulación del recinto G (o sea, del parquet triangular) que satisfaga a las condiciones planteadas. Obsérvese que cada tarima del parquet tiene frontera común con una cantidad finita de tarimas. Por consiguiente, su frontera consta de una cantidad finita de arcos (o lados), cada uno de los cuales es una componente conexa de la parte común de las fronteras de dos tarimas. A los puntos iniciales y finales de estos arcos los llamaremos vértices del parquet y, cuando la cantidad de vértices de alguna tarima sea menor que tres, completaremos la cantidad de vértices hasta tres, dividiendo con puntos algún lado en dos o tres nuevos lados. Finalmente, fijemos dentro de las tarimas sendos puntos y unamos todos estos puntos mediante arcos de Jordan con todos los vértices de la tarima a que pertenece el punto dado. Exigiremos también que los arcos de una misma tarima no tengan otros puntos comunes más que el inicial y que estén contenidos dentro de la tarima, a excepción de sus extremos, que son los vértices de la tarima. Precisamente estos arcos dividirán la tarima en triángulos, que en su conjunto forman la traingulación pedida.

En resumen, hemos demostrado que toda función meromorfa $z = f(w) \not\equiv$ const en un recinto G del plano ampliado w realiza una transformación interior de este recinto G en el plano ampliado z y, por consiguiente, determina una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra. Si $z = f(w)$ y $z = F(w)$ son dos funciones meromorfas en un mismo recinto, entonces las superficies

de Riemann correspondientes serán idénticas cuando, y sólo cuando, existe un homeomorfismo $w' = \varphi(w)$ del recinto G sobre sí mismo tal, que $f(w')$ se transforma en $F(w)$, es decir, que

$$f\varphi(w) = F(w).$$

De aquí se deduce que $\varphi(w) = f^{-1}F(w)$, o sea, $\varphi(w)$ también es una función meromorfa y, por consiguiente, el homeomorfismo $w' = \varphi(w)$ es una transformación conforme del recinto G sobre sí mismo. Por lo tanto, para el recinto dado G, determinan la misma superficie de Riemann que la función $z = f(w)$ solamente las funciones de la forma $z = f\varphi(w)$, donde $w' = \varphi(w)$ realiza una transformación conforme del recinto G sobre sí mismo.

La superficie de Riemann correspondiente y su modelo S, se llaman superficie de Riemann de la función $z = f(w)$, o también superficie de Riemann de la función inversa $w = f^{-1}(z)$. La última denominación se debe a que la superficie S se emplea ordinariamente para estudiar en ella la función inversa a la dada.

Ocurre pues, que $w = f^{-1}(z)$, considerada como función de la variable compleja z, es decir, en la esfera, es multiforme (claro, si se excluye el caso elemental en que la función $z = f(w)$ sea univalente en el recinto G). Considerándola como función del punto en la superficie de Riemann S, ésta resulta uniforme.

En efecto, para caracterizar los puntos de la superficie S no basta señalar sus proyecciones z, sino que también hay indicar el número (o índice) del triángulo δ_j a que pertenecen. El triángulo δ_j es la imagen homeomorfa de un triángulo determinado Δ_j y, por consiguiente, al punto $z \in \delta_j$ le corresponde un punto determinado $w \in \Delta_j$, el cual es el valor de la función $f^{-1}(z)$ en el punto dado de la superficie de Riemann. El valor de la función en el triángulo de la esfera, sobre el cual está situado el triángulo $\delta_j \subset S$, representa una rama uniforme de la función $f^{-1}(z)$ en este triángulo. *La determinación de la superficie de Riemann por la función $f^{-1}(z)$ no sólo revela todo el conjunto de las ramas uniformes de la función multiforme, sino que hace que sea geométricamente perceptible su relación mutua.*

La transformación $z = f(w)$ no es homeomorfa en cualquier entorno de cada uno de los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, o sea, de los ceros de $f'(w)$ o en los polos múltiples de $f(w)$. Para todos los demás puntos del recinto G existen entornos en los que esta transformación es homeomorfa. De aquí se deduce (véase el ap. 3.2) que todos los puntos de ramificación de la superficie S están situados sobre las imágenes de los puntos α_n: $f(\alpha_n) = A_n$, es decir, sobre las imágenes de los ceros de $f'(w)$ y de los polos múltiples de $f(w)$. Supongamos que en un entorno del punto α_n la función $f(w)$ posee

un desarrollo de la forma:

$$A_n + a_k (w - \alpha_n)^k + a_{k+1} (w - \alpha_n)^{k+1} + \ldots \; (a_k \neq 0, \; |k| > 1)$$

(si $A_n = \infty$, aquí no se escribe A_n). Entonces, cada valor $z \neq A_n$, situado en un entorno suficientemente pequeño del punto A_n, la función $f(w)$ lo toma en $|k|$ puntos distintos de un entorno del punto α_n. Por consiguiente, el punto de ramificación de la superficie S que corresponde a α_n y que está situado sobre A_n, es de orden $|k| - 1$. Para la función inversa misma $w = f^{-1}(z)$ el punto A_n también es un punto de ramificación (algebraico) en el sentido explicado en el ap. 5.2, cap. II. Precisando, el ciclo de triángulos $\Delta_{j_1}, \ldots, \Delta_{j_p}$ de la triangulación del recinto G, que tienen un vértice común α_n, se transforma mediante $z = f(w)$ en un ciclo de triángulos $\delta_{j_1}, \ldots, \delta_{j_p}$ de la superficie S con el vértice común A_n. El último ciclo es un recubrimiento $|k|$-ple de cierto entorno del punto A_n. Si se fija en cada uno de los triángulos $\delta_{j_1}, \ldots, \delta_{j_p}$ la rama uniforme de la función $f^{-1}(z)$ que transforma este triángulo en el triángulo correspondiente del ciclo $\Delta_{j_1}, \ldots, \Delta_{j_p}$, entonces, al hacer un recorrido el punto z alrededor de A_n estas ramas se irán convirtiendo continuamente una en otra a medida que el punto en S, situado sobre z, va desplazándose del triángulo Δ_{j_1} a Δ_{j_2}, de Δ_{j_2} a Δ_{j_3}, etc.

Cuando el punto z de $|k|$ vueltas en la esfera en un mismo sentido alrededor de A_n, el punto de la superficie situado sobre él recorrerá todos los triángulos (cada uno de ellos una sola vez) con el vértice común en el punto considerado de ramificación y volverá a la posición inicial en el triángulo δ_{j_1}. A la vez, las ramas de la función inversa volverán a la rama inicial. Vemos, pues, que el concepto de punto de ramificación de una superficie de Riemann y el concepto introducido anteriormente de punto algebraico de ramificación de una función multiforme están estrechamente ligados entre sí. El primero es la imagen geométrica del segundo.

3.5. Obsérvese que la superficie S es homeomorfa al recinto $E = G$. Por esto, pueden obtenerse todas las propiedades de la función $f^{-1}(z)$ que se observan al estudiarla en S, considerando solamente el recinto G triangulado del mismo modo que se indicó en el ap. 3.4, es decir, dividido en recintos de univalencia de la función $z = f(w)$, cuyas posiciones relativas satisfacen a las condiciones que se imponen a una triangulación en general. En el § 5 del cap. II, estudiando las funciones multiformes que son inversas a las funciones elementales enteras y meromorfas, también utilizamos el método de división del recinto dado en recintos de univalencia, sin exigir para ello que estos recintos proporcionen una triangulación del recinto. En efecto, para el estudio de la función inversa la triangula-

ción última es superflua. Pero después de que se ha establecido que una función meromorfa siempre realiza una transformación interior, en cada caso concreto en que se necesite construir el modelo de la superficie de Riemann correspondiente podemos negarnos de la triangulación y entarimar el recinto dado G con un parquet de cualquier forma, con la condición de que $f(w)$ sea univalente en cada tarima de este parquet. Designando estas tarimas, igual que anteriormente, con $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, y sus imágenes $f(\Delta_j)$ con δ_j, el modelo de la superficie de Riemann S se formará por el conjunto de todas las $\{\delta_j\}$, donde se deben pegar entre sí las fronteras de distintas δ_j en aquellas partes que son las imágenes de las partes comunes de las fronteras de las Δ_j correspondientes.

Explicaremos lo expuesto en unos cuantos ejemplos concretos.

1) Sea G el plano ampliado y $z = w^m$ (m es un número natural > 1). Dividamos G, con rayos que partan del origen de coordenadas, en $2m$ ángulos iguales: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{2m}$. En cada uno de los recintos cerrados $\overline{\Delta}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, 2m$) la función w^m es univalente. Supongamos, para precisar, que uno de estos rayos coincide con la parte positiva del eje real, y sea Δ_1 el ángulo $0 < \arg z < \frac{\pi}{m}$. Entonces las imágenes $\overline{\delta}_j$ de los recintos cerrados $\overline{\Delta}_j$ serán los semiplanos superior e inferior w; además, $\overline{\delta}_j$ con subíndices impares designarán los semiplanos superiores y con subíndices pares, los inferiores. Para obtener el modelo pedido de superficie de Riemann no queda más que pegar entre sí las fronteras de dichos semiplanos por el mismo esquema con que se unen entre sí las fronteras de los recintos Δ_j. Si la parte positiva del eje real que figura en la frontera del semiplano δ_j, se designa con j_+, y la parte negativa con j_-, entonces 1_- se debe pegar con 2_-, 2_+ con 3_+, . . ., $(2m-1)_-$ con $2m_-$ y, finalmente, $2m_+$ con 1_+. Este esquema de pegar un semiplano con otro se muestra en la fig. 66, donde se ha tomado $m = 4$. Como resultado se obtiene sobre la esfera una superficie de m hojas con dos puntos de ramificación de orden $m - 1$, situados sobre $z = 0$ y $z = \infty$. Este es el modelo de la superficie de Riemann de la función $\sqrt[m]{z}$. En esta superficie la función $\sqrt[m]{z}$ es uniforme y analítica en todos los puntos, a excepción del punto de ramificación que está situado sobre $z = \infty$, en el cual tiene un polo.

2) Sea G el plano finito y $z = e^w$. Dividamos G con rectas paralelas al eje real en franjas de anchura π cada una. Supongamos, para precisar, que una de estas rectas es el eje real. Designemos con Δ_1 la franja $0 < y < \pi$ y numeremos las franjas según su orden; las que están situadas sobre Δ_1 con números enteros crecientes y las que están situadas bajo Δ_1, con números enteros decrecientes. En el caso dado las franjas cerradas $\overline{\Delta}_j$ no están contenidas completamente en el

recinto G; excluiremos de éstas el punto frontera $w = \infty$. Entonces, en los conjuntos $\overline{\Delta_j} \setminus \infty$ la función e^w será univalente. Esta transforma cada uno de éstos en un semiplano cerrado z del cual se han excluido los puntos $z = 0$ y $z = \infty$. En este caso, a la franja de subíndice impar le corresponde el semiplano superior, y a la franja de subíndice par, el inferior. No queda más que pegar entre sí el conjunto infinito numerable de semiplanos superiores e inferiores δ_j $(j = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots)$ por el esquema según el

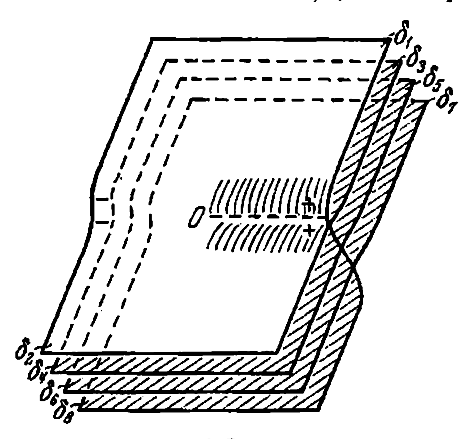


FIG. 66.

cual vienen unidas entre sí las franjas Δ_j. El esquema correspondiente se muestra en la fig. 67; éste es análogo al esquema de la fig. 66, pero el conjunto de recintos δ_j es infinito y entre éstos no hay primero ni último, por lo cual ya no se puede cerrar toda la superficie como antes se hacía, pegando el último con el primero. Resulta, pues, una superficie de infinitas hojas cuyos puntos están situados sobre todos los puntos de la esfera, excluyendo $z = 0$ y $z = \infty$. Sobre estos últimos no hay ningún punto de la superficie construida. Obsérvese que esta superficie no contiene ningún punto de ramificación, pues la función $z = e^w$ es univalente en un entorno de cada punto del recinto G.

La superficie obtenida representa el modelo de la superficie de Riemann de la función $\operatorname{Ln} z$. Sobre ésta, la función $\operatorname{Ln} z$ es uniforme y analítica en todos los puntos sin excepción.

3) Sea G el plano finito y $z = \operatorname{sen} w$. Dividamos G con rectas paralelas al eje imaginario, primero en franjas de anchura π y después, con el eje real, en semifranjas. Supongamos, para precisar, que una de las franjas es simétrica respecto del eje imaginario.

Llamemos Δ_1' a la semifranja superior $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$, y numeremos según su orden las semifranjas del semiplano superior: las que están situadas a la derecha de Δ_1' con números enteros crecientes y las que están a la izquierda, con números enteros decrecientes. Resultan las semifranjas Δ_j', $j = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ Del mismo modo, llamando Δ_1'' a la semifranja inferior

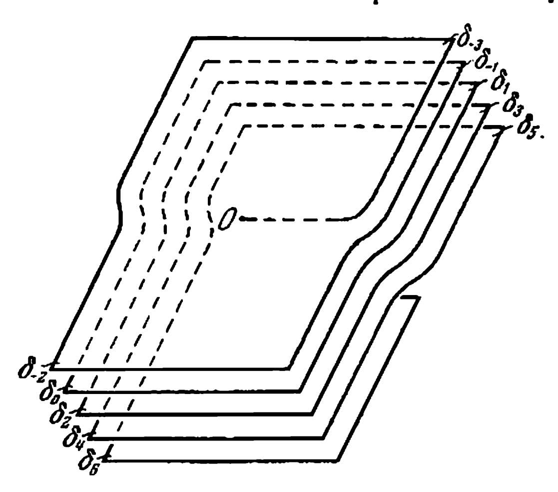


FIG. 67.

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y < 0$, numeremos las semifranjas del semiplano inferior que están situadas a la derecha de Δ_1'' con números enteros crecientes y las que están a la izquierda, con números enteros decrecientes. Resultan las semifranjas Δ_j'', $j = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ Las semifranjas cerradas $\overline{\Delta}_j'$ y $\overline{\Delta}_j''$ no están contenidas completamente en el recinto G; excluiremos de ellas el punto $z = \infty$. Entonces obtenemos los conjuntos $\overline{\Delta}_j' \setminus \infty$ y $\overline{\Delta}_j'' \setminus \infty$, en cada uno de los cuales la función $z = \operatorname{sen} w$ es univalente. La función $z = \operatorname{sen} w$ transforma estos conjuntos en los semiplanos superior e inferior cerrados, respectivamente, de los cuales se excluye el punto $z = \infty$. Los semiplanos superiores son las imágenes de las semifranjas Δ_j' de subíndices impares y de las semifranjas Δ_j'' de subíndices pares; los semiplanos inferiores son las imágenes de las semifranjas Δ_j' de subíndices pares y de las semifranjas Δ_j'' de subíndices impares. No queda más que pegar entre sí el conjunto infinito numerable de semiplanos superiores e inferiores δ_j', δ_j'' por el mismo

esquema según el cual están unidos entre sí las semifranjas Δ'_j y Δ''_j (véase la fig. 68). Resulta, pues, una superficie de infinitas hojas que se extiende sobre toda la esfera, a excepción de un punto $z = \infty$, sobre el cual no está situado ningún punto de la superficie. Como sen w no toma nunca el valor ∞ y su derivada, cos w, se anula para $w = \frac{\pi}{2} + n\pi$, todos los puntos de ramificación de la superficie están situados sobre los puntos de la esfera sen $\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \pm 1$.

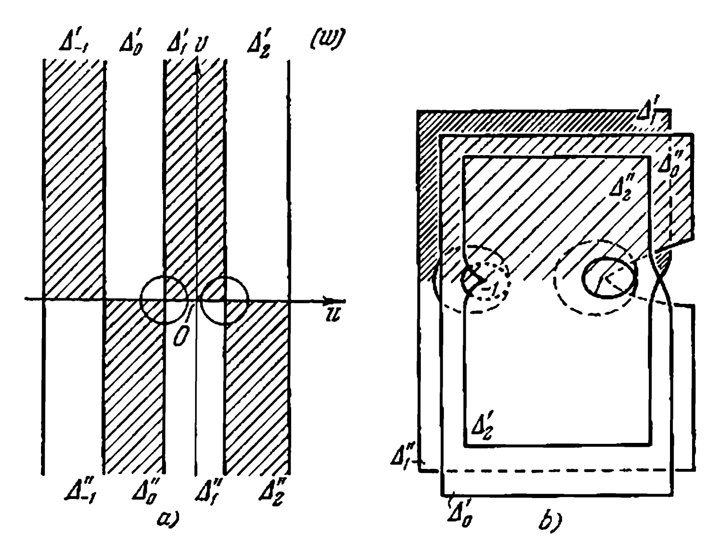


FIG. 68.

El conjunto de estos puntos en la superficie es infinito; el orden de cada uno de ellos es 1 $\left(\text{puesto que el seno toma doblemente los valores } \pm 1 \text{ en los puntos } \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$. En la fig. 68,*b* están representados dos puntos de ramificación, los cuales son las imágenes de $w = -\frac{\pi}{2}$ y $w = \frac{\pi}{2}$. La superficie construida es el modelo de la superficie de Riemann Arc sen z. Esta función es uniforme y analítica en todos los puntos de la superficie sin excepción.

4) Sea G el plano finito y $z = \wp(w)$. Supongamos, para simplificar, que los períodos fundamentales de la función $\wp(w)$ son el

número real 2α y el número imaginario puro $2i\beta$. Dividamos todo el plano en una red de rectángulos congruentes al rectángulo $0 < x < 2\alpha$, $0 < y < 2\beta$, y dividamos luego cada uno de estos rectángulos en cuatro rectángulos pequeños iguales entre sí. Ya sabemos (ap. 6.3, cap. VII) que la función $\wp(w)$ es univalente en el rectángulo cerrado $0 \leqslant x \leqslant \alpha$, $0 \leqslant y \leqslant \beta$, y transforma a éste en el semiplano inferior cerrado de tal modo que los homólogos a los vértices del rectángulo 0, α, $\alpha + i\beta$, $i\beta$ son los puntos del eje real ∞, e_1, e_2 y e_3. En general, rayando los rectángulos pequeños en el orden del ajedrez, comenzando por el que acabamos de examinar, resulta

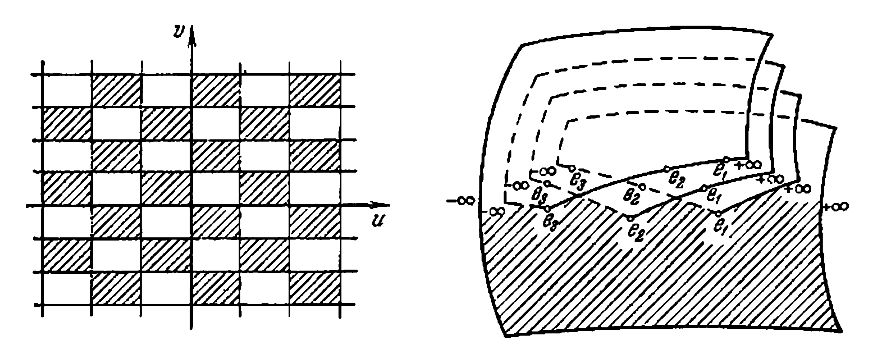


FIG. 69.

que todos los rectángulos rayados se transforman mediante $z = \wp(w)$ en el semiplano inferior, y los no rayados, en el semiplano superior. Para obtener el modelo de la superficie de Riemann para la función que es inversa a $z = \wp(w)$, o sea, para la integral elíptica

$$w = \int_{\infty}^{z} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}},$$

es necesario pegar entre sí un conjunto infinito numerable de ejemplares de semiplanos superiores e inferiores por el esquema según el cual están unidos unos con otros los rectángulos pequeños.

En la fig. 69 se muestran ambos esquemas; en la parte de la derecha del dibujo vemos cómo se pega un ejemplar del semiplano inferior con cuatro ejemplares de semiplanos superiores. Esto corresponde al método de unión de un rectángulo rayado con los cuatro contiguos que no están rayados. Como resultado se obtiene una superficie de infinitas hojas que se extiende sobre toda la esfera.

Como $z = \infty$, e_1, e_2, e_3 son valores múltiples de $z = \wp(w)$, y además, dobles (correspondientes a los polos dobles de $\wp(w)$ o a los ceros simples de $\wp'(w)$), los puntos de ramificación del modelo de la superficie de Riemann considerada están situados sobre los puntos de la esfera ∞, e_1, e_2, e_3. El orden de cada uno de ellos es igual a la unidad; además, sobre cada uno de los puntos indicados de la esfera hay un conjunto infinito numerable de puntos de ramificación de la superficie (que corresponde a que la función $\wp(w)$ toma cada uno de los valores múltiples en un conjunto infinito de puntos distintos). La función

$$w = \int_{\infty}^{z} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$$

es uniforme y analítica en toda la superficie construida.

§ 4. PROLONGACION ANALITICA. FUNCION ANALITICA COMPLETA E IMAGEN ANALITICA

4.1. Sean G y D dos recintos del plano ampliado z y supongamos que $f(z)$ y $\varphi(z)$ son dos funciones uniformes y analíticas en estos recintos. Se dice que estas funciones son la *prolongación analítica inmediata una de la otra*, si se cumplen las dos condiciones siguientes:

a) los recintos G y D tienen al menos un punto común;

b) existe un recinto g que está contenido tanto en el recinto G como en el recinto D, en cuyos puntos $f(z) = \varphi(z)$.

En virtud del teorema interior de unicidad, $f(z)$ y $\varphi(z)$ tienen que coincidir en todos los puntos de la componente conexa g' de la intersección de los recintos G y D, que contiene al recinto g. Pero la intersección de los recintos G y D puede no ser conexa; entonces, en las demás componentes puede no cumplirse la igualdad $f(z) = \varphi(z)$.

Como ejemplo, consideremos el recinto G cuya frontera es la semirrecta $-\infty \leqslant x \leqslant 0$, $y = 0$, y el recinto D cuya frontera es la semirrecta $0 \leqslant x \leqslant +\infty$, $y = 0$. Sea $f(z) = \ln|z| + i\theta$, donde θ es el valor del argumento del punto z que satisface a la condición $-\pi < \theta < \pi$, y $\varphi(z) = \ln|z| + i\alpha$, donde α es el valor del argumento del punto z que satisface a la condición $0 < \alpha < 2\pi$; estas funciones son uniformes y analíticas en los recintos correspondientes. Los recintos G y D tienen puntos comunes que en su conjunto forman dos recintos distintos: los semiplanos superior e inferior. En este último los valores de θ y α están ligados en cada punto por la relación

$$\alpha = \theta + 2\pi,$$

de donde se deduce que en estos puntos $f(z) \neq \varphi(z)$. Está claro que en el semiplano superior g se tiene:

$$\alpha = \theta \quad \text{y} \quad \varphi(z) = f(z).$$

De todo lo expuesto se deduce que $f(z)$ y $\varphi(z)$ son la prolongación analítica inmediata una de la otra.

Modifiquemos un poco este ejemplo. Sin variar los recintos G y D y la función $f(z)$, tomemos en el recinto D en lugar de $\varphi(z) = \ln|z| + i\alpha$ otra función $\psi(z) = \ln|z| + i\beta$, donde β es el valor del argumento z que satisface a la condición $-2\pi \leqslant \beta \leqslant 0$. Como β y α están ligados en todos los puntos del recinto D por la relación

$$\alpha = \beta + 2\eta,$$

se tiene, $\varphi(z) \neq \psi(z)$ en todos los puntos del recinto D. Pero en el semiplano inferior, $\beta = \theta$ y, por consiguiente, $f(z) = \psi(z)$. Así, pues, $f(z)$ son prolongaciones inmediatas una de la otra, mientras que $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ (definidas en recintos coincidentes) no son prolongaciones inmediatas una de la otra.

Generalicemos el concepto de prolongación inmediata; sean $f(z)$ y $\varphi(z)$ dos funciones analíticas en los recintos arbitrarios G y D, respectivamente. Diremos que cada una de éstas es la *prolongación analítica* de la otra (sin el epíteto «inmediata»), si existe una cantidad finita de recintos $G_0 = G, \ldots, G_n = D$ y en ellos sendas funciones analíticas $f_0(z) = f(z), \ldots, f_n(z) = \varphi(z)$, tales que $f_k(z)$ es la prolongación inmediata de $f_{k-1}(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Al conjunto formado por el recinto G y la función uniforme y analítica en el mismo $f(z)$, lo llamaremos *elemento* $\{G, f(z)\}$ (ya empleamos este término en el cap. III para el caso particular en que G es un círculo) y diremos que el recinto G es el *campo del elemento*. Al sistema de elementos

$$\{G_0, f_0(z)\}, \ldots, \{G_n, f_n(z)\},$$

donde $f_k(z)$ es la prolongación inmediata de $f_{k-1}(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, lo llamaremos *cadena de elementos que une* $\{G_0, f_0(z)\}$ y $\{G_n, f_n(z)\}$. Se puede decir que dos elementos son la prolongación analítica uno de otro*), si existe una cadena de elementos que los une.

Como ejemplo, consideremos el conjunto de recintos G_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ determinados por las condiciones

$$\pi k < \theta_k < \pi(k + 2),$$

*) A continuación se considerarán equivalentes las expresiones: «prolongación de una función $f(z)$ que es uniforme y analítica en el recinto G» y «prolongación del elemento $\{G, f(z)\}$».

donde $\theta_h = \theta_h(z)$ es el valor correspondiente de Arg z, y en cada uno de los recintos G_h la función $f_k(z) = \ln|z| + i\theta_k(z)$. El lector puede comprobar fácilmente que dos funciones cualesquiera $f_\mu(z)$ y $f_m(z)$ son prolongación analítica una de la otra. Además, si para precisar se supone que $m > \mu$ y $m = \mu + p$, entonces $\{G_\mu, f_\mu(z)\}, \ldots, \{G_m, f_m(z)\}$ forman una cadena de $p + 1$ elementos que une $\{G_\mu, f_\mu(z)\}$ y $\{G_m, f_m(z)\}$.

De las definiciones dadas se deduce inmediatamente que la relación de prolongación analítica entre los elementos posee las siguientes propiedades:

a) propiedad reflexiva: cada elemento es la prolongación analítica de sí mismo;

b) propiedad simétrica: si el elemento $\{D, \varphi\}$ es la prolongación del elemento $\{G, f\}$, entonces el elemento $\{G, f\}$ es la prolongación del elemento $\{D, \varphi\}$;

c) propiedad transitiva: si el elemento $\{D, \varphi\}$ es la prolongación del elemento $\{G, f\}$, y el elemento $\{E, \psi\}$ es la prolongación del elemento $\{D, \varphi\}$, entonces el elemento $\{E, \psi\}$ es la prolongación del elemento $\{G, f\}$.

4.2. Consideremos ahora el conjunto de todos los elementos posibles, es decir, de todos los recintos del plano ampliado y de todas las funciones uniformes y analíticas en los recintos correspondientes. Podemos dividirlos en clases, considerando que dos elementos pertenecen a una misma clase cuando, y sólo cuando, uno es la prolongación del otro. Es obvio que cada elemento pertenece a alguna clase, y también que cada elemento $\{G, f\}$ de una clase K caracteriza por completo a esta clase, en el sentido de que cualquier elemento $\{D, \varphi\}$ pertenece a la clase K si es prolongación del elemento $\{G, f\}$, y no pertenece a dicha clase en caso contrario.

Diremos que cada una de las clases indicadas K define una *función analítica completa* $F(z)$; aquí, distintas clases definen distintas funciones analíticas completas. El elemento $\{G, f\} \in K$ se llama *elemento de la función* $F(z)$ o también *rama uniforme de la función* $F(z)$ en el recinto G (ya empleamos este término en casos particulares). A los valores de los elementos de la función $F(z)$ los llamaremos valores de esta función.

Sea $F(z)$ una función analítica completa y sea M el conjunto de todos los puntos pertenecientes a los campos de los elementos de esta función. Está claro que este conjunto no es vacío, puesto que no es vacía la clase K determinada por $F(z)$. Por otra parte, éste es abierto, pues, si $z_0 \in M$, entonces z_0 es un punto de cierto recinto G que figura en el elemento $\{G, f\} \in K$, por lo cual existe un entorno del punto z_0 que pertenece a G (y, por consiguiente, a M). Finalmente, M es un conjunto conexo. En efecto, sean z_0 y z' dos puntos distintos de M. Supongamos que $z_0 \in G_0$, donde $\{G_0, f_0\} \in K$ y $z' \in G'$,

$\{G', f'\} \in K$; según la definición de clase de elementos, tiene que existir una cadena que una $\{G_0, f_0\}$ y $\{G', f'\}$:

$$\{G_0, f_0\}, \ldots, \{G_n, f_n\} = \{G', f'\}.$$

Como $\{G_{k-1}, f_{k-1}\}$ y $\{G_k, f_k\}$ son prolongaciones inmediatas uno de otro, los recintos G_{k-1} y G_k tienen que tener puntos comunes. Sea ζ_k un punto común de G_{k-1} y G_k y sea γ_k una curva continua, perteneciente a G_k, que una ζ_k con ζ_{k+1} ($k = 1, 2, \ldots, n-1$). Entonces, uniendo también z_0 con ζ_1 en el recinto G_0 y ζ_n con z' en el recinto G_n mediante curvas continuas γ_0 y γ_n, resulta una curva continua $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \ldots \cup \gamma_n$ (en cuyo recorrido el extremo de cada arco γ_k ($k < n$) se toma por origen del siguiente arco γ_{k+1}), perteneciente a M y que une z_0 con z'.

Resumiendo: M es un recinto. Este se llama campo de existencia de la función analítica completa $F(z)$. Esta denominación se debe a que no existe ningún elemento de la función $F(z)$ que esté determinado en algún punto no perteneciente al recinto M.

Antes de examinar ejemplos, introduzcamos otro término conveniente. El elemento $\{D, \varphi\}$ se llama subordinado al elemento $\{G, f\}$, si $D \subset G$ y $\varphi(z) = f(z)$ ($z \in D$). Esto se escribirá así: $\{D, \varphi\} \subset \{G, f\}$. Es evidente que si $\{D, \varphi\} \subset \{G, \varphi\}$, entonces estos elementos son prolongación inmediata uno de otro. Por ello, cada clase K que determina una función analítica completa tiene que contener, además de un elemento $\{G, f\}$, también todos los elementos subordinados a $\{G, f\}$.

Obsérvese también que si un elemento $\{D, \varphi\}$ es la prolongación inmediata del elemento $\{G, f\}$ y $D \subset G$, entonces $\{D, \varphi\} \subset \{G, f\}$. En efecto, existe un recinto $g \subset D \subset G$, en el cual $f(z) = \varphi(z)$; por consiguiente, en virtud del teorema de unicidad $f(z) = \varphi(z)$ en todos los puntos del recinto D.

4.3. Ejemplo 1. Sea $f(z)$ una función meromorfa en el plano finito (en particular, entera). Esta es uniforme y analítica en el recinto G que se obtiene del plano ampliado al excluir los puntos singulares de la función $f(z)$, los cuales forman lo más un conjunto infinito numerable con el único punto de acumulación en el infinito.

Demostremos que la clase K que contiene al elemento $\{G, f\}$ consta solamente de elementos subordinados a $\{G, f\}$. Evidentemente, para ello es suficiente demostrar que toda prolongación inmediata del elemento $\{G, f\}$ (o del elemento subordinado a él) representa un elemento subordinado a $\{G, f\}$. Supongamos lo contrario, y sea $\{D, \varphi\}$ la prolongación inmediata del elemento $\{G, f\}$, sin estar subordinado a este último. Entonces el recinto D tiene que contener puntos no pertenecientes a G, es decir, puntos singulares

de la función $f(z)$. Sea z_0 uno de éstos. Como la parte común de los recintos G y D también es un recinto y $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden entre sí en un recinto g perteneciente a esta parte común, resulta que éstas también coinciden entre sí en toda la parte común. Por ello, éstas coinciden en un entorno del punto z_0 (a excepción del punto z_0):

$$f(z) = \varphi(z), \qquad 0 < |z - z_0| < \rho,$$

y, por consiguiente, z_0 es un punto singular aislado de la función $f(z)$. Mas para la función $\varphi(z)$ este mismo punto es regular, lo cual es imposible. Hemos obtenido una contradicción. Así, pues, todas las prolongaciones analíticas del elemento $\{G, f\}$ están subordinadas a este elemento. De aquí se deduce que el campo de existencia de la función analítica completa $F(z)$ determinada por la clase K, coincide con el recinto G, y los valores de $F(z)$ coinciden en todos los puntos con los valores de $f(z)$ ($F(z)$ no toma otros valores). Esto permite identificar $F(z)$ con $f(z)$ y considerar cada función meromorfa en el plano finito como una función analítica completa.

Ejemplo 2. Sea G algún recinto, cuya frontera conste de una cantidad finita de curvas de Jordan sin puntos comunes entre sí. Demostremos que éste es el campo de existencia de una función uniforme y analítica. Con este fin, consideremos una sucesión de puntos del recinto G que no tenga puntos de acumulación en el interior de G y tal que todo punto frontera del recinto G sea un punto de acumulación de esta sucesión (instamos al lector a que lleve a cabo la construcción de una sucesión semejante).

Según el ap. 3.4, cap. VII, existe en el recinto G una función uniforme y analítica $f(z) \not\equiv 0$ que se anula en cada punto de la sucesión. Consideremos el elemento que consta del recinto G y de la función $f(z)$, y demostremos que solamente su elemento subordinado puede ser su prolongación inmediata.

Supongamos lo contrario, y sea $\{D, \varphi\}$ una prolongación inmediata del elemento $\{G, f\}$ que no está subordinada a este último. Entonces el recinto D tiene que contener tanto puntos pertenecientes a G como puntos no pertenecientes a G. Examinemos una componente conexa g' de la intersección de los recintos G y D, en la cual sea $f(z) = \varphi(z)$. Como g' no puede coincidir con D, entre los puntos frontera de g' tiene que haber puntos interiores del recinto D. Sea ζ_0 uno de éstos; ζ_0 no puede ser un punto interior del recinto G, pues en caso contrario g' podría ampliarse uniéndole cierto entorno del punto ζ_0. Evidentemente, ζ_0, siendo un punto de acumulación del recinto G, es un punto frontera de G.

Construyamos un entorno U_0 del punto ζ_0, perteneciente a D, y sea g'' aquella componente conexa de la intersección de los recintos G y U_0, en cuya frontera está situado ζ_0. Debido a las hipótesis respecto de la frontera del recinto G, tal componente es única. Por

consiguiente, ésta está contenida en el recinto g', para el cual ζ_0 también es un punto frontera. Pero, según la construcción, en el recinto g'' hay un conjunto infinito de ceros de la función $f(z)$, los cuales también tienen que ser todos ceros de la función $\varphi(z)$. Por ello, el punto ζ_0, que es interior al recinto D, es un punto de acumulación de los ceros de la función $\varphi(z)$, de donde $\varphi(z) \equiv 0$ y, por consiguiente, $f(z) \equiv 0$. Resulta una contradicción con la hipótesis respecto de la función $f(z)$.

Así, pues, todas las prolongaciones inmediatas del elemento $\{G, f\}$ están subordinadas a este elemento, de donde se deduce que el campo de definición de la función analítica completa correspondiente $F(z)$ coincide con G, y todos los valores de $F(z)$ coinciden con los valores de $f(z)$. Por esta razón, podemos identificar la función analítica completa $F(z)$ con la función uniforme $f(z)$ en el recinto G.

En todos los casos semejantes a éste, en los que el campo de definición G de una función uniforme y analítica $f(z)$ coincide con el campo de existencia de esta función, la frontera del recinto G se llama *frontera natural* de la función $f(z)$.

Pueden servir de ejemplos elementales de funciones para las cuales la frontera natural es la circunferencia unidad, las sumas de las series de potencias examinadas en el ap. 6.3, cap. III, con puntos singulares que llenan toda la circunferencia unidad (por ejemplo, $f(z) = \sum z^{2^n}$).

E j e m p l o 3. Consideremos la función multiforme $\operatorname{Ln} z$ en el recinto E: $0 < |z| < \infty$. En cada recinto simplemente conexo $G \subset E$ esta función posee un conjunto infinito numerable de ramas uniformes analíticas.

Consideremos todos los recintos simplemente conexos posibles $G \subset E$ y en cada uno de ellos todas las ramas uniformes analíticas posibles de la función $\operatorname{Ln} z$, y demostremos que el conjunto K de todos los elementos $\{G, f\}$ forman una clase. En otras palabras, se necesita demostrar que dos elementos cualesquiera de K son la prolongación uno del otro, y luego, que cualquier elemento que es la prolongación de cierto $\{G, f\} \in K$, también pertenece a K. Supongamos primero que la frontera del recinto G es el rayo $0 \leqslant x \leqslant \infty$, $y = 0$. Entonces, todas las ramas uniformes de la función $\operatorname{Ln} z$ en este recinto se expresan en la forma $f_{2k}(z) = \ln|z| + i\theta_{2k}$, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ y θ_{2k} es el valor del $\operatorname{Arg} z$ que satisface a la relación $2\pi k < \theta_k < 2\pi(k+1)$. Es obvio, que en este caso $\{G, f_{2\mu}\}$ y $\{G, f_{2m}\}$ son la prolongación uno del otro para cualesquiera μ y m (compárese con el ap. 4.1) y, por consiguiente, pertenecen a una misma clase.

Consideremos ahora un recinto arbitrario D y en el mismo, una rama uniforme $\varphi(z)$ de la función $\operatorname{Ln} z$. Supongamos que $z_0 \in D$ y que z_0 no pertenece a la frontera del recinto G (o sea, que no es

un número real no negativo). En un entorno del punto z_0, que no contenga puntos frontera del recinto G, la función $\varphi(z)$ tiene la forma $\varphi(z) = \ln|z| + i\theta_{2k_0}$ (puesto que todos los valores del $\operatorname{Arg} z$ en el entorno indicado se agotan con las funciones $\theta_{2k} = \theta_{2k}(z)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); por ello, en el entorno indicado $\varphi(z)$ coincide con $f_{k_0}(z)$, es decir, $\{D, \varphi\}$ es la prolongación inmediata del elemento $\{G, f_{2k_0}\}$ y, por consiguiente, pertenece a la misma clase que cualquiera de los elementos $\{G, f_{2k}\}$.

Así, pues, todos los elementos del conjunto considerado K pertenecen a una misma clase. No queda más que demostrar que éstos agotan toda esta clase, para lo cual es suficiente convencerse de que la prolongación inmediata de cualquier elemento de K pertenece a K.

Supongamos que $\{G, f\} \in K$ y que $\{D, \varphi\}$ es la prolongación inmediata del elemento $\{G, f\}$. Evidentemente, $\{D, \varphi'\}$ también es la prolongación inmediata del elemento $\{G, f'\}$ (donde $\varphi'(z)$ y $f'(z)$ son las derivadas). Pero $f'(z) = \frac{1}{z}$; por lo tanto, también $\varphi'(z) = \frac{1}{z}$. De esto se deduce que el recinto D no puede contener el origen de coordenadas (pues $\varphi'(z)$ tiene que ser regular en todos los puntos del recinto D). Pero éste tampoco puede contener al punto $z = \infty$, pues $\varphi(z)$, siendo regular en este punto, tendría un desarrollo de Laurent de la forma $\varphi(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots$, de donde $\varphi'(z) = -\frac{c_1}{z^2} - \frac{2c_2}{z^3} - \ldots \neq \frac{1}{z}$.

En resumen, D es un recinto simplemente conexo perteneciente a E: $0 < |z| < \infty$.

Sea z_0 un punto común de los recintos G y D, en cuyo entorno $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden, y sea $\varphi_0(z)$ una rama uniforme cualquiera de $\operatorname{Ln} z$ en el recinto D.

Como $\varphi(z) - \varphi_0(z) = f(z) - \varphi_0(z) = 2k_0\pi i$ en un entorno del punto z_0 (no olvidemos que $f(z)$ y $\varphi_0(z)$ son ramas uniformes de $\operatorname{Ln} z$ en este entorno), se tiene $\varphi(z) - \varphi_0(z) = 2k_0\pi i$ en todo el recinto D. Por consiguiente, $\varphi(z) = \varphi_0(z) + 2k_0\pi i$ también es una rama uniforme de $\operatorname{Ln} z$ en el recinto D, con lo cual se termina la demostración.

Vemos, pues, que el conjunto de todas las ramas uniformes de $\operatorname{Ln} z$ en todos los recintos simplemente conexos, pertenecientes a E, coincide con el conjunto de todos los elementos que determinan una función analítica completa. Esto permite hablar de $\operatorname{Ln} z$ como de una función analítica completa con el campo de existencia $0 < |z| < \infty$.

4.4. Si el recinto G es un círculo $|z - z_0| < r$ o la parte exterior al círculo $|z| > r$, entonces una función analítica $f(z)$ en este

recinto se expresa en forma de una serie convergente

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n \quad \text{o sea} \quad f(z) = \sum_0^\infty a_n z^{-n} \quad \text{respectivamente.}$$

En cada uno de estos casos el elemento $\{G, f\}$ se caracteriza por completo por la serie de potencias dada y por el radio r del círculo, en cuyo interior o exterior se considera la suma de una de las series. Tales elementos los llamaremos c i r c u l a r e s. A continuación, hablando de elementos circulares, no señalaremos ordinariamente el radio r, suponiendo que éste toma uno de los valores que corresponden a las condiciones del problema en cuestión (por ejemplo, un valor suficientemente pequeño) y que garantizan la convergencia de la serie de potencias. Demostremos que, utilizando solamente elementos circulares, se puede introducir el concepto de función analítica completa del mismo modo que se hizo anteriormente para los elementos correspondientes a recintos de forma arbitraria.

Sea K la clase de todos los elementos posibles que determinan una función analítica completa $F(z)$, y sea k la subclase de la misma que consta solamente de elementos circulares. Esta subclase (e incluso cualquiera de sus elementos) determina unívocamente toda la clase K y, por consiguiente, determina la misma función analítica completa. Esta última afirmación debe entenderse no sólo en el sentido abstracto de que, una vez dada k siempre se puede averiguar si un elemento cualquiera dado pertenece a la clase $K \subset k$ o no pertenece, sino que en el sentido de que todo elemento no circular de K (es decir, toda rama uniforme de la función $F(z)$ en cierto recinto G) puede expresarse mediante elementos de k. En efecto, los desarrollos de esta rama en series de potencias en los entornos de distintos puntos del recinto G son, evidentemente, elementos circulares de k. Representando G en forma del límite de una sucesión de recintos crecientes $\{G_n\}$ y observando que cada uno de los conjuntos cerrados $\overline{G}_1$, $\overline{G \setminus G_1}, \ldots, \overline{G_{n+1} \setminus G_n}, \ldots$, que en su conjunto cubren a G, puede a su vez cubrirse por una cantidad finita de círculos pertenecientes a G, hallamos que para la representación de la rama dada es suficiente no más que un conjunto numerable de elementos circulares. Basándose en todas estas observaciones, al definir una función analítica completa podemos considerar solamente elementos circulares.

Generalicemos el concepto de elemento circular, incluyendo para ello también aquellas series de potencias generalizadas que se obtienen al invertir las series de la forma $\sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n$ o $\sum_0^\infty a_n z^{-n}$ (véase el ap. 5.1, cap. IV). Precisando, vamos a considerar las

series siguientes:

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{\frac{n}{\nu}}, \qquad \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^{-\frac{n}{\nu}}, \tag{4.4:1}$$

donde m es entero y ν es un número natural, en los recintos de la forma $|z - z_0| < r$ y $|z| > r$, respectivamente. Diremos que un elemento de la forma (4.4:1) está escrito en f o r m a c a n ó n i c a, si $a_m \neq 0$ y las fracciones del conjunto $\left\{\frac{n}{\nu}\right\}$, escritas para aquellos valores de n para los cuales $a_n \neq 0$, no pueden simplificarse por un mismo número (mayor que la unidad). Suponiendo que el elemento está escrito en forma canónica, llamémosle n o r a m i f i c a d o si $\nu = 1$, y r a m i f i c a d o si $\nu > 1$. Al número $\nu - 1$ lo llamaremos orden de ramificación del elemento. Al punto z_0 (respectivamente, ∞) lo llamaremos c e n t r o del elemento; diremos que r es el r a d i o del elemento y que $|z - z_0| < r$ (o $|z| > r$, respectivamente) es el c í r c u l o del mismo. Un elemento no ramificado se llama r e g u l a r si $m \geqslant 0$. Los elementos no regulares se llaman i r r e g u l a r e s.

Extendamos el concepto de prolongación analítica a los elementos generalizados. Evidentemente, es suficiente extender el concepto de prolongación analítica inmediata al caso de elementos ramificados. Consideremos, para precisar, el elemento

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{\frac{n}{\nu}} \quad (|z-z_0| < r), \tag{4.4:2}$$

expresado en la forma canónica (siendo $\nu > 1$). Su suma es una función ν-forme en el círculo $|z - z_0| < r$. Para cada punto z_1 perteneciente al círculo indicado y distinto de z_0, existe un entorno $|z - z_1| < \rho$, donde $\rho = \min\{|z_1 - z_0|, r - |z_1 - z_0|\}$, en el cual la suma de la serie tiene ν ramas analíticas uniformes. Para fijar una de ellas, es suficiente fijar una de las ν ramas uniformes de la función $(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$. Diremos que las ramas uniformes del elemento (4.4:2) en los círculos $|z - z_0| < \rho$, donde $|z_1 - z_0| < r$ y $z_1 \neq z_0$, son sus e l e m e n t o s s u b o r d i n a d o s. Está claro que todos los elementos subordinados de un elemento ramificado son no ramificados y, además, regulares (en los puntos del círculo $|z - z_0| < r$, distintos del centro, la suma de la serie (4.4:2) no se hace infinita). Diremos que dos elementos de la forma (4.4:1) son la prolongación inmediata uno del otro, si tienen al menos un elemento subordinado común. Después de esto se formula naturalmente la definición de prolongación analítica para los elementos generalizados y, finalmente, se introduce el concepto de

imagen analítica, que es similar al concepto de función analítica completa. Precisando, dividamos en clases el conjunto de todos los elementos posibles de la forma (4.4:1), colocando en una misma clase a dos elementos cuando, y sólo cuando, éstos son prolongaciones analíticas uno del otro. Respecto de cada clase obtenida diremos que ésta determina una imagen analítica. Excluyendo todos los elementos de ramificación de la clase que determina la imagen analítica, resulta una clase con elementos circulares no ramificados solamente, la cual determina una función analítica completa. Por consiguiente, la imagen analítica se diferencia de la función analítica completa en que se agregan todos los elementos ramificados que son prolongaciones analíticas de los elementos de la función dada.

Así, por ejemplo, las series de potencias que representan todas las ramas uniformes posibles de la función $\sqrt[\nu]{z}$, o sea, las series de la forma

$$\sqrt[\nu]{z_0}\sum_{0}^{\infty}\binom{\frac{1}{\nu}}{n}\left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^n,$$

donde z_0 son números complejos cualesquiera, distintos de 0 y ∞, determinan una función analítica completa. Agregando al conjunto de los elementos regulares correspondientes los elementos ramificados, que se expresan por una misma serie degenerada de $z^{\frac{1}{\nu}}$ y que, no obstante, se distinguen entre sí según que se trate del entorno del punto $z = 0$ o $z \neq \infty$, obtenemos la imagen analítica, la cual expresa la función multiforme $\sqrt[\nu]{z}$ en todo el campo de su definición. De un modo similar, todas las series de potencias posibles que representan las ramas uniformes de la función Arcsen z en los entornos de los puntos $z_0 \neq \pm 1$ (sobre éstos están situados los puntos de ramificación de Arcsen z), determinan una función analítica completa. Agregando a éstas el conjunto infinito de elementos ramificados que representan Arcsen z en los entornos de los puntos ± 1 (instamos al lector a que halle estos desarrollos aplicando la fórmula Arcsen $z = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$), obtenemos la imagen analítica, la cual representa a la función multiforme Arcsen z en todo el campo de su definición. Obsérvese que en el caso de funciones meromorfas en todo el plano o de tales funciones multiformes, inversas a las meromorfas, cuyas superficies de Riemann no tienen puntos de ramificación, la función analítica completa coincide con la imagen analítica.

§ 5. PROLONGACION A LO LARGO DE UNA CURVA. TEOREMA DE MONODROMIA. ESTRELLA RECTILINEA DE UN ELEMENTO. LA IMAGEN ANALITICA COMO SUPERFICIE DE RIEMANN

5.1. Sea L: $z = \lambda(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ una curva continua y sea e: $f(z) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ $(|z - z_0| < r)$ un elemento circular regular con el centro en el punto incial de la curva dada $z_0 = \lambda(\alpha)$. Supongamos que para cierto valor del parámetro τ, $\alpha < \tau \leqslant \beta$, se puede señalar un número finito de valores intermedios del parámetro t: $t_0 = \alpha < t_1 < \ldots < t_k = \tau$ y para cada uno de éstos un elemento circular e_j: $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n^{(j)} (z - z_j)^n$, de tal modo que se cumplan las condiciones siguientes:

1) $e_0 = e$;

2) e_{j+1} es la prolongación inmediata de e_j $(j = 0, \ldots, k-1)$;

3) el centro del elemento e_j es el punto $z_j = \lambda(t_j)$ de la curva L $(j = 0, \ldots, k)$;

4) cada arco $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$ está cubierto por los círculos de los elementos e_j y e_{j+1} $(j = 0, 1, \ldots, k-1)$.

En estas condiciones, se dirá que el elemento *e se prolonga analíticamente a lo largo del arco* $L_{[\alpha, \tau]}$ *de la curva L* y que la cadena de elementos $e_0, \ldots, e_k$ realiza la prolongación analítica a lo largo del arco indicado; finalmente, el elemento $e' = e_k$ se llamará *resultado de la prolongación del elemento e a lo largo de este arco.*

De la definición se deduce que si la cadena $e_0, e_1, \ldots, e_n$ realiza la prolongación del elemento e_0 a lo largo del arco $z = \lambda(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \tau)$, entonces la cadena de elementos $e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1, e_0$ realiza la prolongación del elemento e_n a lo largo del mismo arco, pero recorrido en sentido contrario, siendo el resultado de la prolongación el elemento inicial e_0.

Obsérvese que toda prolongación analítica se puede considerar como la prolongación a lo largo de cierta curva. Precisando, si el elemento e' es la prolongación del elemento e_0 y $e_0, e_1, \ldots, e_k = e'$ es una cadena de elementos que liga e_0 con e', entonces, uniendo con segmentos rectilíneos los centros de los círculos de cada par de elementos vecinos, resulta una poligonal Λ, a lo largo de la cual la cadena dada realiza la prolongación analítica del elemento e_0.

La introducción del concepto de prolongación a lo largo del arco de una curva tiene su justificación en el siguiente teorema:

Teorema 1. *El resultado de la prolongación analítica de un elemento e a lo largo de un arco dado* $[\alpha, \tau]$ *de la curva L no depende de la cadena de elementos que realizan esta prolongación.*

D e m o s t r a c i ó n. Sean $e_0, e_1, \ldots, e_k$ y $e'_0, e'_1, \ldots, e'_k$ dos cadenas de elementos que realizan la prolongación de un mismo elemento $e = e_0 = e'_0$ a lo largo de un arco $L_{[\alpha, \tau]}$ de la curva L. Las sumas de las series de potencias, correspondientes a los elementos de una y otra cadena, determinan en este arco dos funciones analíticas $f(z)$ y $\varphi(z)$, por lo general, multiformes. Ahora bien, considerándolas como funciones del parámetro t, éstas son uniformes. En efecto, supongamos que $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$. Entonces $z = \lambda(t)$ pertenece al arco que está cubierto por los círculos de los elementos e_j y e_{j+1}. Si este punto pertenece solamente a uno de estos dos círculos, por ejemplo, al círculo e_j, entonces $f(z)$ se determina como la suma de la serie del elemento e_j. Si el punto pertenece a la parte común de los dos círculos, entonces para determinar $f(z)$ se puede tomar cualquiera de las dos series posibles, pues ambas sumas tienen que coincidir en esta parte. Así, pues, cuando el punto z en la curva se toma junto con su valor correspondiente del parámetro t, el valor de la función $f(z)$ se determina de un modo único. La multiformidad de esta función se debe a que un mismo punto de la curva L puede corresponder a distintos valores de t y, por consiguiente, puede pertenecer a arcos que están cubiertos por pares distintos de círculos de elementos vecinos de la cadena.

En los puntos de la parte inicial del arco L, comenzando desde el punto z_0 hasta el primer punto de intersección de L con la circunferencia $|z - z_0| = r$ que limita al círculo del elemento e, ambas funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ coinciden. Sea T, $\alpha < T \leqslant \tau$, el extremo superior de aquellos valores del parámetro que, para cada t', $\alpha \leqslant t' < T$, los valores de las funciones $f(z) = f\lambda(t)$ y $\varphi(z) = \varphi\lambda(t)$ coinciden en el arco $L_{[\alpha, t']}$.

Supongamos primero que $T < \tau$; entonces existen unos números u y u' tales que $t_u \leqslant T \leqslant t_{u+1}$ y $t'_{u'} \leqslant T \leqslant t'_{u'+1}$, de modo que $Z = \lambda(T)$ está situado en el arco que está cubierto por los círculos de los elementos e_u y e_{u+1} de una cadena y, a la vez, está situado en el arco que está cubierto por los círculos de los elementos $e'_{u'}$ y $e'_{u'+1}$ de otra cadena. Supongamos, para precisar, que $Z = \lambda(T)$ está situado en el círculo del elemento e_u de la primera cadena y en el círculo del elemento $e'_{u'+1} = e'_v$ de la segunda cadena. Entonces $f(z) = f\lambda(t)$ se expresa en un entorno del punto $Z = \lambda(T)$ por la serie $\sum\limits_0^\infty \alpha_n (z - Z)^n$, que está subordinada a la serie $\sum\limits_0^\infty a_n^{(u)} (z - z_u)^n$, y la función $\varphi(z) = \varphi\lambda(t)$, por la serie $\sum\limits_0^\infty \alpha'_n (z - Z)^n$, que está subordinada a la serie $\sum\limits_0^\infty a_n'^{(v)} (z - z_v)^n$. Como los valores de las funciones $f\lambda(t)$ y $\varphi\lambda(t)$, según la hipótesis: coinciden para todos

los valores de t: $\alpha \leqslant t < T$, resulta, en virtud del teorema de unicidad, aplicado a las series $\sum_0^\infty \alpha_n (z - Z)^n$ y $\sum_0^\infty \alpha'_n (z - Z)^n$, que estas series son idénticas y, por consiguiente, los valores de las funciones $f\lambda(t)$ y $\varphi\lambda(t)$ coinciden en cierto entorno del punto T, lo cual contradice a la definición del punto T como el extremo superior.

De aquí se deduce que $T = \tau$, y luego, aplicando el razonamiento que acabamos de exponer a las series

$$\sum_0^\infty a_n^{(h)} (z-\zeta)^n \quad \text{y} \quad \sum_0^\infty a_n^{'(k')} (z-\zeta)^n, \quad \text{donde} \quad \zeta = \lambda(\tau),$$

deducimos que estas series son idénticas. Pero las series indicadas representan los elementos e_k y $e_{k'}$; por consiguiente, el teorema de la coincidencia de estos elementos queda demostrado *).

Otra propiedad importante de la prolongación a lo largo de una curva, que se puede considerar como una generalización de la propiedad que acabamos de demostrar, consiste en que el arco, a lo largo del cual se efectúa la prolongación, se puede cambiar entre ciertos límites, sustituyéndolo por arcos de otras curvas que tengan el mismo origen y extremo, sin que por eso varíe el resultado de la prolongación.

Antes de dar el enunciado exacto y demostrar esta proposición, demostremos el siguiente lema:

L e m a. *Sea e un elemento arbitrario y supongamos que l es una curva continua $z = \lambda(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ perteneciente al círculo K de este elemento. Entonces el elemento ε_0 con el centro en el punto inicial z_0 de la curva l, es prolongable a lo largo de l y el resultado de la prolongación es un elemento ε' con el centro en el punto final z' de la curva l, que también está subordinado a e.*

Sea $\rho > 0$ la distancia desde l hasta la frontera del círculo K (si esta distancia es igual a ∞, hacemos $\rho = 1$). Dividamos el segmento $[\alpha, \beta]$ por los puntos $t_0 = \alpha < t_1 < \ldots < t_k = \beta$ en partes tan pequeñas que cada arco $l_{[t_j, t_{j+1}]}$ quede contenido en el círculo $|z - z_j| < \rho$, donde $z_j = \lambda(t_j)$; ahora se cumplen las condiciones $|z_{j+1} - z_j| < \rho$. Entonces cada círculo $|z - z_j| < \rho$ estará contenido en K y contendrá dentro de sí mismo al arco $l_{[t_j, t_{j+1}]}$. En cada uno de estos círculos la suma de la serie que expresa a e puede desarrollarse en serie de potencias de $z - z_j$. La última serie determina el elemento ε_j que tiene el centro en z_j y está subordinado al elemento e. Como el centro z_{j+1} del elemento ε_{j+1} está contenido

*) Las diferencias posibles entre los radios de los círculos de los elementos e_k y $e'_{k'}$ no se tienen en cuenta.

en el círculo del elemento e_j ($j = 0, 1, \ldots, k-1$) y en un entorno del punto z_{j+1} las series ε_{j+1} y ε_j representan una misma función analítica uniforme (precisamente la suma de la serie del elemento e), resulta que ε_{j+1} es la prolongación inmediata del elemento ε_j y, por consiguiente, $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ forman una cadena de elementos que une el elemento $\varepsilon_0 = e_0$, que tiene el centro z_0 y está subordinado al elemento e, con el elemento $\varepsilon_k = e'$ que tiene el centro z' y también está subordinado al elemento e. Esta cadena realiza la prolongación del elemento e_0 a lo largo de l, puesto que

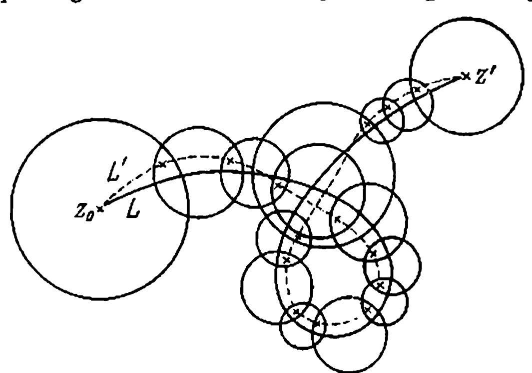


FIG. 70.

los centros $z_j = \lambda(t_j)$ de los círculos de los elementos de la cadena están todos en l y el arco $l_{[t_j, t_{j+1}]}$ se cubre con los círculos de los dos elementos vecinos ε_j y ε_{j+1} (e incluso con el círculo del solo elemento ε_j). Con esto se termina la demostración del lema.

T e o r e m a 2. *Supongamos que la cadena de elementos $e_0, e_1, \ldots, e_n = e'$ realiza una prolongación del elemento e_0 a lo largo de una curva continua L: $z = \lambda(t)$ ($\alpha \leqslant t \leqslant \beta$) y sea también L': $z = \mu(t')$ ($\alpha' \leqslant t' \leqslant \beta'$) una curva continua con el origen z_0 y el extremo z' en L y tal, que para cierta subdivisión del segmento $[\alpha', \beta']$*

$$t'_0 = \alpha' < t'_1 < \ldots < t'_n < t'_{n+1} = \beta'$$

cada punto $z'_j = \mu(t'_j)$ (excluyendo el origen y el extremo de la curva L') es común para los círculos de los elementos e_{j-1} y e_j y cada arco $L'_{[t'_j, t'_{j+1}]}$ de la curva L' está contenido en el círculo del elemento e_j ($j = 0, 1, \ldots, n$) (fig. 70).

En estas condiciones, el elemento e_0 puede prolongarse a lo largo de L' y el resultado de la prolongación es el mismo elemento e'.

D e m o s t r a c i ó n. Consideremos los elementos e'_j, que tienen los centros z'_j y están subordinados a los elementos correspondientes e_j. Como z'_{j+1} está contenido en el círculo del elemento e_j y e_{j+1} es la prolongación inmediata del elemento e_j, se puede elegir e'_{j+1} de tal manera que éste también esté subordinado al elemento e_j ($j = 0, 1, \ldots, n$).

Apliquemos el lema al elemento e_j y a la curva $L'_{[t'_j, t'_{j+1}]}$, contenida en el círculo de este elemento. Hallemos la cadena de elementos $\varepsilon_0^{(j)} = e'_j$, $\varepsilon_1^{(j)}$, $\ldots$, $\varepsilon_{k_j}^{(j)} = e'_{j+1}$ que realiza la prolongación del elemento e'_j a lo largo de $L'_{[t'_j, t'_{j+1}]}$. El resultado de la prolongación es e'_{j+1}. Pero de aquí se deduce que la cadena de elementos

$$\varepsilon_0^{(0)} = e'_0 = e_0, \quad \varepsilon_1^{(0)}, \; \ldots, \; \varepsilon_{k_0}^{(0)} = e'_1 = \varepsilon_0^{(1)},$$

$$\varepsilon_1^{(1)}, \; \ldots, \; \varepsilon_{k_1}^{(1)} = e'_2 = \varepsilon_0^{(2)}, \; \ldots, \; \varepsilon_1^{(n)}, \; \ldots, \; \varepsilon_{k_n}^{(n)} = e'_n = e'$$

realiza la prolongación del elemento e_0 a lo largo de L', y el resultado de la prolongación es e', con lo cual se termina la demostración.

Señalemos el caso particular del teorema en que L es un segmento de una recta que une dos puntos z_0 y z'. Si la cadena de elementos e_0, e_1, $\ldots$, e_n realiza la prolongación del elemento e_0 a lo largo de L, entonces siempre se puede indicar un entorno del punto z' tal, que para cualquier punto ζ de este entorno la poligonal de dos lados L', compuesta del segmento de la recta que une z_0 con ζ y del segmento que une ζ con z', satisface a las condiciones del teorema 2 (fig. 71). De aquí se deduce que si el elemento e_0 es prolongable analíticamente a lo largo del segmento rectilíneo $[z_0, z_1]$, entonces z_1 posee un entorno tal, que para cada punto ζ perteneciente a este entorno la prolongación analítica del elemento e_0 a lo largo de $[z_0, \zeta]$ también es posible y, además, la prolongación a lo largo de la poligonal con los vértices z_0, ζ y z_1 da el mismo resultado que la prolongación a lo largo de $[z_0, z_1]$.

5.2. Este apartado lo dedicamos a la demostración de un teorema importantísimo de la teoría de las funciones.

T e o r e m a d e m o n o d r o m i a. *Si un elemento e_0 es prolongable analíticamente a lo largo de cualquier curva continua perteneciente a un recinto simplemente conexo dado G, entonces la función $f(z)$ determinada en este recinto por todos los elementos que se obtienen en las prolongaciones indicadas, es uniforme.*

D e m o s t r a c i ó n. Demostraremos el teorema por el método de reducción a lo absurdo. Supongamos que $f(z)$ no es uniforme en el recinto G. Entonces, en cierto punto $z_1 \in G$ ésta tiene al menos dos valores distintos y, por consiguiente, existen al menos dos elementos distintos e'_1 y e''_1, con el centro z_1, que son los resultados de la

prolongación del elemento e_0 a lo largo de dos curvas L_1 y L_2 que están situadas en el recinto G y unen el punto z_0 (el centro del elemento e_0) con el punto z_1. Supongamos que, prolongando e_0 a lo largo de L_1, se obtiene en el punto z_1 el elemento e_1', y a lo largo de L_2, se obtiene en el mismo punto el elemento e_1''. Entonces, prolongando e_1' a lo largo de L_2 hasta el punto z_0 tiene que resultar un elemento e_0' distinto de e_0.

En efecto, si resultase el elemento e_0, entonces la prolongación de éste a lo largo de L_2 en el sentido directo daría e_1', a pesar de que

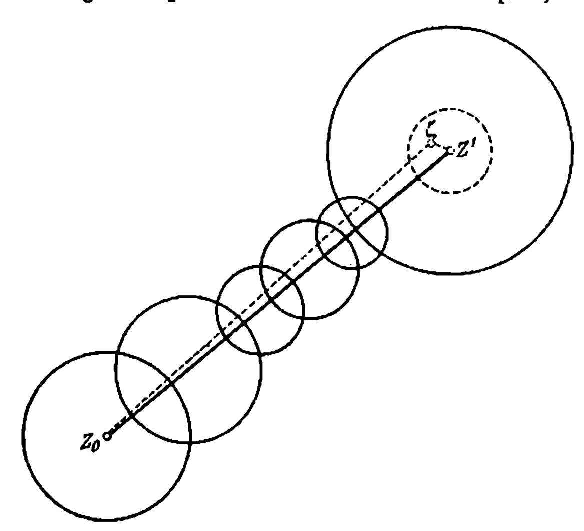


FIG. 71.

se había supuesto que el resultado de esta prolongación es el elemento e_1'' distinto de e_1'. En resumen, negar la justeza del teorema equivale a admitir la existencia de una curva continua cerrada L, perteneciente al recinto G ($L = L_1 \cup L_2^-$), tal que la prolongación del elemento e_0 a lo largo de L da un elemento e_0' distinto de e_0. Comprobemos de que en esta afirmación la curva L se puede sustituir por una poligonal. En efecto, teniendo alguna cadena de elementos que realice la prolongación analítica a lo largo de L, podemos sustituir esta cadena por una nueva, introduciendo para ello elementos subordinados, de tal modo que las cuerdas de la curva L que unen los centros de los elementos vecinos sean más cortas que la distancia desde L hasta la frontera del recinto G. La poligonal Λ formada por estas cuerdas está situada en el recinto G, y la cadena

construida realiza una prolongación del elemento e_0 a lo largo de Λ, resultando el elemento e_0' distinto de e_0.

Razonando igual que en la demostración del teorema integral de Cauchy (ap. 2.3, cap. III), se demuestra que Λ se puede sustituir primero por una poligonal sin autointersecciones, y después por un circuito triangular Λ perteneciente al recinto G.

En efecto, recorramos sucesivamente los lados de la poligonal Λ, comenzando desde el punto z_0, hasta que un nuevo lado encuentre por primera vez uno de los lados ya recorridos en cierto punto z_1. Llamemos Λ_1 a la poligonal cerrada que se obtiene al recorrer Λ, comenzando desde z_1 hasta que se vuelve a llegar por primera vez a este punto; está claro que Λ_1 no posee autointersecciones. Sea e_1 el resultado de la prolongación del elemento e_0 a lo largo de la parte de la poligonal Λ, desde z_0 hasta el primer paso por z_1. Si en la prolongación del elemento e_1 a lo largo de Λ_1, al volver al punto z_1 resulta un elemento e_1' distinto de e_1, entonces en los razonamientos ulteriores Λ se sustituye por la poligonal Λ_1. Si como resultado de la prolongación del elemento e_1 a lo largo de Λ_1 resulta el mismo elemento e_1, entonces se excluye Λ_1 de Λ; queda una poligonal $\Lambda \setminus \Lambda_1$ con una autointersección menos que Λ y tal que al prolongar el elemento e_0 a lo largo de $\Lambda \setminus \Lambda_1$ resulta un elemento e_0' distinto de e_0.

Continuando este razonamiento, después de una cantidad finita de pasos obtendremos una poligonal cerrada Λ', situada en el interior de G, sin autointersecciones, y tal, que al prolongar a lo largo de Λ' un elemento e' (el cual, a su vez, es el resultado de la prolongación del elemento e_0 en el interior de G) resulta un elemento distinto de e'. Obsérvese que si en el proceso de liberación de la poligonal Λ de las autointersecciones nos encontramos con lados que se recorren doblemente, en sentidos opuestos entre sí, entonces cada uno de estos lados se puede despreciar inmediatamente, puesto que la prolongación a lo largo de éste no altera al elemento que se prolonga.

Una vez obtenido el polígono, limitado por la poligonal Λ', lo dividimos primero en polígonos convexos, y después cada uno de éstos lo dividimos en triángulos.

Sea δ uno de los lados de estos triángulos, no situado en Λ' y sean ζ_0 y ζ' el origen y extremo, respectivamente (ζ_0 y ζ' están situados en Λ' y ζ_0 precede a ζ' al recorrer Λ' en el sentido elegido).

Si el elemento ε_0 es el resultado de la prolongación del elemento e' a lo largo de Λ' desde el punto inicial z' hasta ζ_0, entonces, prolongándolo luego, por una parte, a lo largo de δ y, por otra parte, a lo largo de la parte de la poligonal Λ' desde ζ_0 hasta ζ', obtenemos en el punto ζ' dos elementos, respectivamente: ε' y ε''. Estos también pueden coincidir, entonces la parte de la poligonal Λ' desde ζ_0 hasta ζ' se puede despreciar, sustituyéndola por el segmento δ.

Obtenemos una nueva poligonal cerrada Λ'', compuesta de una cantidad menor de triángulos que Λ; además, prolongando el elemento e' a lo largo de Λ'' resulta un elemento distinto de e'. Si ε'' no coincide con ε', entonces formamos una poligonal cerrada Λ''' con la parte de la poligonal Λ' comprendida entre los puntos ζ_0 y ζ' y el segmento δ, recorrido en dirección desde ζ' hacia ζ_0. Al prolongar el elemento ε_0 a lo largo de Λ''' tiene que resultar un elemento distinto de ε_0.

Repitiendo semejantes razonamientos, disminuyamos cada vez la cantidad de triángulos en que se divide la parte interior al circuito considerado y, después de un número finito de pasos, obtenemos un triángulo Δ perteneciente a G, tal que al prolongar a lo largo del mismo un elemento ε con el centro en uno de los vértices ζ de este triángulo (aquí ε es el resultado de la prolongación del elemento e_0 a lo largo de una curva situada en el recinto G), resulta un elemento distinto de ε.

La mediana del lado opuesto a ζ divide a Δ en dos triángulos; al menos uno de éstos, Δ_1, posee la misma propiedad que Δ, es decir, al prolongar el elemento ε a lo largo de Δ_1, resulta un elemento distinto de ε. Trazando en Δ_1 la mediana del lado opuesto a ζ, resulta un nuevo triángulo Δ_2 que posee las propiedades de los triángulos Δ y Δ_1. Repitiendo este proceso, construimos una sucesión de triángulos encajados $\{\Delta_n\}$ con el vértice común ζ; sus lados opuestos están situados en un lado del triángulo Δ y, evidentemente, se contraen hacia cierto punto η de este lado.

Pero, como ya sabemos (véase el final del precedente apartado), el punto η posee un entorno U tal, que para cualquier punto $z \in U$, al prolongar el elemento ε a lo largo de la poligonal $\zeta z\eta$, resulta el mismo elemento $\tilde{\varepsilon}$ que al prolongarlo a lo largo del segmento $\zeta\eta$. Sean η_n' y η_n'' los vértices del triángulo Δ_n que pertenecen a este entorno (se supone que n es suficientemente grande). Entonces, sin alterar el resultado, se puede sustituir la prolongación a lo largo de Δ_n por las siguientes prolongaciones: a) del elemento ε a lo largo de $\zeta\eta_n'\eta$, resultando el elemento $\tilde{\varepsilon}$, b) del elemento $\tilde{\varepsilon}$ a lo largo de $\eta\eta_n''\zeta$, lo cual equivale a prolongar $\tilde{\varepsilon}$ a lo largo de $\eta\zeta$, resultando de nuevo, evidentemente, ε. Así, pues, al prolongar el elemento ε a lo largo de Δ_n tiene que resultar de nuevo ε, en contra de la propiedad del triángulo Δ_n que se deduce de su construcción. Con la contradicción obtenida se termina la demostración del teorema de monodromia.

5.3. En este apartado nos ocuparemos de la prolongación de un elemento dado e_0 con el centro en z_0 sobre distintos rayos rectilíneos que parten del punto z_0. Está claro que en cada rayo existe una parte inicial, a lo largo de la cual la prolongación es posible.

Su longitud no es menor que el radio del elemento e_0. Si mediante la prolongación del elemento e_0 a lo largo del rayo dado no se puede alcanzar un punto arbitrario de este rayo, entonces en el rayo tiene que haber algún punto z_1, distinto de z_0, tal que la prolongación del elemento e_0 es posible a lo largo del segmento del rayo, comenzando desde z_0 y hasta cualquier punto del intervalo (z_0, z_1), y es imposible a lo largo de todo el segmento $[z_0, z_1]$.

Señalemos en cada rayo que parta del punto z_0 el punto correspondiente z_1, haciendo $z_1 = \infty$ si la prolongación es posible a lo

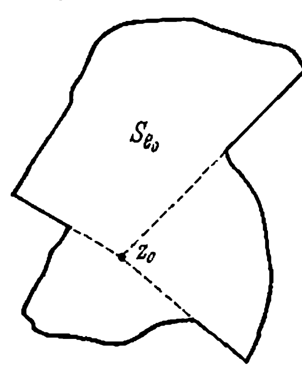


FIG. 72.

largo de todo el rayo, y consideremos el conjunto de puntos pertenecientes a todos los semiintervalos posibles (z_0, z_1). Este conjunto S_{e_0} se llama **estrella rectilínea del elemento** e_0. Este contiene todos los puntos del plano que se pueden alcanzar prolongando analíticamente el elemento e_0 a lo largo de todos los segmentos rectilíneos posibles con el origen común en el punto z_0. Fácilmente se comprueba que S_{e_0} es un recinto. En efecto, z_0 es un punto interior del conjunto S_{e_0}, pues todo el círculo del elemento e_0 está contenido en S_{e_0}. Si $z_1 \neq z_0$ y $z_1 \in S_{e_0}$, entonces, como ya se había señalado en el ap. 5.1, el punto z_1 posee un entorno U tal, que el elemento e_0 se puede prolongar analíticamente a lo largo de cualquier segmento $[z_0, \zeta]$, donde $\zeta \in U$. Por consiguiente, $U \subset S_{e_0}$ y S_{e_0} es un conjunto abierto. Inmediatamente se demuestra que el conjunto S_{e_0} es conexo, pues dos puntos cualesquiera z_1 y z_2, pertenecientes a S_{e_0}, pueden unirse en S_{e_0} mediante una poligonal compuesta de dos lados: $[z_1, z_0]$ y $[z_0, z_2]$.

En la fig. 72 está representado un recinto del tipo S_{e_0}. Obsérvese que el recinto S_{e_0} siempre es simplemente conexo. En efecto, supongamos que en el interior de una curva cerrada de Jordan γ, situada

en S_{e_0}, hay un punto ζ no perteneciente a S_{e_0}. Tracemos por z_0 un rayo que pase por ζ. Este rayo encontrará a la curva γ en un punto z_1 tal, que $\zeta \in [z_0, z_1]$. Según la definición del conjunto S_{e_0} el segmento $[z_0, z_1]$ está contenido en este recinto; por consiguiente, también $\zeta \in [z_0, z_1]$ está contenido en el mismo, en contra de la hipótesis.

Así, pues, la estrella rectilínea es un recinto simplemente conexo.

Sea $z_1 \neq z_0$ un punto arbitrario de S_{e_0} y sea e_1 el elemento con el centro z_1, representado por la serie $\sum\limits_0^\infty a_n (z - z_1)^n$, y que se obtiene al prolongar el elemento e_0 a lo largo del segmento rectilíneo $[z_0, z_1]$. Haciendo $f(z_1) = a_0$, se define $f(z)$ como función uniforme en todo el recinto S_{e_0}. Demostremos que esta función es analítica en el recinto dado. En efecto, para el punto z_1 existe un entorno U, perteneciente a S_{e_0}, tal que, para cualquier punto $\zeta \in U$, al prolongar el elemento e_0 a lo largo de la poligonal $z_0\zeta z_1$, resulta el mismo elemento e_1. De aquí se deduce que al prolongar el elemento e_1 a lo largo del segmento $[z_1, \zeta]$ resulta el mismo elemento ε con el centro ζ: $\sum\limits_0^\infty \alpha_n (z - \zeta)^n$ que al prolongar el elemento e_0 a lo largo del segmento $[z_0, \zeta]$. Pero si el entorno U y, por consiguiente, también el punto ζ, pertenece al círculo de convergencia del elemento e_1, entonces el resultado de la prolongación del elemento e_1 a lo largo de $[z_1, \zeta]$ tiene que ser un elemento con el centro ζ que está subordinado a e_1. Por consiguiente, ε es un elemento subordinado a e_1, y el valor $f(\zeta) = \alpha_0$ del término independiente de la serie que representa al elemento ε, coincide con el valor de la suma de la serie $\sum\limits_0^\infty a_n (z - z_1)^n$ en el punto $z = \zeta$. Así, pues, hemos demostrado que

$$f(\zeta) = \sum_0^\infty a_n (\zeta - z_1)^n$$

en todos los puntos de cierto entorno del punto $z_1 \in S_{e_0}$, de donde se deduce que la función $f(z)$ es analítica en este entorno, y luego, como z_1 es un punto arbitrario del recinto, resulta que $f(z)$ es analítica en todo el recinto S_{e_0}.

En resumen, prolongando el elemento e_0 a lo largo de todos los rayos posibles que parten de z_0, resulta una función uniforme y analítica $f(z)$ en la estrella S_{e_0} del elemento dado.

Demostremos que esta función se puede expresar en forma de una serie de polinomios uniformemente convergente en el interior de S_{e_0}. Por consiguiente, quedará resuelto (al menos teóricamente) el pro-

blema de la prolongación analítica del elemento e_0 a lo largo de los rayos que parten del centro del elemento.

Sea F un conjunto acotado y cerrado de puntos de S_{e_0}. Exigiremos que para cada punto $z \in F$ pertenezcan también a este mismo conjunto F todos los puntos del segmento rectilíneo $[z_0, z]$; siempre se puede satisfacer a esta condición completando el conjunto dado inicialmente con los puntos de todos los segmentos rectilíneos posibles que unan F con z_0. Sea L una curva cerrada y rectificable de Jordan, perteneciente a S_{e_0}, que contenga en su interior a F (siempre se puede hallar tal curva, utilizando una sucesión creciente de recintos simplemente conexos, construidos con cuadrados y que aproximen a S_{e_0} por el interior; se puede tomar por L la frontera de uno de tales recintos). Para cualquier punto $z \in F$ la función se puede expresar por la integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \cdot \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z_0}. \qquad (5.3:1)$$

Obtendremos el resultado pedido desarrollando $\dfrac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}$ en una serie de polinomios, integrando esta serie término a término y observando que para calcular los coeficientes de la serie hallada sólo se necesitan conocer los coeficientes de Taylor de la función $f(z)$ en el punto z_0, es decir, se necesitan conocer los coeficientes de la serie de potencias que representa al elemento dado e_0.

Estudiemos el conjunto de puntos $E(F, L)$ que describe el punto $w = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$ cuando z recorre todo el conjunto F y ζ recorre toda la curva L. Comprobemos que éste es un conjunto acotado y cerrado. En efecto, si $\delta > 0$ es la distancia desde el punto z_0 hasta la curva L y $M = \sup_{z \in F} |z - z_0|$, entonces $|w| \leqslant \frac{M}{\delta}$. Por otra parte, si w' es un punto de acumulación para $w_n = \frac{z_n - z_0}{\zeta_n - z_0}$, entonces, pasando a subsucesiones, podemos exigir que $\{z_n\}$ y $\{\zeta_n\}$ sean convergentes. Como los conjuntos F y L son cerrados, se tiene:

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z' \in F, \quad \lim_{n \to \infty} \zeta_n = \zeta' \in L,$$

de donde

$$w' = \lim_{n \to \infty} w_n = \lim_{n \to \infty} \frac{z_n - z_0}{\zeta_n - z_0} = \frac{z' - z_0}{\zeta' - z_0} \in E(F, L),$$

o sea, el conjunto considerado también es cerrado. Señalemos que éste no contiene ningún número real positivo $u \geqslant 1$. Esto es consecuencia de que $w = \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$ puede tomar valores reales positivos

sólo cuando z y ζ están situados en un rayo que parta del punto z_0. Pero en este caso, el punto ζ, no perteneciente a F, no puede estar situado entre z_0 y z, por consiguiente, $w = \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} < 1$.

Consideremos la función $\frac{1}{1-w}$ en el recinto simplemente conexo G, cuya frontera es la parte del eje real: $u \geqslant 1$, $v = 0$. Como esta función es uniforme y analítica en el recinto G, según el teorema de Runge ésta puede desarrollarse en una serie de polinomios, uniformemente convergente en el interior de G:

$$\frac{1}{1-w} = \sum_0^\infty P_n(w), \quad \text{donde} \quad P_n(w) = c_0^{(n)} + c_1^{(n)}w + \ldots + c_{k_n}^{(n)}w^{k_n}. \tag{5.3:2}$$

Sustituyendo aquí w por $\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$ y observando que si $z \in F$ y $\zeta \in L$ el punto $\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}$ está contenido en el conjunto acotado y cerrado de puntos $E(F, L)$, perteneciente a G, deducimos que la serie (5.3:2) es uniformemente convergente. Poniendo esta serie en lugar de $\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$ en la fórmula (5.3:1) e integrando término a término, obtenemos:

$$f(z) = \sum_0^\infty \left[c_0^{(n)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} d\zeta + c_1^{(n)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^2} d\zeta\,(z-z_0) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + c_{k_n}^{(n)} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k_n+1}} d\zeta\,(z-z_0)^{k_n}\right]$$

o bien

$$f(z) = \sum_0^\infty \left[c_0^{(n)} f(z_0) + c_1^{(n)} \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + c_{k_n}^{(n)} \frac{f^{(k_n)}(z_0)}{k_n!}(z-z_0)^{k_n}\right]. \tag{5.3:3}$$

Hemos obtenido el desarrollo de la función $f(z)$ en una serie de polinomios, que es uniformemente convergente en el conjunto F y, como F es arbitrario, en el interior de S_{e_0}. Los coeficientes $c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, \ldots, c_{k_n}^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ no dependen de $f(z)$ y pueden calcularse una vez para siempre. Además de ellos en la fórmula figuran los coeficientes $\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$, o sea, los coeficientes de la serie de potencias que determina el elemento e_0. El desarrollo ob-

tenido (éste se llama desarrollo de Mittag—Leffler) resuelve, evidentemente, el problema de la prolongación del elemento a lo largo de rayos rectilíneos.

5.4. Construyamos en forma explícita la sucesión de polinomios $\{P_n(w)\}$ que converge hacia $(1-w)^{-1}$ en el recinto G, cuya frontera es la semirrecta $w = u \geqslant 1$, y hallemos una cota para la aproximación de estos polinomios. Vamos a seguir aquí el método propuesto por P. Painlevé *).

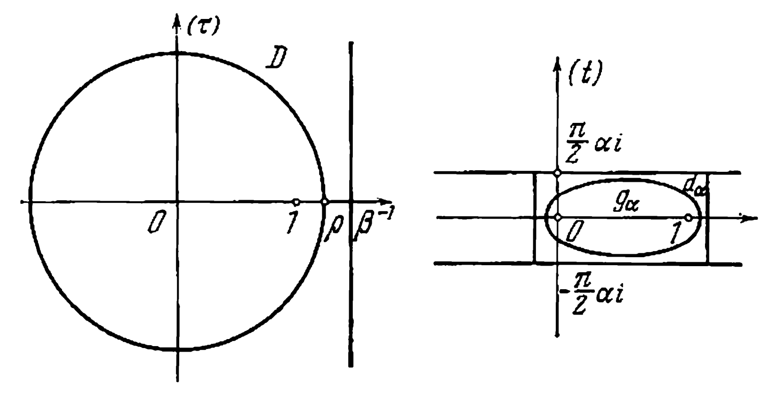


FIG. 73.

Sea $\alpha > 0$ un parámetro, que a continuación va a tomar valores arbitrariamente pequeños. Hagamos $\gamma = \exp(-\alpha^{-1})$, $\beta = 1 - \gamma$ y consideremos la transformación

$$t = \varphi(\tau) = -\alpha \ln(1-\beta\tau) \qquad (\varphi(0) = 0) \qquad (5.4:1)$$

del semiplano D: $\operatorname{Re} \tau < \beta^{-1}$ en la franja Δ: $|\operatorname{Im} t| < \frac{1}{2}\pi\alpha$ (fig. 73); obsérvese que $\varphi(1) = 1$.

El recinto D contiene al círculo cerrado $|\tau| \leqslant \rho = 1 + \frac{1}{2}\gamma$, pues $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{1-\gamma} > 1 + \gamma > \rho$. La transformación (5.4:1) hace corresponder a este círculo un recinto cerrado g_α que pertenece a Δ y contiene en su interior al segmento del eje real $0 \leqslant t \leqslant 1$. Está claro que para todos los puntos de g_α se cumplen las desigualdades:

$$-\alpha \ln(1+\beta\rho) \leqslant \operatorname{Re} t \leqslant \alpha \ln(1-\beta\rho).$$

Pero $-\alpha \ln(1-\beta\rho) = -\alpha \ln\left[\frac{1}{2}\gamma(1+\gamma)\right] = 1 + \alpha \ln 2 - \alpha \ln(1+\gamma) < 1 + \alpha \ln 2$ y $-\alpha \ln(1+\beta\rho) > -\alpha \ln 2$ (puesto que $\beta\rho < 1$). De aquí se deduce

*) Véase la nota de P. Painlevé en el apéndice al libro: E. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, 2 éd., Paris, 1928, págs. 101—148.

que el recinto g_α está contenido en el rectángulo d_α:

$$-\alpha \ln 2 < \operatorname{Re} t < 1+\alpha \ln 2, \ |\operatorname{Im} t| < \frac{\pi}{2}\alpha,$$

el cual para $\alpha \to 0$ se contrae hacia el segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Supongamos ahora que $f(t)$ es una función analítica y acotada en valor absoluto en g_α: $|f(t)| \leqslant M$. Haciendo $t = \varphi(\tau)$, obtenemos una función $f\varphi(\tau)$, analítica y acotada en valor absoluto por la misma constante en el círculo $|\tau| \leqslant \rho$. Para ésta se tiene el desarrollo

$$f\varphi(\tau) = \sum_0^\infty A_q(f)\,\tau^q, \tag{5.4:2}$$

de donde

$$f(1) = f\varphi(1) = \sum_0^\infty A_q(f). \tag{5.4:2'}$$

Además

$$\left| f(1) - \sum_0^\nu A_q(f) \right| \leqslant \sum_{\nu+1}^\infty |A_q(f)| \leqslant M \sum_{\nu+1}^\infty \rho^{-q} = M(\rho-1)^{-1}\rho^{-\nu} =$$
$$= 2M\gamma^{-1}\left(1+\frac{1}{2}\gamma\right)^{-\nu}. \tag{5.4:3}$$

Para calcular $A_q(f)$ observamos que en un entorno del punto $t=0$

$$f(t) = \sum_0^\infty \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, t^k$$

y, por consiguiente,

$$f\varphi(\tau) = f(0) + \sum_1^\infty \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\,\alpha^k [-\ln(1-\beta\tau)]^k.$$

Hagamos

$$(-1)^k [\ln(1-\beta\tau)]^k = \beta^k\tau^k k! \left[\frac{E_k^{(k)}}{k!} + \frac{E_{k+1}^{(k)}}{(k+1)!}\beta\tau + \frac{E_{k+2}^{(k)}}{(k+2)!}\beta^2\tau^2 + \ldots\right],$$

donde $E_{k+j}^{(j)}$ son unos coeficientes numéricos que no dependen ni de $f(t)$ ni de α. Poniendo en el desarrollo de $f\varphi(\tau)$, resulta la serie de potencias:

$$f\varphi(\tau) = f(0) + \sum_1^\infty \frac{(\beta\tau)^q}{q!}[E_q^{(q)}\alpha^q f^{(q)}(0) + E_q^{(q-1)}\alpha^{(q-1)} f^{q-1}(0) + \ldots + E_q^{(1)}\alpha f'(0)].$$

Comparando con (5.4:2), hallamos:

$$A_0(f) = f(0), \quad A_q(f) = \frac{\beta^q}{q!}\sum_{j=1}^q E_q^j \alpha^j f^j(0) \qquad (q \geqslant 1). \tag{5.4:4}$$

Para hallar $E_q^{(j)}$ hacemos $f(t) = e^t$; entonces

$$f\varphi(\tau) = \exp[-\alpha\ln(1-\beta\tau)] = (1-\beta\tau)^{-\alpha} = \sum_0^\infty \frac{(\beta\tau)^q}{q!}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+q-1).$$

Por consiguiente,

$$A_q(e^t) = \frac{\beta^q}{q!}\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+q-1);$$

como en el caso dado $f^{(j)}(0)=1$, por la fórmula (5.4:4) hallamos:

$$A_q(e^t) = \frac{\beta^q}{q!}\sum_{j=1}^{q} E_q^{(j)}\alpha^j \qquad (q \geqslant 1).$$

Comparando las dos expresiones de $A_q(e^t)$ sacamos la conclusión de que los números $E_q^{(j)}$ son los coeficientes de α^j en el desarrollo del polinomio $\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+q-1)$. Esto permite escribir $A_q(f)$ en el caso general en forma del siguiente producto simbólico:

$$A_q(f) = \frac{\beta^q}{q!}\alpha f'(\alpha f'+1)(\alpha f'+2)\dots(\alpha f'+q-1), \quad q \geqslant 1. \qquad (5.4:4')$$

Apliquemos los resultados obtenidos a la aproximación de la función $(1-w)^{-1}$. Construyamos primero para cada $n \geqslant 1$ el recinto G_n (fig. 74); sus

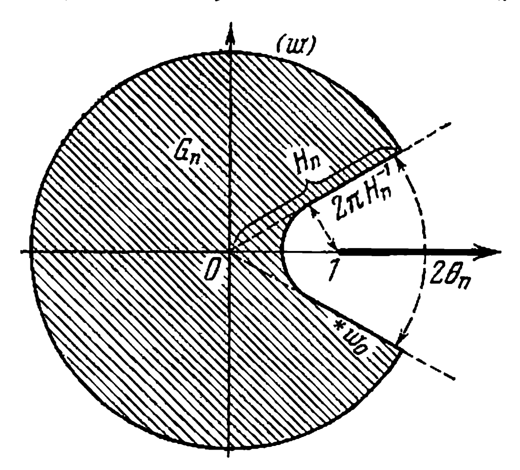


FIG. 74.

dimensiones dependen de la elección del número $H_n > 4\pi$. Esta elección la haremos un poco más adelante. Obsérvese que los números H_n, creciendo, tienden hacia el infinito de tal modo que $\{G_n\}$ forma una sucesión de recintos encajados que converge hacia el recinto G que es la estrella rectilínea de la función $(1-w)^{-1}$. Sea w_0 cualquier punto de $\overline{G}_n$. Entonces $f(t) = (1-tw_0)^{-1}$ es una función analítica en todos los puntos del segmento $0 \leqslant t \leqslant 1$, y $f(1) = (1-w_0)^{-1}$. Para acotar el módulo máximo de $f(t)$ en un recinto g_α (véase la fig. 73) que contiene a este segmento y poder utilizar después la desigualdad (5.4:3), transformemos el recinto $\overline{G}_n$ mediante la función $t = \frac{1}{w}$. Obtendremos el

recinto $\overline{B}_n$ representado en la fig. 75. Designemos su frontera con b_n; de un modo semejante a la frontera del recinto G_n, ésta consta de dos arcos de circunferencias y de dos segmentos rectilíneos. Como el polo $t_0 = w_0^{-1}$ de la función $f(t) = (1 - tw_0)^{-1}$ pertenece a $\overline{B}_n$, para aplicar la acotación (5.4:3) a $f(t)$ es suficiente exigir que el recinto cerrado $\overline{g}_\alpha$ que contiene al segmento $[0, 1]$ esté situado en el interior del contorno b_n. Esto, a su vez, se cumple, si el rectángulo d_α: $-\alpha \ln 2 < \operatorname{Re} t < 1 + \alpha \ln 2$, $|\operatorname{Im} t| < \alpha \frac{\pi}{2}$ está contenido en el interior de b_n. Consideremos el rectángulo mayor, con los lados paralelos a los ejes coordenados, que está inscrito en b_n (véase la fig. 75). Es obvio que su altura es igual al doble

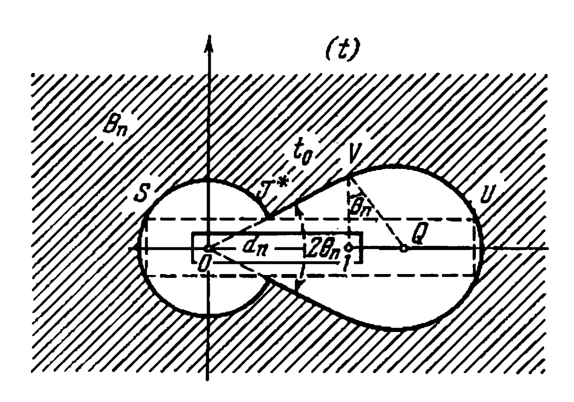


FIG. 75.

de la ordenada del punto $\mathcal{T}$ que es la imagen del punto $w = H_n e^{-\theta_n}$ en la transformación $t = w^{-1}$. Por ello, la mitad de la altura del rectángulo es igual a $H_n^{-1} \operatorname{sen} \theta_n = 2\pi H_n^{-2}$ (véase la fig. 74). Por otra parte, el valor absoluto de la abscisa del punto S coincide con la abscisa del punto $\mathcal{T}$, es decir, es igual a

$$H_n^{-1} \cos \theta_n = H_n^{-1} \sqrt{1 - 4\pi^2 H_n^{-2}} > \frac{\sqrt{3}}{2} H_n^{-1} > \frac{1}{2} H_n^{-1} > 2\pi H_n^{-2} \ (H_n > 4\pi).$$

Finalmente, la abscisa de U es mayor que OQ, donde Q es el centro de la circunferencia en la que está situada U. Como

$$OQ = OV \sec \theta_n = \sec^2 \theta_n = (1 - 4\pi^2 H_n^{-2})^{-1} > 1 + 4\pi^2 H_n^{-2},$$

la abscisa del punto U es superior a $1 + 2\pi H_n^{-2}$. Hagamos

$$\alpha_\nu = 2H_\nu^{-2}; \qquad (5.4:5)$$

entonces para cualquier $\nu \geqslant n$ el rectángulo d_{α_ν} estará situado dentro del rectángulo considerado, y la distancia entre sus fronteras será no menor que πH_n^{-2}. De aquí se deduce que el recinto correspondiente $\overline{g}_{\alpha_\nu}$ está situado en el interior del contorno b_n para todos $\nu \geqslant n$, y la distancia entre $\overline{g}_{\alpha_\nu}$ y b_n es mayor que πH_n^{-2}.

Acotemos ahora $|f(t)| = |(1 - w_0 t)^{-1}|$, $w_0 \in \overline{G}_n$, $t \in g_{\alpha_\nu}$, $\nu \geqslant n$; obsérvese que $|t| < 2$. Si $|w_0| \leqslant \frac{1}{3}$, entonces

$$\frac{1}{|1-tw_0|} < \frac{1}{1-\frac{1}{3}|t|} < 3;$$

si $|w_0| > \frac{1}{3}$, entonces $|t_0| = |w_0^{-1}| < 3$, y como $t_0 = w_0^{-1} \in \overline{B}_n$, se tiene:

$$\frac{1}{|1-tw_0|} = \frac{|t_0|}{|t_0-t|} < \frac{3}{\pi} H_n^2 < H_n^2.$$

Así, pues,

$$|f(t)| = |(1-wt)^{-1}| < H_n^2, \quad w \in \overline{G}_n, \quad t \in g_{\alpha_\nu}, \quad \nu \geqslant n. \tag{5.4:6}$$

Apliquemos la acotación (5.4:3) a la función $f(t) = (1 - tw)^{-1}$ ($w \in \overline{G}_n$, $t \in g_{\alpha_\nu}$, $\nu \geqslant n$). En el caso dado $f^{(j)}(0) = j!\, w^j$, por lo cual $A_q(f)$, determinados por las fórmulas (5.4:4), son polinomios de grado q respecto de w. Precisando:

$$A_0(f) = 1; \quad A_q(f) = \frac{\beta_\nu^q}{q!} \sum_{j=1}^{q} E_q^j \alpha_\nu^j j!\, w^j,$$

donde

$$\alpha_\nu = 2H_\nu^{-2}, \quad \beta_\nu = 1 - \exp(-\alpha^{-1}) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2} H_\nu^2\right). \tag{5.4:7}$$

Hagamos

$$p_0(w) = 1, \quad p_\nu(w) = 1 + \sum_{q=1}^{\nu} A_q(f) = 1 + \sum_{j=1}^{\nu} j!\, \alpha_\nu^j w^j \sum_{q=1}^{\nu} E_q^j \frac{\beta_\nu^q}{q!}. \tag{5.4:8}$$

La fórmula (5.4:3) da para $f(1) = (1-w)^{-1}$ en cado punto $w \in \overline{G}_n$, siendo $\nu \geqslant n$:

$$|(1-w)^{-1} - p_\nu(w)| < 2M\gamma_\nu^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\gamma_\nu\right)^{-\nu}.$$

Aquí $\gamma_\nu = \exp\left(-\frac{1}{2} H_\nu^2\right)$ y en virtud de (5.4:6) se puede hacer $M = H_n^2$. Expresemos $2H_n^2 \gamma_\nu^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\gamma_\nu\right)^{-\nu}$ en la forma

$$\exp\left\{\frac{1}{2} H_\nu^2 - \nu \ln\left(1 + \frac{1}{2}\gamma_n\right) + 2\ln H_n + \ln 2\right\}.$$

Para que esta cantidad tienda a 0 cuando $\nu \to \infty$ es necesario, evidentemente, garantizar que la diferencia

$$\frac{1}{2} H_\nu^2 - \frac{1}{2}\nu\gamma_\nu = -\frac{1}{2}\left[\nu \exp\left(-\frac{1}{2} H_\nu^2\right) - H_\nu^2\right],$$

tienda a $-\infty$, para lo cual, a su vez, es suficiente exigir que H_ν cumpla la condición:

$$2H_\nu^2 \exp\left(\frac{1}{2} H_\nu^2\right) \leqslant \nu \tag{5.4:9}$$

para todos los valores suficientemente grandes de ν (por ejemplo, se puede tomar $H_\nu = c\sqrt{\ln \nu}$, donde $0 < c < \sqrt{2}$).

A continuación vamos a suponer que ya se cumple la condición (5.4 : 9). Entonces

$$\nu \exp\left(-\frac{1}{2} H_\nu^2\right) - H_\nu^2 \geqslant \frac{1}{2} \nu \exp\left(-\frac{1}{2} H_\nu^2\right)$$

y, por consiguiente, para cualquier $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$:

$$|(1-w)^{-1} - p_\nu(w)| < \exp\left\{-\frac{1-\varepsilon}{4} \nu \exp\left(-\frac{1}{2} H_\nu^2\right)\right\} \qquad (5.4:10)$$

para todos $w \in \overline{G}_n$ y $\nu \geqslant n > n(\varepsilon)$.

Para $\nu = n$ de (5.4:10) se deduce que la fórmula

$$(1-w)^{-1} = \lim_{n\to\infty} p_n(w) = \lim_{n\to\infty} \left\{1 + \sum_{j=1}^{n} j!\, \alpha_n^j w^j \sum_{q=1}^{n} E_q^{(j)} \frac{\beta_n^q}{q!}\right\} \qquad (5.4:11)$$

es válida para todos $w \in G$, y que la convergencia de la sucesión $\{p_n(w)\}$ es uniforme en el interior de G. Por ello, en el desarrollo (5.3:2) del apartado anterior se puede hacer $P_n(w) = p_n(w)$.

5.5. En este apartado daremos una solución del problema de la prolongación analítica de una función en su estrella, distinta de la expuesta en el ap. 5.3. Precisando, demostraremos el siguiente t e o r e m a: *Cualquiera que sea la sucesión creciente de números naturales $\{m_\nu\}$ que satisfaga a la condición $\frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} \to +\infty$, siempre se puede hallar una sucesión de números reales $\{\theta_k\}$ tal, que para toda función $f(z)$ analítica en cierto punto z_0 se tiene el desarrollo*:

$$f(z) = \lim_{\nu\to\infty} \left\{ \sum_{0}^{m_{2\nu-1}} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(z-z_0)^k + \sum_{m_{2\nu-1}+1}^{m_{2\nu}} \theta_k \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(z-z_0)^k \right\}, \qquad (5.5:1)$$

el cual es uniformemente convergente en el interior de toda la estrella S_{z_0} de la función $f(z)$.

Es importante subrayar aquí que las sucesiones $\{m_\nu\}$ y $\{\theta_k\}$ n o d e p e n d e n de la función $f(z)$. La demostración de este teorema se reducirá a la división de la serie de potencias $\sum_0^\infty w^k$ en la suma de dos series de potencias $\sum_0^\infty \theta_k w^k$ y $\sum_0^\infty (1-\theta_k) w^k$, donde cada una de éstas posee una subsucesión de sumas parciales uniformemente convergente en el recinto G, cuya frontera es la semirrecta $w = u \geqslant 1$.

En general, una serie de potencias $\sum_0^\infty a_k (w-w_0)^k$ con el radio de convergencia finito R, se llama s u p e r c o n v e r g e n t e, si existe una subsucesión de sumas parciales $\left\{\sum_0^{n_\nu} a_k (w-w_0)^k\right\}$ que es uniformemente convergente en el interior de algún recinto que contenga al círculo $|w-w_0| < R$ como

parte propia. Fácilmente se observa que la serie $\sum_0^\infty w^k$ no posee la propiedad de superconvergencia. En efecto, ninguna subsucesión de sus sumas parciales $\sum_0^{n_\nu} w^k = \frac{w^{n_\nu+1}-1}{w-1}$ puede converger en los puntos que están situados fuera de la circunferencia unidad. De aquí que, si

$$\sum_0^\infty w^k = \sum_0^\infty \theta_k w^k + \sum_0^\infty (1-\theta_k) w^k, \qquad |w| < 1,$$

y ambas series en el segundo miembro son superconvergentes, entonces necesariamente tienen que cumplirse las condiciones:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\theta_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|1-\theta_k|} = 1. \tag{5.5:2}$$

En efecto, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\theta_k|} \leqslant 1$ y $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|1-\theta_k|} \leqslant 1$; si se supone que, por ejemplo, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|\theta_k|} < 1$, entonces el radio de convergencia de la serie $\sum_0^\infty \theta_k w^k$ resulta mayor que 1. Como, según la hipótesis, la serie $\sum_0^\infty (1-\theta_k) w^k$ es superconvergente, existe una sucesión creciente de números naturales $\{n_\nu\}$ tal, que la sucesión $\{\sum_0^{n_\nu} (1-\theta_k) w^k\}$ converge uniformemente en cierto entorno del punto w_0, $|w_0| = 1$. Pero la serie $\sum_0^\infty \theta_k w^k$ es uniformemente convergente en un entorno de cualquier punto de la circunferencia unidad; por ello, la sucesión

$$\{\sum_0^{n_\nu} w^k = \sum_0^{n_\nu} \theta_k w^k + \sum_0^{n_\nu} (1-\theta_k) w^k\}$$

también converge uniformemente en los entornos de los puntos de la circunferencia unidad, lo cual, como ya vimos, es imposible.

Para lo que sigue, es conveniente considerar el conjunto de todas las funciones que son analíticas en un recinto G como un *espacio vectorial topológico* (completo). Este se puede metrizar de tal modo que la convergencia según la norma sea equivalente a la convergencia uniforme en el interior de G. Para esto es suficiente hacer

$$\|f\| = \sum_1^\infty \frac{1}{2^k} \frac{M_k}{1+M_k}, \tag{5.5:3}$$

donde $M_k = \max\limits_{\Gamma_k} |f(w)|$, Γ_k es la frontera del recinto G_k y $\{G_k\}$ son los recintos construidos en el ap. 5.4.

Es obvio que $\| g+h \| \leqslant \| g\| + \| h \|$; en efecto, si $m_h = \max | g |$ y $\mu_h = \max | h |$, entonces

$$\frac{m_h+\mu_h}{1+m_h+\mu_h} \leqslant \frac{m_h}{1+m_h} + \frac{\mu_h}{1+\mu_h}.$$

De (5.5:3) se tiene para cualquier $k \geqslant 1$:

$$2^{-k} \frac{M_k}{1+M_k} \leqslant \| f \| = \sum_1^k 2^{-j} \frac{M_j}{1+M_j} + \sum_{k+1}^{\infty} 2^{-j} \frac{M_j}{1+M_j} \leqslant M_k + 2^{-k}. \quad (5.5:4)$$

Si la sucesión de las funciones $\{f_n(w)\}$ converge hacia cero uniformemente en el interior de G, entonces para cualquier $k \geqslant 1$ se tiene: $M_k^{(n)} = \max\limits_{\Gamma_k} | f_n(w) | \to 0$, y, por consiguiente, $\| f_n \| \to 0$. Recíprocamente: de la condición $\| f_n \| \to 0$ se deduce que $2^{-k} \frac{M_k^{(n)}}{1+M_k^{(n)}} \to 0$ para cualquier $k \geqslant 1$, es decir, $\{f_n(w)\}$ converge hacia cero uniformemente en el interior de G.

Demostremos ahora dos lemas.

Lema 1. *Supongamos que los números positivos Δ_n satisfacen a las condiciones:*

$$\Delta_n \geqslant 2 \ln H_n. \quad (5.5:5)$$

Entonces cada relación

$$\| f \| \leqslant \exp(-n\Delta_n) = \delta_n \quad (5.5:6)$$

implica la desigualdad

$$\left\| \sum_0^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} w^k \right\| < 2^{n+1} \exp\left(-\frac{1}{3} n\Delta_n\right) + 2^{-n} = o(1). \quad (5.5:7)$$

En efecto,

$$\left\| \sum_0^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} w^k \right\| \leqslant \max_{\overline{G}_n} \left| \sum_{k=0}^n \frac{f^k(0)}{k!} w^k \right| + 2^{-n} = \mu_n + 2^{-n}. \quad (5.5:8)$$

Como el círculo $|w| < 1 - 2\pi H_n^{-1}$ pertenece a $\overline{G}_n$, se tiene:

$$\left| \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| < M_n (1 - 2\pi H_n^{-1})^{-k},$$

donde $M_n = \max\limits_{\overline{G}_n} | f(w) |$; además, $|w| \leqslant H_n$ si $w \in \overline{G}_n$.

Por ello

$$\mu_n < M_n \sum_{k=0}^n H_n^k (1-2\pi H_n^{-1})^{-k} \leqslant M_n (n+1) H_n^n (1-2\pi H_n^{-1})^{-n} =$$
$$= M_n \exp\{n \ln H_n + \ln(n+1) - n \ln(1-2\pi H_n^{-1})\}.$$

En el exponente el término principal es, evidentemente, $n \ln H_n$. En virtud de (5.5:5)

$$n \ln H_n \leqslant \frac{1}{2} n\Delta_n.$$

Por consiguiente,

$$\mu_n < M_n \exp\left(\frac{2}{3} n\Delta_n\right) \tag{5.5:9}$$

para todos los n suficientemente grandes.

Para acotar M_n, obsérvese primero que, debido a (5.5:4)

$$\frac{M_n}{1+M_n} < 2^n \| f \|.$$

De la condición (5.5:6) se deduce que $2^n \| f \| < 2^n \delta_n = o(1)$; por ello, para todos los valores de n suficientemente grandes $2^n \| f \| < 2^{-1}$, de donde

$$M_n < \frac{2^n \| f \|}{1-2^n \| f \|} < 2^{n+1} \| f \| < 2^{n+1} \exp(-n\Delta_n).$$

Ahora de la desigualdad (5.5:9) se deduce que

$$\mu_n < 2^{n+1} \exp\left(-\frac{1}{3} n\Delta_n\right)$$

y, finalmente, en virtud de (5.5:8)

$$\left\| \sum_0^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} w^k \right\| < 2^{n+1} \exp\left(-\frac{1}{3} n\Delta_n\right) + 2^{-n} = 0(1).$$

El lema 1 queda demostrado.

Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números positivos tal, que la diferencia $\lambda_{n+1} - \lambda_n$, creciendo, tiende hacia $+\infty$. Se puede hacer, por ejemplo, $\lambda_n = n \ln(n+1)$; entonces $\lambda_{n+1} - \lambda \approx \ln n$. En general, la sucesión $\{\lambda_{n+1} - \lambda_n\}$ puede tener un crecimiento arbitrariamente lento. Fijando una sucesión tal, hagamos:

$$m_n = [e^{\lambda_n}],\ N_n = m_n |\Delta m_n|^2,\ \pi_n(w) = p_{m_n}(w). \tag{5.5:10}$$

Aquí Δ_ν son los números que figuran en el lema 1, $p_\nu(w)$ son los polinomios determinados por las fórmulas (5.4:8). Obsérvese que debido a la definición $\pi_n(w)$ es un polinomio de grado m_n.

Exijamos también que los números $\{\Delta_\nu\}$ cumplan la condición:

$$\Delta_{m_n} < \exp\left\{\frac{1}{3}(\lambda_{n+1} - \lambda_n)\right\}. \tag{5.5:11}$$

En virtud de (5.5:5) esto origina unas restricciones al crecimiento posible de los números H_{m_n}, los cuales determinan las dimensiones de los recintos G_{m_n}. Someteremos a estos números a unas restricciones más:

$$H^2_{m_{n+1}} < \frac{2}{3}(\lambda_{n+1} - \lambda_n). \tag{5.5:12}$$

Lema 2. *Los polinomios de la sucesión* $\{\pi_n(w) = p_{m_n}(w)\}$ *satisfacen a las condiciones:*

$$\| (1-w)^{-1} - \pi_{n+1}(w) \| < 2^{-n-1} \exp(-m_n \Delta_{m_n}). \tag{5.5:13}$$

Obsérvese que de las condiciones $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to +\infty$ y de (5.5:10) se deduce que

$$n = o(\lambda_n) = o(m_n). \tag{5.5:14}$$

Por otra parte, en virtud de (5.5:10) y (5.5:11):

$$\frac{m_{n+1}}{N_n} = \frac{m_{n+1}}{m_n \cdot |\Delta_{m_n}|^2} \approx \frac{\exp(\lambda_{n+1} - \lambda_n)}{\Delta^2_{m_n}} > \exp\left\{\frac{1}{3}(\lambda_{n+1} - \lambda_n)\right\}.$$

Por consiguiente, para todos los valores suficientemente grandes de n

$$m_{n+1} > N_n \text{ y } H_{N_n} < H_{m_{n+1}}. \qquad (5.5:15)$$

Acotemos la norma $\| (1-w)^{-1} - \pi_{n+1}(w) \|$ aplicando las desigualdades (5.5:4) y (5.4:10) (en la última sustituimos ν por m_{n+1} y n por N_n):

$$\| (1-w)^{-1} - \pi_{n+1}(w) \| = \| (1-w)^{-1} - p_{m_{n+1}}(w) \| <$$

$$< \max_{\Gamma_{N_n}} | (1-w)^{-1} - p_{m_{n+1}}(w) | + 2^{-N_n} <$$

$$< \exp \left\{ -\frac{1-\varepsilon}{4} m_{n+1} e^{-\frac{1}{2} H^2_{m_{n+1}}} \right\} + \exp(-N_n \ln 2).$$

En virtud de (5.5:10) y (5.5:12)

$$m_{n+1} e^{-\frac{1}{2} H^2 m_{n+1}} > [e^{\lambda_{n+1}}] e^{-\frac{1}{3}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)} > (1-\varepsilon') \exp\left(\frac{2}{3}\lambda_{n+1} + \frac{1}{3}\lambda_n \right).$$

Por lo tanto

$$\| (1-w)^{-1} - \pi_{n+1}(w) \| < \exp\left\{ -\frac{1-\varepsilon''}{4} e^{\frac{2}{3}\lambda_{n+1} + \frac{1}{3}\lambda_n} \right\} + \exp(-N_n \ln 2). \qquad (5.5:16)$$

Para deducir la desigualdad (5.5:13) de (5.5:16), escribamos la primera en la forma:

$$\| (1-w)^{-1} - \pi_{n+1}(w) \| < \exp\{ -(m_n \Delta_{m_n} + (n+1) \ln 2) \}.$$

Ahora es suficiente demostrar que la razón del valor absoluto del último exponente al valor absoluto de cada uno de los exponentes del segundo miembro de (5.5:16) es un infinitésimo (para $n \to \infty$). En efecto, en virtud de (5.5:10), (5.5:11) y (5.5:14)

$$\frac{m_n \Delta_{m_n} + (n+1) \ln 2}{\exp\left(\frac{2}{3}\lambda_{n+1} + \frac{1}{3}\lambda_n \right)} < \{ e^{\lambda_n} \cdot e^{\frac{1}{3}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)} +$$

$$+ (n+1) \ln 2 \} e^{-\frac{2}{3}\lambda_{n+1} - \frac{1}{3}\lambda_n} = e^{-\frac{1}{3}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)} +$$

$$+ (n+1) \ln 2 e^{-\frac{2}{3}\lambda_{n+1} - \frac{1}{3}\lambda_n} \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Del mismo modo, en virtud de (5.5:10) y (5.5:14)

$$\frac{m_n \Delta_{m_n} + (n+1) \ln 2}{N_n} \approx \frac{m_n \Delta_{m_n} + (n+1) \ln 2}{m_n \Delta^2_{m_n}} =$$

$$= \frac{1}{\Delta_{m_n}} + \frac{(n+1) \ln 2}{m_n \Delta^2_{m_n}} \to 0, \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

El lema 2 queda demostrado.

Ahora se puede pasar a demostrar el teorema principal de este apartado. Consideremos las dos series de polinomios:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \{ \pi_{2j}(w) - \pi_{2j-1}(w) \} \text{ y } \sum_{j=1}^{\infty} \{ \pi_{2j-1}(w) - \pi_{2j-2}(w) \}, \qquad (5.5:17)$$

y hagamos $\pi_0(w)=0$. Según el lema 2 se tiene:

$$\|\pi_{n+1}(w)-\pi_n(w)\| < 2^{-n-1}\exp(-m_n\Delta_{m_n})+$$
$$+2^{-n}\exp(-m_{n-1}\Delta_{m_{n-1}}) < 2^{-n+1}\exp(-m_{n-1}\Delta_{m_{n-1}})=2^{-n+1}\delta_{m_{n-1}}. \qquad (5.5:18)$$

De aquí se deduce que las series (5.5:17) son convergentes según la norma y, por consiguiente, representan funciones analíticas en este recinto. En particular estas funciones son analíticas en el círculo unidad.

Hagamos:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\{\pi_{2j}(w)-\pi_{2j-1}(w)\}=\varphi(w),$$
$$\sum_{j=1}^{\infty}\{\pi_{2j-1}(w)-\pi_{2j-2}(w)\}=\psi(w). \qquad (5.5:19)$$

Observando que

$$\varphi(w)+\psi(w)=\sum_{k=1}^{\infty}\{\pi_k(w)-\pi_{k-1}(w)\}=\lim_{k\to\infty}\pi_k(w)=(1-w)^{-1}, \qquad (5.5:20)$$

tendremos en el círculo unidad:

$$\varphi(w)=\sum_{0}^{\infty}\theta_k w^k, \qquad \psi(w)=\sum_{0}^{\infty}(1-\theta_k)w^k, \qquad (5.5:21)$$

donde

$$\theta_R=\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\{\pi_{2j}^{k}(0)-\pi_{2j-1}^{(k)}(0)\}, \qquad (5.5:22)$$

y según las fórmulas (5.4:8), donde hay que hacer $\nu=m_\nu=[e^{\lambda\nu}]$:

$$\frac{1}{k!}\pi_\nu^{(k)}(0)=\alpha_\nu^k\sum_{q=1}^{\nu}E_q^h\frac{\beta_\nu^q}{q!}. \qquad (5.5:23)$$

De las fórmulas (5.5:22) y (5.5:23) se deduce que todos los números θ_n son reales.

Comprobemos mediante el lema 1 que las sucesiones

$$\left|\sum_{0}^{m_{2n}}\theta_k w^k\right| \text{ y } \left|\sum_{0}^{m_{2n-1}}(1-\theta_k)w^k\right| \qquad (5.5:24)$$

son uniformemente convergentes en el interior de G y, por consiguiente, ambas series (5.5:21) son superconvergentes. De aquí, según la observación hecha al comienzo de este apartado, se deduce que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[k]{|\theta_k|}=\overline{\lim_{h\to\infty}}\sqrt[k]{|1-\theta_k|}=1. \qquad (5.5:25)$$

Demostremos que la serie $\sum_{0}^{\infty}\theta_h w^h$ es superconvergente. Hagamos

$$\sum_{j=1}^{\nu}\{\pi_{2j}(w)-\pi_{2j-1}(w)\}=\Pi_\nu(w); \qquad (5.5:26)$$

evidentemente, $\Pi_\nu(w)$ es un polinomio de grado $m_{2\nu}$. Según la definición de $\varphi(w)$ y de la desigualdad (5.5:18), se tiene:

$$\|\varphi(w)-\Pi_\nu(w)\| \leqslant \sum_{\nu+1}^{\infty} \|\pi_{2j}(w)-\pi_{2j-1}(w)\| <$$

$$< \sum_{\nu+1}^{\infty} 2^{-2j+2}\delta m_{2j-2} \leqslant \delta m_{2\nu} \sum_{\nu+1}^{\infty} 2^{-2j+2} \leqslant \delta m_{2\nu}. \qquad (5.5:27)$$

Según el lema 1, de aquí se deduce que

$$\left\| \sum_{k=0}^{m_{2\nu}} \frac{1}{k!} \{\varphi^{(k)}(0)-\Pi_\nu^{k}(0)\} w^k \right\| \to 0 \quad \text{si} \quad \nu\to\infty,$$

es decir, que la sucesión de polinomios

$$\left\{ \sum_{k=0}^{m_{2\nu}} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0)\, w^{(k)} - \sum_{k=0}^{m_{2\nu}} \frac{1}{k!} \Pi_\nu^{(k)}(0)\, w^k \right\}$$

converge uniformemente hacia 0 en el interior de G.

Pero

$$\sum_{k=0}^{m_{2\nu}} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0)\, w^k = \sum_{k=0}^{m_{2\nu}} \theta_k w^k, \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{m_{2\nu}} \frac{1}{k!} \Pi_\nu^{k}(0)\, w^k = \Pi_\nu(w)$$

(recordemos que $\Pi_\nu(w)$ es un polinomio de grado $m_{2\nu}$).

Como, en virtud de la definición de $\Pi_\nu(w)$, la sucesión $\{\Pi_\nu(w)\}$ converge uniformemente hacia $\varphi(w)$ en el interior de G, la sucesión $\left\{ \sum_{k=1}^{m_{2\nu}} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0)\, w \right\}$ tiene que converger uniformemente hacia $\varphi(w)$ en el interior de G.

Así, pues,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m_{2\nu}} \theta_k w^k = \varphi(w). \qquad (5.5:28)$$

Análogamente obtenemos:

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{k=0}^{m_{2\nu-1}} (1-\theta_k)\, w^k = \psi(w). \qquad (5.5:29)$$

Queda demostrado que verifica la fórmula

$$(1-w)^{-1} = \lim_{\nu\to\infty} \left\{ \sum_{0}^{m_{2\nu}} \theta_k w^k + \sum_{0}^{m_{2\nu-1}} (1-\theta_k)\, w^k \right\} =$$

$$= \lim_{\nu\to\infty} \left\{ \sum_{0}^{m_{2\nu-1}} w^k + \sum_{m_{2\nu-1}+1}^{m_{2\nu}} \theta_k w^k \right\}. \qquad (5.5:30)$$

donde la convergencia es uniforme en el interior de recinto G.

De este desarrollo se obtiene el desarrollo de una función analítica arbitraria $f(z)$ en su estrella rectilínea S_{e_0} del mismo modo que esto se hizo en el ap. 5.3 para obtener (5.3:3) de (5.3:2). Resulta definitivamente:

$$f(z)=\lim_{\nu\to\infty}\left\{\sum_{0}^{m_{2\nu-1}}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(z-z_0)^k+\sum_{m_{2\nu}+1}^{m_{2\nu}}\theta_k\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(z-z_0)^k\right\}, \qquad (5.5:31)$$

donde la convergencia es uniforme en el interior de S_{e_0}.

Recordemos que aquí

$$m_n=[e^{\lambda n}],$$

donde $\{\lambda_n\}$ es una sucesión arbitraria de números positivos que cumple la única condición

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n\to+\infty.$$

Claro, se podría haber comenzado con cualquier sucesión creciente de números naturales $\{m_n\}$ que cumpla la única condición

$$\frac{m_{n+1}}{m_n}\to\infty;$$

en efecto, es suficiente hacer

$$\lambda_n=\ln m_n.$$

El teorema principal de este apartado queda demostarado completamente.

Basándose en las propiedades generales de las series de potencias superconvergentes, se puede afirmar que cualquier sucesión $\{m_n\}$ que satisfaga a las condiciones del teorema de este apartado también tiene que cumplir la condición

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{m_{n+1}}{m_n}>1.$$

Es verosímil que para ésta tiene que cumplirse también la siguiente condición más fuerte:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{m_{n+1}}{m_n}=\infty$$

y, en particular, que ninguna progresión geométrica $\{\rho^n\}$ puede tomarse por sucesión $\{m_n\}$.

5.6. Vamos a considerar la imagen analítica A como un espacio topológico y sus elementos componentes como puntos de este espacio. A dos elementos los consideraremos idénticos si tienen un centro común y se representan por series iguales, independientemente de los círculos concéntricos con el círculo de convergencia en que éstos se consideren.

Sea e: $\sum\limits_{m}^{\infty}a_n(z-z_0)^{\frac{n}{\nu}}$ (o $\sum\limits_{m}^{\infty}a_nz^{-\frac{n}{\nu}}$) un elemento de A, y sea $|z-z_0|<R$ (o $|z|>R$) el recinto de convergencia de la serie que lo representa; llamaremos ρ-e n t o r n o del elemento e ($\rho\leqslant R$ si $z_0\neq\infty$ y $\rho\geqslant R$ si el centro del elemento es el punto del infinito)

al conjunto de aquellos elementos que están subordinados a e (incluyendo a e), cuyos centros pertenecen al recinto $|z - z_0| < \rho$ (o $|z| > \rho$, respectivamente).

Fácilmente se comprueba que en esta definición se cumplen todas las condiciones del ap. 1.1, de modo que la imagen analítica se convierte en un T_2-espacio. No queda más que comprobar que A es conexo, que posee una base numerable y que es localmente homeomorfa al círculo.

Haremos la prueba comenzando por la última propiedad. Si e_0 es un elemento no ramificado, entonces a cada punto de su recinto de convergencia le corresponde un elemento subordinado único con el centro en este punto. Suponiendo, para precisar que el centro z_0 del elemento e_0 es un punto finito, pongamos en correspondencia a cada elemento e con el centro z, que pertenezca al ρ-entorno del elemento e_0, el centro de este elemento. Entonces el ρ-entorno del elemento e_0 se transformará en el círculo $|z - z_0| < \rho$, siendo esta transformación biunívoca. Además, ésta es bicontinua. Así, por ejemplo, si la imagen del elemento e_1 (es decir, el centro de este elemento) es z_1, $|z_1 - z_0| < \rho$ y $|z - z_1| < \delta$ es un entorno del punto z_1 que está contenido en el círculo $|z - z_0| < \rho$, entonces es suficiente tomar un δ-entorno del elemento e_1 para afirmar que la imagen de cada elemento de este entorno cae en el círculo $|z - z_1| < \delta$.

En resumen, un entorno (cualquiera) de un elemento no ramificado admite una transformación homeomorfa sobre un círculo; además, puede realizarse esta transformación sobre un círculo suponiendo que la imagen del elemento es su centro.

Supongamos ahora que e_0 es un elemento ramificado (de nuevo, para precisar, con el centro finito z_0) y que $\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^{\frac{n}{\nu}}$ es su expresión canónica. Como a cada punto z_1, distinto de z_0 y perteneciente al recinto de convergencia, le corresponden varios (precisamente $\nu > 1$) elementos distintos que están subordinados al elemento e_0, la transformación del elemento en su centro no será biunívoca en el entorno considerado. Para hallar una transformación homeomorfa del entorno del elemento e_0 sobre el círculo, introduzcamos el parámetro $t = (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$. Si $z_1 \neq z_0$, entonces la función $t = (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$ toma en este punto ν valores distintos: $t_1, \ldots, t_\nu$, cada uno de los cuales puede convertirse en otro mediante una rotación alrededor del origen en un ángulo múltiplo de $\frac{2\pi}{\nu}$. Respectivamente, el entorno del punto z_1 que no contenga a z_0 se transforma mediante $t = (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$ en ν recintos distintos g_j ($j =$

$= 1, \ldots, \nu)$, sin puntos comunes entre sí, que también se convierten uno en otro mediante las rotaciones indicadas. En este caso, cada uno de los recintos g_j contiene uno de los puntos $t_1, \ldots$ $\ldots, t_\nu$, y sólo uno; precisamente $t = t_j$.

Para fijar en un entorno del punto z_1 una de las ν ramas analíticas uniformes de la función $t = (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$ es suficiente señalar a cuál de los recintos descritos anteriormente pertenecen los valores de la rama o (lo que es lo mismo) cuál de los valores $t_1, \ldots, t_\nu$ toma la rama $(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$ en el punto $z = z_1$. Si z_1 pertenece al recinto de convergencia de la serie $\sum_m^\infty a_n (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$, entonces, imponiendo la misma condición a $(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$, se determina una de las ν ramas analíticas uniformes de la suma ν-forme de esta serie, es decir, uno de los ν elementos $e_1^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ que tiene el centro z_1 y está subordinado a e_0.

Es importante señalar que a distintos valores t_j les corresponden también distintos elementos $e_1^{(j)}$. En efecto, supongamos lo contrario y sean t_j y t_{j+p} dos valores distintos a los cuales les corresponden elementos idénticos $e_1^{(j)}$ y $e_1^{(j+p)}$. Como $e_1^{(j)}$ y $e_1^{(j+p)}$ se representan en un entorno del punto z_1 por la suma de la serie $\sum_m^\infty a_n (z - z_0)^{\frac{n}{\nu}}$, donde $(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}} = t$ recorre los recintos g_j y $g_{(j+p)}$, respectivamente, pasando a la variable t obtenemos para $e_1^{(j)}$ y $e_1^{(j+p)}$ la expresión $\sum_m^\infty a_n t^n$, $t \in g_j$ y $t \in g_{j+p}$. Pero si a cierto z del entorno del punto z_1 le corresponde un valor de $(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$ en el recinto g_j igual a t, entonces al mismo z le corresponde un valor de $(z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$ en el recinto g_{j+p} igual a $e^{2\pi i \frac{p}{\nu}} t$; por esta razón, los valores de $e_1^{(j)}$ y $e_1^{(j+p)}$ se pueden expresar en el recinto g_j por las series $\sum_m^\infty a_n t^n$ y $\sum_m^\infty a_n e^{2\pi i \frac{pn}{\nu}} t^n$. De la hipótesis hecha respecto de la coincidencia de los elementos $e_1^{(j)}$ y $e_1^{(j+p)}$ y del teorema interior de unicidad se deduce que $e^{2\pi i \frac{pn}{\nu}} = 1$ para todos los valores de n, para los cuales $a_n \neq 0$, es decir, que los números correspondientes $\frac{pn}{\nu}$ son enteros y, por consiguiente, las fracciones $\frac{n}{\nu}$ pueden simplificarse por un mismo número distin-

to de la unidad (se ha tenido en cuenta aquí que $p < \nu$). Pero esta conclusión contradice a que $\sum_m^\infty a_n t^{\frac{n}{\nu}}$ es la expresión canónica del elemento e_0. Así, pues, los elementos $e_1^{(j)}$ y $e_1^{(j+p)}$ son distintos.

Tomemos por imagen de cada elemento $e_1^{(j)}$ el valor correspondiente $t = t_j$, haciendo esto para todos los elementos que están subordinados a e_0; sea $t = 0$ la imagen del elemento e_0 mismo. Entonces el entorno del elemento e_0 se transformará en un entorno del punto $t = 0$, y la correspondencia entre los elementos y sus imágenes será biunívoca. Pero también será bicontinua. En efecto, la correspondencia entre t y z, establecida mediante cada rama de $t = (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$ en un entorno del punto $z_1 \neq z_0$, es bicontinua. También es bicontinua la correspondencia entre los elementos que están subordinados a e_0 y que representan en un entorno del punto z_1 cualquier rama uniforme de la función $\sum_m^\infty a_n (z - z_0)^{\frac{n}{\nu}}$, y sus centros z (pertenecientes a un entorno del punto z_1 que no contiene a z_0). No queda más que observar que la continuidad se conserva también en el elemento e_0 y, respectivamente, en $t = 0$, puesto que cuando t tiende a cero los elementos correspondientes tienden hacia e_0 (es decir, se sitúan en cualquier ρ-entorno del elemento e_0 para todos los valores de t suficientemente pequeños en valor absoluto) y, recíprocamente, si e tiende a e_0 los centros de los elementos e tienden a z_0 y, por consiguiente, t tiende a cero.

Resumiendo, cualquier entorno de un elemento ramificado e_0 de orden $\nu - 1$ con el centro en z_0, se transforma (siendo ésta un homeomorfismo) mediante $t = (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$ (donde z es el centro del elemento e del entorno considerado del elemento e_0) en un círculo del plano t con el centro en el origen de coordenadas.

De todo lo expuesto sacamos la conclusión de que la imagen analítica con el concepto establecido anteriormente de entornos de sus elementos, es un T_2-espacio localmente homeomorfo al círculo.

5.7. Dedicamos este apartado a la demostración de que toda imagen analítica posee una base numerable y también, que es un espacio conexo. De aquí, junto con lo establecido en el ap. 5.6, se deduce que la imagen analítica se puede considerar como una superficie.

Hagamos previamente unas cuantas observaciones elementales. Sea e_0 un elemento arbitrario: $\sum_m^\infty a_n (z - z_0)^{\frac{n}{\nu}}$, y sean ε_0 y ε dos elementos subordinados del mismo, los cuales son por tanto regulares. Ya se vio en el ap. 5.1 que si e_0 es un elemento regular, entonces

ε_0 y ε se pueden unir entre sí mediante una cadena de elementos también regulares que están subordinados al elemento e_0.

Demostremos que la última propiedad conserva su valor también cuando e_0 es un elemento irregular.

Realicemos la transformación $t = (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$; entonces a e_0 le corresponderá un elemento circular no ramificado e_0' con el centro $t = 0$, y a los centros de los elementos ε_0 y ε les corresponderán unos puntos τ_0 y τ pertenecientes al círculo K' del elemento e_0'. Unamos τ_0 y τ con una curva continua γ' que no pase por el centro del círculo K', y sea $\varepsilon_0', \ldots, \varepsilon_n'$ una cadena de elementos subordinados al elemento e_0' que una el elemento ε_0', cuyo centro es τ_0, con el elemento ε_n', cuyo centro es τ. Volviendo a la variable $z = z_0 + t^{\nu}$, obtenemos en el recinto de convergencia del elemento e_0 una curva γ (la imagen de la curva γ') que no pasa por z_0 y une los puntos ζ_0 y ζ (los centros de los elementos ε_0 y ε. A los círculos de los elementos ε_j' les corresponden unos recintos simplemente conexos g_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$, de los cuales cada uno que sigue tiene una parte común (conexa) con la anterior; además, el par de recintos g_j y g_{j+1} cubren el arco $\sigma_j \subset \gamma$ que une la imagen del centro del elemento ε_j' con la imagen del centro del elemento ε_{j+1}'. Los elementos mismos ε_j' se transforman en ramas $\varphi_j(z)$ de la suma de la serie $\sum\limits_{m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{\frac{n}{\nu}}$, que son uniformes y analíticas en los recintos g_j; aquí $\varphi_0(z)$ coincide con ε_0 en un entorno del punto ζ_0, $\varphi_n(z)$ coincide con ε en un entorno del punto ζ y, además, $\varphi_j(z)$ y $\varphi_{j+1}(z)$ coinciden en la parte común a los recintos g_j y g_{j+1}. Señalemos en γ sendos puntos ζ_j en las partes comunes de los recintos g_j y g_{j+1} $(j = 0, \ldots, n)$, y sea ε_j aquel elemento, entre los que tienen el centro ζ_j y están subordinados al elemento e_0, cuyos valores coinciden con los valores $\varphi_j(z)$ y $\varphi_{j+1}(z)$ en un entorno del punto ζ_j. No queda más que dividir cada arco σ_j con los extremos ζ_j y ζ_{j+1} en partes tan pequeñas que ε_j y ε_{j+1} se puedan unir mediante una cadena de elementos subordinados a $\varphi_j(z)$ y $\varphi_{j+1}(z)$ y, por consiguiente, a e_0, con los centros en los puntos de división (la existencia de semejantes cadenas se demuestra exactamente igual que el lema del ap. 5.1). Evidentemente, las cadenas halladas para diferentes valores de j se unen en una cadena, compuesta solamente de elementos regulares, que une ε_0 con ε. Así, la propiedad pedida queda demostrada.

En particular, si ε_0 y ε tienen un mismo centro, entonces τ_0 y τ están situados en una circunferencia con el centro en el origen de coordenadas y se puede tomar por γ' un arco de esta circunferencia. Entonces la curva γ en el recinto de convergencia del elemento e_0

será una circunferencia con el centro z_0, recorrida múltiplemente al prolongar el elemento ε_0 en el elemento ε.

Aplicando esta observación, demostremos que *si dos elementos e_0 y e' con un centro común z_0 tienen un elemento subordinado común ε, entonces e_0 y e' coinciden*. Este aserto se deduce inmediatamente del teorema de unicidad si e_0 y e' son elementos no ramificados. Si, por ejemplo, e_0 es un elemento ramificado y su orden es $\nu - 1$, entonces, además de ε, existen también $\nu - 1$ elementos, distintos entre sí y distintos de ε, que tienen el mismo centro y están subordinados al elemento e_0. Cada uno de éstos se puede obtener mediante una prolongación analítica del elemento ε a lo largo de una circunferencia (recorrida múltiplemente) con el centro z_0. Todas estas prolongaciones se realizan con elementos subordinados al elemento e_0. Como en este caso no se sale fuera de los límites del recinto de convergencia del elemento e', estos últimos también están subordinados a e', lo cual se comprueba examinando uno tras otro los elementos de la cadena, comenzando desde ε. De aquí que todos los ν elementos que están subordinados al elemento e_0 y que tienen un centro común con ε, también están subordinados a e'. Por consiguiente, el orden de ramificación del elemento e' no es menor al orden de ramificación del elemento e_0; pero en este razonamiento e_0 y e' pueden cambiarse de sitio, por lo cual el orden de ramificación del elemento e' también es igual a $\nu - 1$. Aplicando la transformación $t = (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}}$ hacemos corresponder a e_0 y e' dos elementos no ramificados con el centro común $t = 0$, que tengan un elemento común subordinado ε'. Por consiguiente, los elementos homólogos coinciden y, por lo tanto, coinciden también los elementos dados e_0 y e'.

Sean ahora e_0 y e' dos elementos arbitrarios de la imagen analítica A. En virtud de la definición del concepto de imagen analítica, existe una cadena de elementos $e_0, e_1, \ldots, e_n = e'$, pertenecientes a A y que unen e_0 con e'. Demostremos que si entre los elementos $e_1, \ldots, e_{n-1}$ hay irregulares, entonces la cadena dada se puede sustituir por otra cuyos elementos intermedios son todos regulares. En efecto, sea e_k un elemento irregular de la cadena ($1 \leqslant k \leqslant n - 1$) y sean ε_0 y ε' unos elementos subordinados a él que, por lo tanto, son regulares y que sean comunes a e_{k-1} y e_{k+1}, respectivamente. Acabamos de ver que ε_0 y ε' pueden unirse mediante una cadena de elementos regulares. Excluyendo el elemento e_k de la cadena inicial y poniendo en su lugar los elementos ε_0 y ε' junto con la cadena de elementos regulares que los une, resulta una nueva cadena que une e_0 con e' y que contiene un elemento irregular menos que la cadena inicial. Repitiendo este razonamiento, se obtiene el resultado pedido.

Demostremos que el *conjunto de todos los elementos distintos entre sí de la imagen analítica A que tienen un mismo centro z_0, no es más que numerable*. Supongamos, para precisar, que $z_0 = 0$ (si $z_0 = \infty$, entonces, mediante la sustitución de la variable $\zeta = \frac{1}{z}$, obtendremos el caso considerado; si $z_0 \neq \infty$ y $z_0 \neq 0$, hacemos la sustitución: $\zeta = z - z_0$). Sea e_0 un elemento fijado con el centro 0 y sea $e \in A$ un elemento arbitrario con el mismo centro. Según lo demostrado, existe una cadena de elementos regulares de A que une e_0 con e (solamente pueden ser irregulares en esta cadena los elementos extremos e_0 y e). Sea ésta la cadena $e_0, e_1, \ldots, e_n = e$. Si los centros z_1 y z_{n-1} de los elementos e_1 y e_{n-1} no satisfacen a la condición de que $x_1, y_1, x_{n-1}, y_{n-1}$ sean números racionales, entonces incluimos entre e_0 y e_1 o entre e_{n-1} y e_n sendos elementos que estén subordinados al elemento e_i o a e_{n-1}, de tal modo que los centros de estos elementos satisfagan a la condición correspondiente. Supongamos que ya se ha efectuado esta operación y que e_1 y e_{n-1} denotan elementos cuyos centros tienen coordenadas racionales. Uniendo los centros de los elementos $e_1, \ldots, e_{n-1}$ de la cadena por segmentos rectilíneos, resulta una poligonal tal, que al prolongar el elemento e_1 a lo largo de ella se obtiene el elemento e_{n-1}.

Aplicando el teorema 2 del ap. 5.1 se puede sustituir esta poligonal por otra con el mismo origen y extremo, cuyas coordenadas de todos sus vértices sean racionales, de modo que el resultado de la prolongación del elemento e_1 a lo largo de ella sea de nuevo e_{n-1}. Como todas las poligonales posibles con coordenadas racionales de sus vértices forman un conjunto numerable, y el conjunto de los elementos e_1, con coordenadas racionales del centro y que están subordinados al elemento e_0, también es numerable (la cantidad de elementos que tienen un mismo centro y están subordinados al elemento e_0, es finita), los resultados de las prolongaciones descritas forman solamente un conjunto numerable.

Cada elemento e_{n-1}, obtenido como resultado de semejante prolongación, determina un elemento único e con el centro $z = 0$, al cual está subordinado e_{n-1} (si, en general, existe tal elemento e). Por ello, puede haber lo más un conjunto numerable de elementos distintos e con el centro $z = 0$, como se quería demostrar.

Ahora no es difícil demostrar que *cada imagen analítica contiene no más que un conjunto numerable de elementos irregulares* (incluyendo los ramificados).

En efecto, consideremos el conjunto E de todos los elementos regulares de la imagen A con los centros de coordenadas racionales. Como sólo puede haber un conjunto numerable de tales centros y para cada uno de éstos el conjunto de los elementos correspon-

dientes no es más que numerable, resulta que el conjunto E es numerable. Pongamos en correspondencia a cada elemento irregular $e_0 \in A$, con el centro z_0 y el radio R, un elemento subordinado cualquiera del mismo, ε, cuyo centro ζ tenga coordenadas racionales, y exijamos que la distancia $| z_0 - \zeta |$ sea menor que $1/2R$. Como $\varepsilon \in E$, resulta una aplicación del conjunto de todos los elementos irregulares en el conjunto numerable E. Demostremos que esta aplicación es biyectiva. En efecto, supongamos que a dos elementos irregulares distintos e_0 y e' les corresponde un mismo elemento ε. Siendo regular, el elemento ε se representa por una serie, dispuesta según las potencias enteras no negativas de $z - \zeta$: $\sum\limits_0^\infty \alpha_n (z - \zeta)^n$ y esta serie es convergente en el círculo $| z - \zeta | < | \zeta - z_0 |$, y también en el círculo $| z - \zeta | < | \zeta - z' |$ (donde z' es el centro del elemento e'), puesto que debido a la elección del punto ζ, cada uno de estos círculos pertenece al recinto de convergencia del elemento e_0 o e' y no contiene dentro de sí a los puntos z_0 o z', en los cuales los elementos e y e' o bien tienen un polo, o bien un punto de ramificación. De aquí se deduce ahora que z_0 y z' no pueden estar situados en el interior del círculo de convergencia de la serie $\sum\limits_0^\infty \alpha_n (z - \zeta)^n$; por esto ambos círculos $| z - \zeta | < | \zeta - z' |$ y $| z - \zeta | < | \zeta - z_0|$ coinciden, es decir, $| \zeta - z' | = | \zeta - z_0 |$, y representan el círculo de convergencia del elemento ε; los puntos z_0 y z', situados en la frontera de este círculo, son para ε puntos singulares. Pero todos los puntos de la circunferencia $| z - \zeta | = | \zeta - z_0 |$, distintos de z_0, están situados en el interior del círculo de convergencia del elemento e_0, son distintos de su centro y, por consiguiente, no pueden ser singulares para ε. De aquí se deduce que $z' = z_0$, o sea, e_0 y e' tienen un centro común y, por consiguiente, e_0 coincide con e', pues ε es su elemento subordinado común. Así, pues, el conjunto de todos los elementos irregulares de la imagen analítica que poseen centros finitos, puede aplicarse biyectivamente al conjunto numerable E y, por consiguiente, el mismo o es finito, o es numerable. No queda más que agregarle también los elementos irregulares con el centro en el punto del infinito. Como este conjunto no es más que numerable, de aquí se deduce finalmente que la afirmación enunciada es cierta.

De todo lo demostrado en este apartado se deduce que la imagen analítica A, considerada como un espacio topológico, posee una base numerable. En efecto, para obtener tal base agregamos al conjunto E de todos los elementos regulares cuyas coordenadas ambas son racionales, el conjunto de todos los elementos regulares, con el centro $z = \infty$ y, por fin, el conjunto de todos los elementos irregulares. El conjunto de todos los elementos enumerados es numerable.

Para cada uno de éstos consideramos el conjunto de todos sus entornos con radios racionales. El conjunto B de todos los entornos obtenidos de este modo es numerable.

Demostremos que éste es una base para A. En efecto, sea U_0 un ρ_0-entorno de un elemento arbitrario $e_0 \in A$. Si e_0 es un elemento irregular, entonces su ρ-entorno, para el cual $0 < \rho < \rho_0$ y ρ es racional, pertenece al conjunto B y está contenido en U_0. Si e_0 es un elemento regular, entonces en su $\frac{\rho_0}{2}$-entorno se puede elegir un elemento e' (también regular) cuyas coordenadas del centro sean racionales. Debido a la elección del elemento e', su radio será mayor que $\frac{\rho_0}{2}$. Sea ρ un número racional tal, que $|z_0 - z'| < \rho < \frac{\rho_0}{2}$ (z' es el centro del elemento e'). Entonces el círculo $|z - z'| < \rho$ contiene a z_0 y está contenido en el círculo $|z - z_0| < \rho_0$. Por consiguiente, el ρ-entorno del elemento e' pertenece a B, está contenido en U_0 y contiene al elemento e_0. Queda demostrado que B es una base numerable del espacio A.

Demostremos, finalmente, que la imagen analítica A representa un espacio conexo. Supongamos que esto no es así. Entonces A se puede dividir en dos conjuntos no vacíos A_0 y A' disjuntos, ninguno de los cuales contiene elementos de acumulación del otro. Supongamos que $e_0 \in A$ y $e' \in A'$. En virtud de las propiedades de los conjuntos A y A', tiene que existir un entorno del elemento e_0 que pertenece a A_0 y un entorno del elemento e' que pertenece a A'. Tomemos en estos sendos elementos regulares. Tendremos los elementos regulares $\varepsilon_0 \in A_0$ y $\varepsilon' \in A'$. Según lo demostrado en este apartado tiene que existir una cadena $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \varepsilon'$ que une ε_0 con ε', en la cual los elementos $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ y, por consiguiente, todos los elementos de la cadena, son regulares. Como el primero y último elementos de la cadena pertenecen a distintos conjuntos A_0 y A', tiene que haber en ella dos elementos vecinos ε_j y ε_{j+1} tales que uno de ellos —sea ε_j— pertenece a A_0 y el otro a A'. Representemos por g el recinto formado por los círculos de estos elementos (éste, verdaderamente, es un recinto, o sea un conjunto abierto y conexo, puesto que los círculos de los elementos ε_j y ε_{j+1} tienen una parte común). A cada punto $\zeta \in g$ le corresponde un elemento ε, y sólo uno, que tiene el centro en este punto y está subordinado a ε_j o a ε_{j+1} (en la parte común de los círculos está subordinado a ε_j y a ε_{j+1} simultáneamente). Por esto, todos los puntos del recinto g se dividen en dos clases: a_0 y a', según que sean centros de los elementos ε de A_0 o de A'. Como los conjuntos a_0 y a' no son vacíos y son disjuntos y el conjunto g es conexo, al menos uno de ellos, por ejemplo, a_0, tiene que contener puntos de acumulación del otro. Supongamos, por ejemplo, que el punto $\alpha_0 \in a_0$ es un punto

de acumulación para a'. Entonces su elemento correspondiente del conjunto A_0 tiene que ser de acumulación para los elementos del conjunto A', y resulta una contradicción con la hipótesis hecha. Por consiguiente, la imagen analítica, considerada como un espacio topológico, es conexa.

Hagamos un resumen de lo establecido en el presente apartado y en el anterior. La imagen analítica es un T_2-espacio, si se introduce en ella de un modo adecuado el concepto de entornos de sus elementos. Este espacio es localmente homeomorfo al círculo (del plano finito), posee una base numerable y es conexo. Por lo tanto, cada imagen analítica se puede considerar como una superficie.

5.8. Demostremos que es natural considerar a cada imagen analítica como una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra. Sea A una imagen analítica. Pongamos en correspondencia a cada elemento $e_0 \in A$ su centro z_0. Resulta una transformación unívoca $z_0 = \varphi(e_0)$ de la imagen analítica dada en la esfera. Esta transformación es continua en cada elemento e_0, pues, para cualquier $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, el ε-entorno del elemento e_0 se transforma en un ε-entorno del punto z_0. Demostremos que la transformación $z = \varphi(e)$ es interior y que, por consiguiente, convierte a A en una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra.

Respecto de cada elemento $e \in A$ o de cada conjunto $E \subset A$, diremos que éstos *están situados sobre sus imágenes* $z = \varphi(e)$ o $G = \varphi(E)$. Cuando la transformación $z = \varphi(e)$ sea homeomorfa sobre E, diremos que E está situado «*univalentemente*» sobre $G = \varphi(e)$ (o que forma una hoja).

Ordenemos de algún modo todos los puntos de la esfera, sobre los que están situados elementos ramificados de la imagen analítica A: $\alpha_1, \alpha, \ldots, \alpha_n, \ldots$ (puede haber un conjunto finito o numerable de tales puntos) y consideremos una sucesión $\{\tau_n\}$ de triangulaciones de la esfera que satisfaga a las condiciones siguientes:

a) la triangulación τ_{n+1} se obtiene de τ_n mediante una subdivisión de los triángulos de la triangulación τ_n, donde todos los vértices de los triángulos de τ_n son también vértices de los triángulos de τ_{n+1} y cada uno de los últimos triángulos está contenido en cierto triángulo de τ_n (los triángulos se entienden como conjuntos cerrados);

b) el punto α_n se encuentra entre los vértices de los triángulos de la triangulación τ_n $(n = 1, 2, \ldots)$;

c) el diámetro máximo de los triángulos de la triangulación τ_n tiende a cero cuando n crece indefinidamente.

Tomemos en A todos los conjuntos de elementos que están situados «univalentemente» sobre los triángulos de la triangulación τ_1, y conservemos solamente aquellos que, o no contienen en general

elementos ramificados, o bien contienen solamente un elemento ramificado que está situado sobre el punto α_1. Evidentemente, todos estos conjuntos son triángulos en la superficie A, y el elemento ramificado sólo puede estar situado en un vértice de un triángulo. Representemos por T_1 el conjunto de todos estos triángulos. En general, si ya se han elegido en A ciertos conjuntos de triángulos $T_1, T_2, \ldots, T_n$, definamos un nuevo conjunto T_{n+1}, incluyendo en éste todos los triángulos que están «univalentemente» situados sobre los triángulos de τ_n y que no están contenidos en los triángulos de los conjuntos $T_1, T_2, \ldots, T_n$ donde cada uno de ellos contiene no más de un elemento ramificado; además, estos últimos tienen que estar situados sobre los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Esta definición recurrente suministra una sucesión $\{T_n\}$ de conjuntos de triángulos en A. Designemos con T el conjunto de todos estos triángulos, y demostremos que cualquier elemento $e_0 \in A$ pertenece al menos a uno de los triángulos del conjunto T. Supongamos primero que e_0 es un elemento no ramificado con el centro z_0; entonces $z = \varphi(e)$ realiza una transformación biunívoca y bicontinua de cualquier ρ-entorno de e_0 en el círculo $|z - z_0| < \rho$. Si n es tan grande que los diámetros de los triángulos de τ_n son todos menores que ρ, entonces todos los triángulos $\delta \in \tau_n$ que contienen al punto z_0 estarán contenidos en el círculo $|z - z_0| < \rho$. Por ello, sus preimágenes Δ en el ρ-entorno del elemento e_0 se transforman en δ mediante $z = \varphi(e)$ de tal modo que esta transformación es un homeomorfismo y, por consiguiente, Δ son triángulos que están situados «univalentemente» sobre δ. Como Δ consta solamente de elementos regulares, éstos tienen que pertenecer al conjunto T_n, claro, si no están contenidos en alguno de los conjuntos $T_1, \ldots, T_{-n1}$; en este caso todos los triángulos Δ contienen al elemento dado e_0.

Supongamos que e_0 es un elemento ramificado de orden ν, situado sobre el punto α_m. De las condiciones b) y a) se deduce que para todos los $n \geqslant m$ el punto α_m es un vértice de los triángulos del sistema τ_n. Fijando un ρ-entorno del elemento e_0, elijamos ahora n tan grande que todos los triángulos de τ_n con el vértice α_m estén contenidos en el círculo $|z - z_0| < \rho$, y sea δ cualquiera de estos triángulos. La suma ν-forme de la serie que representa al elemento e_0 se descompone en el recinto δ en ν ramas analíticas uniformes. Los elementos de cada una de éstas $f_j(z)$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ están situados uno a uno sobre los puntos del triángulo δ y el conjunto de los mismos Δ_j se transforma biunívoca y bicontinuamente en δ. Por esta razón, sobre δ están situados «univalentemente» ν triángulos distintos Δ_j que están contenidos en el ρ-entorno considerado de e_0. Cada uno de ellos contiene un solo elemento ramificado, precisamente e_0, el cual representa el vértice común de estos triángulos (éstos no tienen otros elementos comunes).

De todo lo expuesto se deduce que los triángulos Δ_j ($j = 1, 2, \ldots, \nu$) pertenecen al conjunto T_n, si es que no pertenecen a alguno de los conjuntos $T_1, \ldots, T_{n-1}$.

En resumen, para cualquier elemento $e_0 \in A$ existen triángulos del sistema T que contienen a e_0. Hemos obtenido un sistema de triángulos que cubren toda la superficie A; además, en cada triángulo de este sistema la transformación $z = \varphi(e)$ es homeomorfa. También es homeomorfa en un entorno de cada punto frontera de los triángulos obtenidos que sea distinto de los vértices, puesto que todos estos puntos son regulares (véase el ap. 5.4).

Ahora bien, formalmente, todo lo demostrado no es bastante para asegurar que $z = \varphi(e)$ es una transformación interior, puesto que, generalmente, el sistema T no realiza una triangulación de la superficie A. Comprobemos que se puede obtener de T una triangulación de la imagen analítica A haciendo una subdivisión de los triángulos de este sistema. Obsérvese primero que dos triángulos distintos de T no tienen puntos interiores comunes. Supongamos lo contrario: sean $\Delta' \in T_m$ y $\Delta'' \in T_n$ dos triángulos situados sobre $\delta' \in \tau_m$ y $\delta'' \in \tau_n$, respectivamente, que tienen un punto (un elemento) interior común ε situado sobre un punto ζ. Entonces los triángulos δ' y δ'' tienen el punto interior común ζ. Por ello, éstos tienen que pertenecer a distintas triangulaciones ($m \neq n$) y uno de ellos tiene que estar contenido en el otro, por ejemplo, $\delta'' \subset \delta'$, lo cual es posible sólo si $n > m$. Los elementos de Δ' y Δ'' determinan dos funciones uniformes y analíticas $f_1(z)$ y $f_2(z)$ en los recintos simplemente conexos δ' y δ''. Como estas funciones coinciden en un entorno del punto ζ, éstas tienen que coincidir también en todo el triángulo δ'', de donde se deduce que todos los elementos que forman Δ'' están contenidos en Δ' y, por lo tanto, $\Delta'' \subset \Delta'$. Pero esto contradice a la definición del conjunto de triángulos T_n, pues, si $n > m$ ninguno de los triángulos T_n puede estar contenido en los triángulos de T_m.

Demostremos que cada elemento posee un entorno que se cubre por una cantidad finita de triángulos de T. En efecto, al demostrar la existencia de los triángulos de T, a los cuales pertenece e_0, se observó que para un número suficientemente grande n existe un entorno del elemento e_0 que se cubre por una cantidad finita de triángulos de T: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$. Estos últimos agotan todos los triángulos del sistema T que cubren este entorno. En efecto, cualquiera de estos triángulos tiene que tener un punto interior común con uno de los triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ y, por consiguiente, coincide con él. Una vez establecido esto, consideremos cualquier triángulo $\Delta \subset T$ y situado sobre un triángulo δ de la esfera; en virtud de lo expuesto, la frontera del triángulo Δ puede contener solamente una cantidad finita de vértices de los triángulos del

sistema T. Supongamos que éstos están situados sobre los puntos frontera $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ del triángulo δ. Fijemos en el interior de δ un punto arbitrario ζ y unámoslo mediante arcos de Jordan con todos los puntos $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Exigiremos que estos arcos no tengan otros puntos comunes más que ζ, y que cada uno de ellos no tenga otros puntos comunes con la frontera del triángulo δ más que su extremo ζ_j $(j = 1, \ldots, n)$. Estos arcos dividen a δ en n triángulos con el vértice común ζ. Respectivamente, el triángulo Δ se divide en n triángulos $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, situados sobre los triángulos $\delta_1, \ldots, \delta_n$. Si se efectúa semejante construcción sobre todos los triángulos que forman T (los cuales, según lo expuesto en el apartado anterior y la construcción misma, no hay más que un conjunto numerable), entonces, debido a todo lo establecido en el presente apartado, resulta una triangulación de la superficie A. Como en cada triángulo de la triangulación, la transformación $z = \varphi(e)$ es homeomorfa, siendo homeomorfa también en un entorno de cada punto frontera de los triángulos, que sea distinto de los vértices (todos los puntos de ramificación están contenidos en el conjunto de los vértices), resulta que $z = \varphi(e)$ es una transformación interior.

Así, pues, la transformación $z = \varphi(e)$, que pone en correspondencia a cada elemento de la imagen analítica A el centro de este elemento, convierte a A en una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra. De lo expuesto se deduce que sus puntos de ramificación son todos los elementos ramificados de A, y únicamente ellos, coincidiendo el orden de un punto de ramificación con el orden de ramificación del elemento correspondiente. La transformación interior $z = \varphi(e)$, que está estrechamente ligada con la definición misma de la superficie A, es analítica en A (a excepción de puntos aislados, que son polos de la transformación $z = \varphi(e)$), debido a la teoría general de las funciones. Se obtiene otra función analítica, tan estrechamente ligada con la definición de imagen analítica como la anterior, al poner en correspondencia a cada elemento e_0 que se expresa por la serie $\sum_{n=m}^{\infty} a_n (z-z_0)^{\frac{n}{\nu}}$ (o por la serie $\sum_{n=m}^{\infty} a_n z^{-\frac{n}{\nu}}$), el valor de este elemento en su centro, es decir, el número a_0 si $m \geqslant 0$, y ∞ si $m < 0$. Designando este valor con w: $w = \psi(e)$, obtenemos de nuevo una función uniforme y analítica en A, a excepción de polos. Su analiticidad es debida a que, en un entorno de cada elemento de A, $\psi(e)$ es desarrollable en serie de potencias enteras del parámetro local correspondiente. Si e_0 es un elemento no ramificado de centro finito, el parámetro local t es igual a $z - z_0$ y para $\psi(e)$ obtenemos la siguiente expresión en un entorno del

punto e_0:

$$\psi(e) = \psi^*(t) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=m}^{\infty} a_n t^n.$$

En efecto, los valores de los elementos de un entorno del elemento e_0, es decir, de los elementos subordinados a e_0, tienen que coincidir en los centros de estos elementos con los valores que toma en estos mismos puntos la suma de la serie que expresa a e_0. Análogamente, en un entorno de un elemento no ramificado e_0 con el centro en el punto del infinito, $t = \frac{1}{z}$ y para $\psi(e)$ obtenemos:

$$\psi(e) = \psi^*(t) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n t^n.$$

En el caso de un elemento ramificado, se tiene:

$$t = (z - z_0)^{\frac{1}{\nu}} \quad (\text{o } t = z^{-\frac{1}{\nu}})$$

y para $\psi(e)$ obtenemos de nuevo:

$$\psi(e) = \psi^*(t) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n t^n.$$

Extendiendo el concepto de función meromorfa a las funciones que son analíticas, a excepción de polos, en la superficie de Riemann, llamaremos a éstas meromorfas en esta superficie. Entonces, se puede hacer el siguiente resumen de los resultados obtenidos: *toda imagen analítica A representa una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra. Haciendo corresponder a los elementos $e \in A$ sus centros z o los valores w de los elementos en estos centros, obtenemos dos funciones meromorfas en A*: $z = \varphi(e)$ *y* $w = \psi(e)$.

Aclaremos lo expuesto con un ejemplo. Sea $w = f(z) \not\equiv$ const una función meromorfa en el plano finito. En el ap. 3.4 se vio que tal función realiza una transformación interior del plano finito y, por consiguiente, determina una superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra. Comprobemos que esta superficie coincide con aquella que resulta al considerar el conjunto de todos los elementos de la función $z = f^{-1}(w)$ como una imagen analítica A y al convertir después esta imagen en una superficie de Riemann del modo expuesto en el presente apartado. En efecto, en un caso la superficie de Riemann se obtiene del plano finito (los elementos son puntos) mediante la transformación interior $w_0 = f(z_0)$, en el segundo caso, dicha superficie se obtiene de la imagen analítica A (los elementos son series de potencias generalizadas, dispuestas según las potencias de $w - w_0$) mediante la transformación interior que hace corresponder a cada elemento e_0 su centro w_0. Comprobemos que las dos superficies son idénticas hallando una transformación homeomorfa de la segunda sobre la primera, de modo que una de las

transformaciones interiores se convierta en la otra. La transformación homeomorfa pedida $z_0 = F(e_0)$ se obtiene haciendo corresponder al elemento e_0 que se expresa por la serie $\sum_{n=m}^{\infty} a_n (w-w_0)^{\frac{n}{\nu}}$ (o por la serie $\sum_{n=m}^{\infty} a_n w^{-\frac{n}{\nu}}$), el valor de la suma de la serie en el punto w_0, es decir, el valor correspondiente de la función $z_0 = f^{-1}(w_0)$.

La transformación de la imagen analítica A en el plano finito, obtenida de este modo, es uniforme y continua. Pero es también biunívoca, puesto que la función $w = f(z)$ es uniforme y, por consiguiente, cualquier punto dado $z_0 \neq \infty$ determina completamente el elemento de esta función con el centro z_0 y, a la vez, también el elemento e_0 de la función inversa.

Finalmente, la transformación inversa $e_0 = F^{-1}(z_0)$ también es continua, puesto que para cualquier ρ-entorno del elemento e_0 se puede señalar un entorno del punto z_0 tal, que todos los valores correspondientes de $w = f(z)$ caigan en el círculo $|w - w_0| < \rho$ (o en el recinto $|w| > \rho$ si $w_0 = \infty$) y, por consiguiente, los elementos e con el centro w caigan en el entorno dado del elemento e_0.

En resumen, las superficies de infinitas hojas, obtenidas en el ap. 3.4 mediante las transformaciones $w = e^z$ o $w = \operatorname{sen} z$ del plano finito, coinciden con las superficies que representan las imágenes analíticas formadas por todos los elementos de Ln w o de Arcsen w. Poniendo en correspondencia a cada elemento de la primera de estas imágenes el valor z o el valor w, obtenemos la función $z = \operatorname{Ln} w$ o la función $w = e^z$, respectivamente, como funciones uniformes y analíticas de los elementos de la imagen. Del mismo modo, en la segunda imagen obtenemos las funciones uniformes $z = \operatorname{Arcsen} w$ o $w = \operatorname{sen} z$.

§ 6. PUNTOS SINGULARES. FUNCIONES ALGEBRAICAS

6.1. Ya nos encontramos con el concepto de punto singular en distintos lugares del presente curso. En los casos más simples éste era un punto singular aislado de carácter uniforme o un punto de ramificación. En cada uno de ellos la función dejaba de ser analítica por causas muy sencillas: porque se perdía la continuidad (polo, punto singular esencial), o porque en cualquier entorno del punto la función no era uniforme (punto de ramificación). El concepto de punto singular de un elemento (circular) de una función analítica era de un carácter más general. Este punto, situado en la frontera del círculo de convergencia del elemento, se definía como un punto tal que en un entorno del mismo no se puede señalar una función uniforme y analítica que coincida con los valores del elemento dado en la parte común del círculo de convergencia y del

entorno considerado. Particularmente, éste podría ser un polo, un punto singular esencial o un punto de ramificación.

Ahora, basándose en la teoría de la prolongación analítica, ha llegado la hora de desarrollar el concepto general de punto singular de una función analítica que abarque como casos particulares los tipos especiales anteriores.

Sea e_0 un elemento circular regular con el centro z_0 y sea L una curva continua: $z = \lambda(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, con el origen en el punto z_0. Si es posible la prolongación analítica del elemento e_0 a lo largo de toda la curva L, se dice que todos los puntos de la curva L son regulares (respecto de la prolongación considerada). En caso contrario, existe un número τ, $\alpha < \tau \leqslant \beta$, tal, que es posible la prolongación a lo largo de cualquier arco $L_{[\alpha, t]}$ para $t < \tau$ y es imposible a lo largo del arco $L_{[\alpha, \tau]}$. En este caso el punto de la curva L que se determina por el valor del parámetro $t = \tau$, se llama punto singular respecto de la prolongación considerada (todos los puntos que le preceden son regulares). Expresándose descriptivamente: un punto singular de una función analítica es un obstáculo en el camino de

un entorno del punto z_0 y examinando después la función $f(\zeta + e^t)$ en un entorno del punto t_0 (los valores de la rama en el punto z_0). Como e_0 se puede prolongar analíticamente a lo largo de todas las curvas pertenecientes a G, resulta que ε_0 también se puede prolongar analíticamente a lo largo de todas las curvas pertenecientes a D. En virtud del teorema de monodromia, resulta una función $f^*(t)$ uniforme y analítica en el semiplano. Esta función es el resultado de la transformación de $f(z)$ mediante $t = \mathrm{Ln}(z - \zeta)$, es decir, $f^*(t) = f(\zeta + e^t)$.

Respecto de $f^*(t)$ son posibles las siguientes hipótesis:

1) esta función posee un período múltiplo de $2\pi i$;

2) no posee un período de esta forma.

Examinemos primero el caso 1). Sea $\omega = 2k\pi i$ (k es un número natural) un período de la función $f^*(t)$, y supongamos que ningún número de la forma $2n\pi i$, donde n es un número natural menor que k, es período de $f^*(t)$. Entonces $f^*(t + 2k\pi i) = f^*(t)$ para cualquier $t \in D$ y, cualquiera que sea el número natural $n < k$, no puede cumplirse la igualdad

$$f^*(t + 2n\pi i) = f^*(t)$$

para todos los t, y tampoco para un conjunto infinito de valores de t con un punto de acumulación en el semiplano $\mathrm{Re}\, t < \ln \rho$ (en caso contrario, en virtud del teorema interior de unicidad, se cumpliría la igualdad para todos los t, y $2n\pi i$ sería un período de la función $f^*(t)$). El cambio de t_0 por $t_0 + 2k\pi i$ bajo el signo de la función $f^*(t)$ puede ser obtenido mediante su prolongación analítica a lo largo de cualquier curva continua que una t_0 con $t_0 + 2k\pi i$. A este cambio le corresponde la prolongación analítica del elemento e_0 a lo largo de una curva cerrada que comienza y termina en el punto z_0. Recorriendo esta curva se efectúa un recorrido k-ple alrededor del punto ζ en sentido positivo, puesto que $\mathrm{Im}\,[\mathrm{Ln}\,(z - \zeta)] = \mathrm{Im}\, t$ aumenta en este caso en $2k\pi$. Como se ha supuesto que la función $f^*(t)$ es periódica, los valores del elemento que se obtiene como resultado de la prolongación del elemento e_0 a lo largo de la curva indicada, tienen que coincidir en un entorno del punto z_0 con los valores correspondientes del elemento e_0. Por ello, los mismos elementos tienen que coincidir. Evidentemente, la misma conclusión es cierta también respecto de cualquier elemento e_1 con el centro z_1 que se obtiene de e_0 mediante la prolongación a lo largo de una curva Λ perteneciente al recinto G: prolongando e_1 a lo largo de una curva cerrada L_1 con el origen y el extremo en el punto z_1, la cual efectúa k vueltas alrededor del punto ζ, volvemos a obtener el elemento inicial e_1. Además, no existe un elemento e' que pueda convertirse en sí mismo al efectuar la prolongación a lo largo de una curva cerrada L' perteneciente a G y que de menos de k vueltas

(pero no menos de una vuelta) alrededor de ζ. Obsérvese que a la prolongación de un elemento e' a lo largo de una curva cerrada que pertenezca al recinto G y no de ninguna vuelta alrededor de ζ, le corresponde en el plano t una prolongación a lo largo de una curva cerrada perteneciente a D y, por consiguiente, el resultado de la prolongación del elemento e' a lo largo de tal curva siempre coincide con e'.

Si $k = 1$, o sea, si $f^*(t)$ es de período $2\pi i$, entonces la prolongación de cualquiera de los elementos de la función $f(z)$ a lo largo de cualquier curva cerrada perteneciente a G, da un resultado que coincide con el elemento inicial. En otras palabras, la función $f(z)$ es en este caso uniforme y analítica en todo el recinto G. El punto ζ es para ésta un punto regular o un punto singular aislado de carácter uniforme, según que sea posible la prolongación del elemento e_0 a lo largo de alguna curva continua que pase por el punto ζ, o que no sea posible la prolongación del elemento e_0 a lo largo de una de tales curvas. Por consiguiente, si $k = 1$ la función $f(z)$ se expresa en el recinto G por una serie de Laurent (en particular, por una serie de Taylor dispuesta según las potencias de $z - \zeta$).

Sea $k > 1$, de modo que $2\pi i$ no es un período de la función $f^*(t)$. Entonces la función $f(z)$ es multiforme, es precisamente k-forme. En efecto, para cualquier $t \in D$ las sucesiones de los coeficientes de Taylor de los desarrollos de la función $f^*(t)$ en los entornos de los puntos t, $t + 2\pi i$, . . ., $t + (k - 1)\, 2\pi i$ no pueden coincidir por completo, es decir, tienen que diferenciarse entre sí por lo menos en un coeficiente. De aquí se deduce que para cada punto $z \in G$ existen k elementos distintos de la función $f(z)$ con el centro z. Como $2k\pi i$ es un período de la función $f^*(t)$, existen no más de k elementos distintos de la función $f(z)$ que tienen un centro dado. En resumen, $f(z)$ es una función k-forme que es analítica en el recinto G. Si e es uno de sus elementos, entonces pueden obtenerse todos los demás $k - 1$ elementos con el mismo centro prolongando e en el recinto G a lo largo de curvas continuas cerradas que efectúen alrededor del punto ζ 1, 2, . . ., $k - 1$ vueltas, respectivamente, en un mismo sentido.

En este caso, ζ es un punto de ramificación de orden finito $k - 1$.

Para obtener la expresión analítica de la función $f(z)$ en un entorno del punto ζ, realicemos la transformación $(z - \zeta)^{-\frac{1}{k}} = \mathfrak{z}$. Entonces el recinto G se transforma en el recinto G_1: $0 < |\mathfrak{z}| < R^{\frac{1}{k}}$ y la función $f(z)$ se convierte en la función $f_1(\mathfrak{z})$. Se obtiene esta última prolongando uno de sus elementos a lo largo de todas las curvas posibles pertenecientes al recinto G_1. En el plano de la variable $\tau = \operatorname{Ln} \mathfrak{z} = \frac{1}{k} t$ a ésta le corresponde una función uniforme y

analítica $f_1^*(\tau) = f^*\left(\frac{1}{k}t\right)$ de período $2\pi i$; de aquí, según lo anterior, se deduce que $f_1(\mathfrak{z})$ es una función uniforme y analítica en el recinto G_1. Para esta última obtenemos un desarrollo de la forma

$$f_1(\mathfrak{z}) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n \mathfrak{z}^n,$$

y, por consiguiente,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n (z-\zeta)^{\frac{n}{k}}.$$

Tal es la forma general de las funciones analíticas en un entorno de un punto de ramificación de orden finito $k-1$.

Si $f(z)$ posee un límite finito o infinito en el punto ζ, entonces esto mismo se verifica también para $f_1(\mathfrak{z})$ en el origen de coordenadas, de donde se deduce que entre los coeficientes α_n de subíndice negativo solamente una cantidad finita de ellos son distintos de cero. El punto de ramificación se llama en este caso p u n t o a l g e b r a i c o d e r a m i f i c a c i ó n. Si $f(z)$ no posee límite en el punto ζ, entonces lo mismo es cierto también para $f_1(\mathfrak{z})$ en el origen de coordenadas, de donde se deduce que entre los coeficientes α_n de subíndice negativo hay un conjunto infinito de ellos que son distintos de cero. El punto de ramificación pertenece en este caso a la categoría de t r a s c e n d e n t e s. Así, por ejemplo, las funciones $\sqrt[k]{z}$ y $\exp(\sqrt[k]{z})$ tienen un punto algebraico de ramificación en el origen de coordenadas, mientras que la función $\exp\left(\frac{1}{\sqrt[k]{z}}\right)$ tiene en el mismo un punto trascendente de ramificación; el orden del punto en todos estos ejemplos es el mismo e igual a $k-1$.

Analicemos, finalmente, el caso en que la función $f^*(t)$ no tiene un período de la forma $2k\pi i$ (k es natural). Entonces las sucesiones de los coeficientes de los desarrollos de Taylor de la función $f^*(t)$ en los entornos de cualesquiera de los puntos t, $t+2\pi i$, $t-2\pi i$, $t+4\pi i$, $t-4\pi i$, . . . no pueden coincidir por completo, es decir, tienen que diferenciarse entre sí por lo menos en un coeficiente. De aquí se deduce que para cualquier $z \in G$ existe un conjunto infinito de elementos distintos de la función $f(z)$ con este centro y, por consiguiente, $f(z)$ es una función de z de infinitas hojas en cualquier entorno del punto ζ. De un elemento cualquiera de la función $f(z)$ con el centro dado se puede pasar a cualquier otro con el mismo centro mediante la prolongación analítica a lo largo de una curva cerrada que de una cantidad determinada de vueltas alrededor del punto ζ. La prolongación a lo largo de curvas que no den ninguna vuelta alrededor de este punto (es decir, que al recorrerlas sea igual

a cero la Var Arg $(z - \zeta)$, no varía el elemento inicial. Por ello, en el caso dado el punto ζ también es un punto de ramificación de la función $f(z)$ y, además, de orden infinito. Tal género de puntos también se consideran como puntos trascendentes de ramificación y se denominan **logarítmicos**.

La expresión analítica de la función en un entorno de un punto logarítmico puede obtenerse, por ejemplo, transformando el semiplano D en un círculo mediante $\tau = \frac{t-\alpha}{t+\alpha}$, donde α es un punto cualquiera perteneciente a D. Entonces $f^*(t)$ se convierte en una función $F(\tau)$ uniforme y analítica en un entorno del origen de coordenadas. Por esto, para $F(\tau)$ se tiene el desarrollo

$$F(\tau) = \sum_0^\infty A_n \tau^n,$$

de donde

$$f^*(t) = \sum_0^\infty A_n \left(\frac{t-\alpha}{t+\alpha}\right)^n$$

y, finalmente,

$$f(z) = \sum_0^\infty A_n \left[\frac{\mathrm{Ln}(z-\zeta)-\alpha}{\mathrm{Ln}(z-\zeta)+\alpha}\right]^n.$$

Por cierto, este desarrollo es de poco uso en las aplicaciones. En casos particulares, para la función $f(z)$ en un entorno de un punto singular logarítmico se pueden obtener unos desarrollos más simples y más cómodos. He aquí dos ejemplos.

Ejemplo 1. La función $f(z)$ adquiere un sumando constante A al hacer un recorrido simple (de una vuelta) alrededor del punto ζ en sentido positivo. Entonces $f(z) - \frac{A}{2\pi i}\mathrm{Ln}(z-\zeta)$ no varía al hacer tal recorrido y, por consiguiente, representa una función uniforme y analítica en un recinto de la forma $0 < |z-\zeta| < R$. Por ello, para $f(z)$ se verifica el desarrollo

$$f(z) = \frac{A}{2\pi i}\mathrm{Ln}(z-\zeta) + \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-\zeta)^n.$$

Ejemplo 2. La función $f(z)$ adquiere un factor constante $a \neq 0$ al hacer un recorrido simple alrededor del punto ζ en sentido positivo. Entonces

$$f(z)\exp\left[-\frac{\ln a}{2\pi i}\mathrm{Ln}(z-\zeta)\right] = f(z)(z-\zeta)^{-\frac{\ln a}{2\pi i}}$$

no varía al hacer tal recorrido y, por consiguiente, para $f(z)$ se verifica el desarrollo

$$f(z)=(z-\zeta)^{\frac{\ln a}{2\pi i}}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_n(z-\zeta)^n.$$

Todo lo expuesto aquí respecto de los puntos de ramificación se refería al caso de un punto finito ζ. Sin embargo, las definiciones y deducciones se extienden inmediatamente al caso del punto del infinito haciendo el cambio de $z-\zeta$ por $\frac{1}{z}$.

6.2. La definición de punto singular, dada en el precedente apartado, no es todavía completa, puesto que no contiene las condiciones según las cuales dos puntos singulares, definidos de modos distintos, tienen que considerarse como idénticos. Completémosla con la siguiente condición.

Sean e_1, e_2 dos elementos circulares regulares de una función analítica completa y sean L_1: $z=\lambda_1(t_1)$, y L_2: $z=\lambda_2(t)$ dos curvas continuas que partan de sus centros z_1, z_2 y que tengan al menos un punto común ζ_0, que corresponde a los valores de los parámetros $t_1=\tau_1$ y $t_2=\tau_2$. Supongamos que este punto es singular para la prolongación de e_1 a lo largo de L_1 y de e_2 a lo largo de L_2. Si para cualquier entorno del punto ζ_0 existe un $\varepsilon>0$ tal, que el elemento obtenido de e_1 mediante la prolongación a lo largo de L_1 hasta algún punto $z'=\lambda_1(t')$, $\tau_1-\varepsilon<t'<\tau_1$, puede ser prolongado a lo largo de cierta curva, perteneciente al entorno dado, obteniendo el elemento que resulta de e_2 mediante su prolongación a lo largo de L_2 hasta algún punto $z''=\lambda_2(t'')$, $\tau_2-\varepsilon<t''<\tau_2$ (y recíprocamente), entonces el punto singular $\zeta_0=\lambda_1(\tau_1)=\lambda_2(\tau_2)$ se considera como un m i s m o p u n t o s i n g u l a r de la función analítica completa correspondiente. Si no se cumplen las condiciones indicadas, se dice que hay dos puntos singulares d i s t i n t o s de la función analítica que tienen un mismo afijo ζ_0.

Para ilustrar esto, consideremos la función

$$f(z)=\frac{1}{(1+\sqrt{z})(1+\sqrt[6]{z})}.$$

Sea $L_1=L_2$ la circunferencia unidad, recorrida simplemente en sentido positivo, comenzando desde el punto $z=1$. Designemos con e_1 el elemento que representa la rama uniforme de esta función determinada en un entorno del punto $z=1$ por las condiciones:

$$\sqrt{z}=\sqrt[+]{|z|}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\arg z\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\arg z\right)\right],$$

$$\sqrt[6]{z}=\sqrt[6]{|z|}_{+}\left[\cos\left(\frac{1}{6}\arg z\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{6}\arg z\right)\right].$$

Como resultado de la prolongación analítica a lo largo de L (la prolongación analítica siempre es una prolongación continua) $\sqrt{z}$ se convierte en

$$-\underset{-}{\sqrt{|z|}}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\arg z\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\arg z\right)\right]$$

y, por lo tanto, los valores de $f(z)$ tienden al infinito cuando $z \to 1$. De aquí se deduce que $z = 1$ es un punto singular para la prolongación considerada.

Designemos ahora con e_2 el elemento que representa aquella rama uniforme de la función $f(z)$ en un entorno del punto $z = 1$ que se define por las condiciones

$$\sqrt{z}=\underset{+}{\sqrt{|z|}}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\arg z\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\arg z\right)\right],$$

$$\sqrt[6]{z}=\underset{-}{\sqrt[6]{z}}\left[\cos\left(\frac{1}{6}\arg z+\frac{4\pi}{6}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{6}\arg z+\frac{4\pi}{6}\right)\right].$$

Después de la prolongación a lo largo de L_2 $\sqrt{z}$ se convierte en

$$-\underset{+}{\sqrt{|z|}}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\arg z\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\arg z\right)\right],$$

y $\sqrt[6]{z}$ se convierte en

$$-\underset{+}{\sqrt[6]{|z|}}\left[\cos\left(\frac{1}{6}\arg z\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{6}\arg z\right)\right].$$

Por consiguiente, los valores de $f(z)$ tienden al infinito cuando $z \to 1$. De aquí que $z = 1$ también es un punto singular para esta prolongación. Fácilmente se observa que éste es distinto del punto singular indicado anteriormente. En efecto, los valores de $f(z)$, que se obtienen después de la prolongación de los elementos elegidos a lo largo de $L_1 = L_2$, pertenecen a dos ramas uniformes distintas de $f(z)$ en un entorno del punto $z = 1$:

$$f_1(z)=\left\{1-\underset{+}{\sqrt{|z|}}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\arg z\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\arg z\right)\right]\right\}^{-1}\times$$
$$\times\left\{1-\underset{+}{\sqrt[6]{|z|}}\left[\cos\left(\frac{1}{6}\arg z\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{6}\arg z\right)\right]\right\}^{-1}$$

y

$$f_2(z)=\left\{1-\underset{+}{\sqrt{|z|}}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\arg z\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\arg z\right)\right]\right\}^{-1}\times$$
$$\times\left\{1-\underset{+}{\sqrt[6]{|z|}}\left[\cos\left(\frac{1}{6}\arg z\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{6}\arg z\right)\right]\right\}^{-1}.$$

Por lo tanto, no se puede pasar de unos a otros mediante la prolongación analítica a lo largo de curvas pertenecientes a un entorno suficientemente pequeño del punto $z = 1$ (el radio del entorno no

tiene que superar a 1). De aquí se deduce que $z = 1$ representa dos puntos singulares distintos de la función $f(z)$.

El lector puede comprobar fácilmente que uno de éstos es un polo de primer orden y el otro es un polo de segundo orden.

Sea G un recinto arbitrario simplemente conexo que, para precisar, supondremos que está acotado, y sea e_0 un elemento regular con el centro en cierto punto $z_0 \in G$. Supongamos que este elemento se puede prolongar analíticamente a lo largo de cualesquiera curvas pertenecientes al recinto G. Como resultado, se obtiene una función uniforme y analítica $f(z)$. Sea ζ_0 un punto alcanzable de la frontera, determinado por un semiintervalo de Jordan $\gamma \subset G$. Si es posible la prolongación del elemento considerado de la función $f(z)$ con el centro en el punto inicial del semiintervalo γ_0 a lo largo de todo γ_0, incluyendo el punto final ζ_0, entonces para cualquier otro semiintervalo de Jordan γ que determine el mismo punto alcanzable ζ_0, también es posible la prolongación del elemento de la función $f(z)$ con el centro en el punto inicial del semiintervalo γ a lo largo de todo γ, incluyendo el punto final. Además, el resultado de la prolongación en ambos casos es el mismo.

En efecto, sea ε_0 el elemento que es el resultado de la prolongación a lo largo de γ_0. Si γ y γ_0 tienen puntos de intersección en cualquier entorno del punto ζ_0, entonces tal punto de intersección ζ existirá en el círculo de convergencia del elemento ε_0. Se puede exigir también que todo el arco $\widehat{\zeta\zeta_0}$ pertenezca a este círculo. Como la función $f(z)$ es uniforme, la prolongación a lo largo de γ_0 y γ tiene que proporcionar un mismo elemento ε con el centro ζ. Este elemento está subordinado al elemento ε_0 y, por consiguiente, agregando también un elemento ε más a la cadena de elementos que realiza la prolongación del arco γ, contando desde su punto inicial hasta el punto ζ, y observando que el arco $\widehat{\zeta\zeta_0}$ queda cubierto por los círculos de los elementos ε y ε_0, resulta una cadena que realiza la prolongación a lo largo de la curva γ (incluyendo su punto final) y que da el mismo resultado que la prolongación a lo largo de γ_0.

Supongamos ahora que γ y γ_0 no tienen puntos comunes en cierto entorno del punto ζ_0. Entonces se puede trazar una tercera curva γ' que determine el mismo punto alcanzable y tenga puntos comunes con γ_0 y γ en cualquier entorno de su extremo común ζ_0. Para convencerse de la existencia de tal curva, es suficiente realizar una transformación conforme del recinto G en el círculo y recordar que las curvas que determinan un mismo punto alcanzable corresponden a semiintervalos de Jordan del círculo unidad que terminan en un mismo punto de la circunferencia. Aplicando el resultado establecido anteriormente a γ_0 y γ', y después a γ' y γ, nos convencemos de que la proposición que se demuestra es cierta.

De lo demostrado se deduce que, si el punto alcanzable ζ_0 es un punto singular respecto de la prolongación del elemento de la función $f(z)$ a lo largo de la curva γ_0 que determina este punto alcanzable, entonces éste también es un punto singular para la prolongación de los elementos de la función $f(z)$ a lo largo de cualquier otra curva γ que determine el mismo punto alcanzable. Comprobemos que este punto singular queda siendo el mismo, independientemente de la curva $\gamma_0, \gamma, \gamma', \ldots$, (entre las que determinan el punto alcanzable dado) que se use para la prolongación. Esta afirmación es evidente cuando γ y γ_0 se cortan en cualquier entorno del punto ζ_0, como esto se deduce inmediatamente de la condición de identidad de los puntos singulares, enunciada al comienzo de este apartado. Si γ y γ_0 no tienen puntos comunes en cierto entorno del punto ζ_0, a excepción del extremo, entonces se traza una curva auxiliar γ' que tenga puntos comunes tanto con γ como con γ_0 en cualquier entorno del punto ζ_0, reduciendo el último caso al anterior.

Las proposiciones demostradas aquí justifican la división del conjunto de todos los puntos alcanzables del recinto dado en dos clases: puntos regulares y singulares de una función $f(z)$ analítica en este recinto. Precisando, un punto alcanzable es regular o singular según que sea posible o no la prolongación del elemento de la función $f(z)$ a lo largo de una curva cualquiera que determine este punto alcanzable.

El lector puede comprobar fácilmente que cuando el recinto es un círculo, la nueva definición de puntos regulares y singulares de una función analítica es equivalente a la definición dada en el ap. 6.3 del capítulo III.

Establezcamos, finalmente, el concepto de elemento frontera singular no alcanzable. Sea ε un elemento frontera del recinto G que contenga más de un punto; tal elemento necesariamente contiene puntos no alcanzables. Todo intervalo de Jordan γ que pertenece al recinto G, a excepción de sus extremos, divide a G en dos recintos. Sea g_γ aquel recinto cuya frontera contiene a ε. Supongamos que para cierto intervalo γ todos los puntos alcanzables de la frontera del recinto G que figuran en la frontera del recinto g_γ, son singulares para $f(z)$. En estas condiciones, ε se llama elemento frontera singular no alcanzable de la función $f(z)$. Si unimos mediante un arco de Jordan λ algún punto $z_0 \in g_\gamma$ con un punto no alcanzable ζ, perteneciente a ε, de tal modo que el primer punto de intersección del arco λ con la frontera del recinto g_γ pertenezca al recinto G, entonces este punto, según la hipótesis, será singular respecto de la prolongación de $f(z)$ a lo largo de λ. Por lo tanto, el mismo punto ζ no es un obstáculo inmediato para la prolongación analítica, pero a este punto le preceden obstáculos en cualquier camino que conduzca al mismo desde el recinto g_γ.

Aclaremos el concepto de elemento frontera singular no alcanzable en un ejemplo. Sea G el recinto del plano z representado en la fig. 76. Su frontera consta del arco de la curva $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ en el semiintervalo $0 < x \leqslant 1$, del segmento del eje imaginario: $x = 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, y del arco AB de la circunferencia que une los puntos $(1, \operatorname{sen} 1)$ y $(0, 1)$. Consideremos también el recinto D del plano w

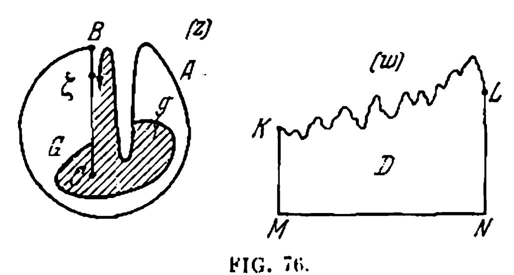


FIG. 76.

que está representado en la misma figura. Este está limitado por una curva de Jordan KL, cuyos arcos ninguno es analítico*), y por la poligonal $KMNL$. Supongamos que $w = f(z)$ transforma conformemente G en D de tal modo que los homólogos a los puntos A, B (B se considera aquí como un punto alcanzable) y C son los puntos L, M y K, respectivamente. Entonces, la imagen del segmento BC (si se le considera como formado por puntos alcanzables solamente) será el segmento MK y la imagen de la curva $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ será el arco KL. Evidentemente, cada punto de la curva $y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ es singular para la función $f(z)$ (punto singular alcanzable). En efecto, cualquier arco de esta curva (determinado por la condición $0 < \alpha \leqslant x \leqslant \beta \leqslant 1$) es regular y analítico. Si se supone que algún punto de la curva considerada es regular para $f(z)$, entonces se puede hallar un arco de esta curva en el cual $f(z)$ será analítica, y la derivada $f'(z)$ no se anulará. La imagen de tal arco en la transformación $w = f(z)$ tiene que ser también un arco regular analítico perteneciente a la curva KL. Pero esta última no contiene arcos analíticos, de donde se deduce lo que se afirmaba.

Consideremos ahora un elemento frontera e del recinto G que contenga todos los puntos del segmento BC. Entre éstos, es alcanzable solamente el punto C. Este elemento frontera figura por completo en la frontera del recinto $g \subset G$ que está rayado en la fig. 76. Además,

*) Tal curva es, por ejemplo, la gráfica de una función $y = \psi(x)$ que es continua en el segmento $a \leqslant x \leqslant b$ y no es diferenciable en ningún punto del mismo.

forman parte de la frontera del recinto g los puntos del arco $y =$ $= \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. Ya vimos que éstos son puntos singulares para $f(z)$. Por consiguiente, según la definición, e es un elemento frontera singular no alcanzable para $f(z)$. Es importante señalar que en este ejemplo todos los puntos del segmento BC, considerados como puntos frontera alcanzables del recinto G, son regulares para $f(z)$. Esto es debido a que la función $w = f(z)$ transforma el segmento rectilíneo alcanzable BC en el segmento rectilíneo KM (véase a continuación en el ap. 7.1).

6.3. El final de este párrafo lo dedicaremos al estudio de las funciones algebraicas. Consideremos una ecuación algebraica de grado n respecto de w:

$$F(z, w) \equiv p_0(z) + p_1(z) w + \ldots + p_n(z) w^n = 0, \qquad (6.3:1)$$

donde $p_j(z)$ ($j = 0, \ldots, n$) son polinomios en z, siendo $p_n(z) \not\equiv 0$ y los polinomios $p_0(z), p_1(z), \ldots, p_n(z)$ no poseen un divisor común de grado mayor que cero, es decir, no poseen ceros comunes. Supondremos también que la ecuación (6.3:1) es i r r e d u c i b l e, o sea, que el polinomio $F(z, w)$ no puede expresarse en la forma $F(z, w) = F_1(z, w) F_2(z, w)$, donde $F_1(z, w)$ y $F_2(z, w)$ son polinomios de grados menores que n respecto de w. Si no se cumple esta condición, entonces la ecuación dada puede sustituirse por dos ecuaciones de grado inferior respecto de w

$$F_1(z, w) = 0 \quad \text{y} \quad F_2(z, w) = 0$$

considerando cada una de ellas por separado para definir w en función de z.

Señalemos todos los ceros $z_1, \ldots, z_m$, distintos entre sí, del polinomio $p_n(z)$ y del polinomio $D(z)$ que es el discriminante de (6.3:1). $D(z)$ se halla excluyendo w entre las dos ecuaciones:

$$F(z, w) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F(z, w)}{\partial w} = 0.$$

Para cada punto finito z_0 del plano, distinto de z_j ($j = 1, \ldots$ $\ldots, m$), la ecuación (6.3:1) posee n raíces finitas distintas $w_1, w_2, \ldots$ $\ldots, w_n$, y la derivada

$$\frac{\partial F(z_0, w_j)}{\partial w} \neq 0 \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

En virtud del teorema de las funciones implícitas (ap. 5.5, cap. IV), en un entorno del punto z_0 existen n funciones uniformes y analíticas $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ que satisfacen a las condiciones:

$$f_j(z_0) = w_j \quad \text{y} \quad F[z, f_j(z)] = 0. \qquad (6.3:2)$$

En resumen, a cada punto z_0 del plano, distinto de z_j ($j = 1, \ldots, m$), le corresponden n, y sólo n, elementos regulares distintos con el centro en este punto, que satisfacen en un entorno del punto z_0 a la ecuación (6.3:1).

Designemos con G el recinto que se obtiene del plano finito al excluir los puntos $z_1, \ldots, z_m$, y demostremos que cada uno de los elementos $f_j(z)$ puede prolongarse analíticamente a lo largo de cualquier curva continua que pertenezca al recinto G. En efecto, sea L: $z = \lambda(t)$ ($\alpha \leqslant t \leqslant \beta$) una curva continua con el punto inicial z_0, situada en el recinto G. Supongamos que $\zeta = \lambda(\tau)$, $\alpha < \tau \leqslant \beta$, es un punto singular respecto de la prolongación analítica del elemento $f_{j_0}(z)$ a lo largo de L. Según lo establecido anteriormente, este punto posee un entorno U en el cual están definidos n elementos regulares $\varphi_j(z)$ ($j = 1, \ldots, n$) que satisfacen a la ecuación (6.3:1). Sea $z_1 = \lambda(t_1)$ un punto de la curva L, perteneciente a U, y tal que $t_1 < \tau$ y el arco $L_{[t_1, \tau]}$ está contenido en U.

Los elementos $\psi_j(z)$ con el centro en el punto z_1 que están subordinados a los elementos $\varphi_j(z)$, respectivamente, satisfacen a la ecuación (6.3:1) en el entorno del punto z_1 y son todos distintos entre sí (puesto que los elementos $\varphi_j(z)$ con el centro común ζ son todos distintos entre sí). Sea $\chi(z)$ el elemento con el centro en el punto z que se obtiene de $f_{j_0}(z)$ mediante la prolongación a lo largo de $L_{[\alpha, t_1]}$. Entonces el elemento de la función $F[z, \chi(z)]$ con el mismo centro representará el resultado de la prolongación del elemento de la función $F[z, f_{j_0}(z)]$ con el centro z_0 a lo largo de $L_{[\alpha, t_1]}$, y como $F[z, f_{j_0}(z)] = 0$ en un entorno del punto z_0, también $F[z, \chi(z)] = 0$ en un entorno del punto z_1. Pero sólo pueden existir n elementos distintos con el centro dado que satisfagan a la ecuación (6.3:1). De aquí se deduce que $\chi(z)$ coincide con uno de los elementos $\psi_j(z)$: $\psi_{k_0}(z)$. Observando que el elemento $\psi_{k_0}(z)$ está subordinado al elemento $\varphi_{k_0}(z)$ con el centro ζ y que el arco $L_{[t_1, \tau]}$ está cubierto por los círculos de los elementos $\psi_{k_0}(z)$ y $\varphi_{k_0}(z)$, sacamos la conclusión de que el elemento $f_{j_0}(z)$ se prolonga a lo largo de todo el arco $L_{[\alpha, \tau]}$ y, por consiguiente, la hipótesis de que $\zeta = \lambda(\tau)$ es un punto singular para la prolongación considerada, no es cierta.

Así, pues, queda demostrado que cualquier elemento regular que satisfaga a la ecuación (6.3:1) puede prolongarse analíticamente a lo largo de cualquier curva continua que pertenezca al recinto G; la prolongación se efectúa mediante elementos que satisfacen a la misma ecuación.

Sea $\tilde{U}_k$ un entorno del punto z_k que no contenga a los puntos z_j distintos de z_k. Tomemos uno de los elementos $f_{j_0}(z)$ con el centro en el punto $z_0 \in \tilde{U}_k$, y prolonguémoslo a lo largo de todas las curvas posibles del recinto $\tilde{U}_k$ que no pasen por z_k. Como resultado se obtiene una función $\varphi(z)$, generalmente multiforme, que satisface

a la ecuación (6.3:1):

$$F[z, \varphi(z)] = 0, \quad z \in \tilde{U}_h.$$

La función $\varphi(z)$ puede ser uniforme o multiforme, pero no más de n-forme en $\tilde{U}_k$. En el primer caso, el punto z_h *a priori* puede ser para $\varphi(z)$ o regular, o polo, o punto singular esencial. En el segundo caso, z_h será un punto de ramificación de orden finito (no superior a $n-1$). En todos los casos, $\varphi(z)$ posee en un entorno del punto z_h un desarrollo de la forma

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_j (z - z_h)^{\frac{j}{\nu}},$$

donde ν es un número natural, no mayor que n.

Demostremos que entre los coeficientes A_j de subíndice negativo solamente una cantidad finita de ellos pueden ser distintos de cero (por lo tanto, se excluyen los casos de punto singular esencial y de punto de ramificación no algebraico). Para esto es suficiente demostrar que $\varphi(z)$ tiende hacia un límite finito o infinito cuando z tiende a z_h.

Demostremos previamente el siguiente lema de la dependencia continua de las raíces de una ecuación algebraica de sus coeficientes.

L e m a. *Supongamos que los coeficientes del polinomio*

$$P(w) = c_0 + c_1 w + \ldots + c_{n-1} w^{n-1} + w^n$$

satisfacen a las condiciones $|c_j| \leqslant M$ $(j = 0, \ldots, n-1)$ $(M > 0)$. *Entonces para un k fijado,* $1 \leqslant k \leqslant n$, *y cualquier* $\varepsilon > 0$ *se puede señalar un* $\delta_h = \delta(\varepsilon; M, k)$ *tal, que si* $|c_0| < \delta_h, \ldots, |c_{h-1}| < \delta_h$ *la ecuación* $P(w) = 0$ *posee al menos k raíces que en valor absoluto son menores que* ε.

D e m o s t r a c i ó n. Sean $w_1, \ldots, w_n$ los ceros del polinomio $P(w)$, dispuestos por orden de no decrecimiento de sus módulos. Observando que para $|w| > M + 1$ se tiene:

$$|P(w)| \geqslant |w|^n \left(1 - \frac{M}{|w|} - \ldots - \frac{M}{|w|^n}\right) > |w|^n \left(1 - \frac{M}{|w| - 1}\right) > 0,$$

sacamos la conclusión de que los módulos de todos los ceros no superan a $M + 1 = M'$.

Demostremos ahora el lema por el método de inducción, comenzando desde $k = 1$.

En efecto, $c_0 = (-1)^n w_1 \ldots w_n$ y, por consiguiente,

$$|w_1| \leqslant |w_1 \ldots w_n|^{\frac{1}{n}} = |c_0|^{\frac{1}{n}} < \varepsilon,$$

si $|c_0| < \delta_1 = \varepsilon^n$.

Supongamos que ya se ha conseguido demostrar que $|w_1|, \ldots$ $\ldots, |w_j|$ $(j < k)$ pueden hacerse menores que cualquier ε, si $|c_0|, \ldots, |c_{j-1}|$ se toman menores que $\delta_j = \delta_j(\varepsilon, M')$. Observando que, sin contar el signo, c_j es la suma de todos los productos posibles de $n - j$ ceros del polinomio $P(w)$ de subíndices distintos, obtenemos:

$$|c_j| \geqslant |w_{j+1} \ldots w_n| - \sum |w_{\alpha_1} \ldots w_{\alpha_{n-j}}|,$$

donde la suma contiene $\binom{n}{j} - 1$ términos y cada uno de éstos contiene al menos un factor de subíndice no superior a j. Por ello, si $|c_0|, \ldots, |c_{j-1}|$ son menores que

$$\delta_j' = \delta_j(\varepsilon', M'), \quad \text{donde} \quad \varepsilon' = \varepsilon^{n-j} M'^{j-n} \binom{n}{j}^{-1} < \varepsilon$$

$$\text{(siendo } \varepsilon < 1\text{)}.$$

se tiene:

$$|w_{j+1}| \leqslant |w_{j+1} \ldots w_n|^{\frac{1}{n-j}} \leqslant \left\{ |c_j| + \left[\binom{n}{j} - 1 \right] M'^{n-j-1} \varepsilon' \right\}^{\frac{1}{n-j}} <$$

$$< M' \binom{n}{j}^{\frac{1}{n-j}} \varepsilon'^{\frac{1}{n-j}} = \varepsilon,$$

si $|c_j| < M'^{n-j-1} \varepsilon'$. Haciendo $\delta_{j+1} = \min(\delta_j', M'^{n-j-1} \varepsilon')$, hallamos que $|w_1| < \varepsilon, \ldots, |w_{j+1}| < \varepsilon$ si $|c_0| < \delta_{j+1}, \ldots$ $\ldots, |c_j| < \delta_{j+1}$. El lema queda demostrado.

Consideremos ahora los siguientes casos posibles: a) $p_n(z_h)) \neq$ $\neq 0$ b) $p_n(z_h) = 0$. En el caso a) la ecuación

$$F(z_h, w) = p_0(z_h) + p_1(z_h) w + \ldots + p_n(z_h) w^n = 0$$

posee las raíces $a_1, \ldots a_r$ de órdenes de multiplicidad $k_1, \ldots k_r$, siendo $\sum_{j=1}^{r} k_j = n$.

Haciendo $w = a_j + w'$, tendremos:

$$F(z, w) = \pi_0(z) + \pi_1(z) w' + \ldots + \pi_n(z) w'^n,$$

donde $\pi_n(z) = p_n(z)$ y, por consiguiente, $\pi_n(z) \neq 0$ en cierto entorno U_0 del punto z_h.

Escribamos la ecuación $F(z, w) = 0$ para $z \in U_0$ en la forma

$$\frac{\pi_0(z)}{\pi_n(z)} + \frac{\pi_1(z)}{\pi_n(z)} w' + \ldots + \frac{\pi_{n-1}(z)}{\pi_n(z)} w'^{n-1} + w'^n = 0 \qquad (6.3:3)$$

y observemos que para $z = z_k$ ésta posee una raíz k_j-ple en el punto $w' = 0$ (puesto que la ecuación $F(z_k, w) = 0$ posee una raíz k_j-ple en el punto a_j). De aquí se deduce que sus coeficientes $\frac{\pi_s(z)}{\pi_n(z)}$ $(s = 0, \ldots, k_j - 1)$ se anulan para $z = z_k$.

Apliquemos el lema a la ecuación (6.3:3). Fijando $\varepsilon > 0$ tan pequeño que los ε-entornos V_j de los puntos a_j $(j = 1, \ldots, r)$ no tengan puntos comunes, elijamos según el lema los números $\delta_{k_j} = \delta(\varepsilon; M, k_j)$; tomamos por M el máximo de los extremos superiores de los módulos $\left|\frac{\pi_s(z)}{\pi_n(z)}\right|$ en U_0. Teniendo en cuenta que las funciones racionales $\frac{\pi_s(z)}{\pi_n(z)}$ son continuas en U_0, podemos sustituir U_0 por un entorno menor U_j del punto z_k, de modo que para todos los $z \in U_j$ se cumplan las desigualdades

$$\left|\frac{\pi_s(z)}{\pi_n(z)}\right| < \delta_{kj} \qquad (s = 0, 1, \ldots, k_j - 1).$$

Entonces hallamos que para cada $z \in U_j$ la ecuación (6.3:3) tiene al menos k_j raíces (respecto de w') situadas en el círculo $|w'| < \varepsilon$ y, por consiguiente, la ecuación $F(z, w) = 0$ tiene al menos k_j raíces en el círculo V_j: $|w - a_j| < \varepsilon$.

Designemos con U algún entorno del punto z_0 que esté contenido en todos los U_j $(j = 1, \ldots, r)$. Entonces para todos los $z \in U$ la ecuación $F(z, w) = 0$ tiene al menos k_j raíces en V_j $(j = 1, \ldots, r)$, y como $\sum_{j=1}^{r} k_j = n$ y los entornos V_j de subíndices distintos no tienen puntos comunes, resulta que todas las raíces sin excepción de la ecuación $F(z, w) = 0$ están contenidas en el conjunto de estos entornos y cada entorno V_j contiene exactamente k_j raíces.

Volvamos a examinar la función $\varphi(z)$ estudiada en un entorno del punto z_k y elijamos el entorno considerado $|z - z_k| < \rho$ tan pequeño que éste quede contenido en U. Como todos los valores de $\varphi(z)$ son raíces de la ecuación $F(z, w) = 0$, éstos tienen que pertenecer al conjunto de los entornos V_j $(j = 1, \ldots, r)$, los cuales no tienen puntos comunes entre sí dos a dos. Por otra parte, la imagen $\varphi(0 < |z - z_k| < \rho)$ es un conjunto conexo (un recinto). Por ello, esta imagen está contenida completamente en uno de los entornos V_j: $|w - a_{j_0}| < \varepsilon$. Así, pues, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede señalar un $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ tal, que para $0 < |z - z_k| < \rho$ todos los valores de la función $\varphi(z)$ están contenidos en el círculo $|w - a_{j_0}| < \varepsilon$. Por esta razón, en el desarrollo $\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_j (z - z_k)^{\frac{j}{\nu}}$ todos los coeficientes de subíndice negativo

tienen que ser iguales a cero (en caso contrario la función $\varphi(z)$ no estaría acotada en un entorno del punto z_k). Definitivamente, para $\varphi(z)$ obtenemos el desarrollo

$$\varphi(z)=\sum_{0}^{\infty}A_j(z-z_k)^{\frac{j}{\nu}}.$$

Por lo tanto, en el caso a) (en el que $p_n(z_k)\neq 0$) z_k es un punto regular para $\varphi(z)$ (si $\nu=1$), o un punto de ramificación algebraico. En el mismo punto $z=z_k$ la función $\varphi(z)$ toma un valor finito $\varphi(z_k)=a_{j_0}=A_0$.

Examinemos el caso b) (en el que $p_n(z_k)=0$). En este caso $p_n(z)$ tiene la forma $p_n(z)=(z-z_k)^q P_n(z)$, donde q es un número natural y $P_n(z)$ es un polinomio que no se anula en el punto z_k. Escribamos la ecuación $F(z, w)=0$ en la forma

$$(z-z_k)^{q(n-1)}F(z, w)=p_0(z)(z-z_k)^{q(n-1)}+\ldots+P_n(z)\times\\ \times(z-z_k)^{qn}w^n=0$$

y sustituyamos aquí $(z-z_k)^q w$ por W. Haciendo

$$p_0(z)(z-z_k)^{q(n-1)}=P_0(z),\quad p_1(z)(z-z_k)^{q(n-2)}=\\ P_1(z),\ \ldots,\ p_{n-1}(z)=P_{n-1}(z),$$

obtenemos la ecuación

$$P_0(z)+P_1(z)W+\ldots+P_{n-1}(z)W^{n-1}+P_n(z)W^n=0,\quad (6.3:4)$$

en la cual $P_n(z_k)\neq 0$.

A esta ecuación tiene que satisfacer en un entorno del punto $z=z_k$ la función $W=(z-z_k)^q\varphi(z)$, la cual es indefinidamente prolongable en un entorno del punto z_k a lo largo de todas las curvas que no pasan por el punto z_k. Como a la ecuación (6.3:4) y a la función $(z-z_k)^q\varphi(z)$ puede aplicarse todo lo establecido en el caso a), hallamos para esta función el siguiente desarrollo en un entorno del punto z_k:

$$(z-z_k)^q\varphi(z)=\sum_{0}^{\infty}A_j(z-z_k)^{\frac{j}{\nu}},$$

de donde

$$\varphi(z)=\sum_{0}^{\infty}A_j(z-z_k)^{\frac{j}{\nu}-q}=\sum_{j=-q\nu}^{\infty}A_j'(z-z_k)^{\frac{j}{\nu}},$$

siendo $A_j'=A_{j+q}$.

Así, pues, en el caso b) el desarrollo de la función $\varphi(z)$ puede contener una cantidad finita de términos con exponentes negativos, de modo que $\varphi(z)$ puede tomar el valor ∞ en el punto z_k

Estudiemos, finalmente, la función $\varphi(z)$ que se obtiene en un entorno U del punto del infinito mediante la prolongación analítica de uno de los elementos $f_{j_0}(z)$ que satisfacen a la ecuación (6.3:1). Elegiremos este entorno de tal modo que U no contenga ninguno de los puntos $z_1, \ldots, z_m$.

Efectuando la transformación $\zeta = \frac{1}{z}$, obtenemos en lugar de (6.3:1) la ecuación

$$p_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \ldots + p_n\left(\frac{1}{\zeta}\right) w^n = 0,$$

o bien, multiplicando todos los coeficientes por ζ^N, donde N es el mayor grado de los polinomios $p_0(z), \ldots, p_n(z)$, obtenemos:

$$q_0(\zeta) + \ldots + q_n(\zeta) w^n = 0,$$

donde

$$q_j(\zeta) = \zeta^N p_j(\zeta) \qquad (j = 0, \ldots, n)$$

son polinomios respecto de ζ. A esta ecuación tiene que satisfacer la función $\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, la cual es prolongable indefinidamente en un entorno del punto $\zeta = 0$ a lo largo de todas las curvas que no pasan por este punto. Según lo anterior, $\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ posee un desarrollo de la forma

$$\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j \zeta^{\frac{j}{\nu}}$$

(si $q_n(0) \neq 0$) o de la forma más general

$$\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{j=\mu}^{\infty} A_j \zeta^{\frac{j}{\nu}},$$

donde μ puede ser negativo, si $q_n(0) = 0$.

Volviendo a $z = \frac{1}{\zeta}$, hallamos en un entorno del punto $z = \infty$:

$$\varphi(z) = \sum_{0}^{\infty} A_j z^{-\frac{j}{\nu}}, \text{ o bien } \varphi(z) = \sum_{\mu}^{\infty} A_j z^{-\frac{j}{\nu}}.$$

He aquí un resumen de lo establecido en este apartado.

La ecuación algebraica (6.3:1) de grado n determina en el plano ampliado w como función n-forme de z. Esta función se expresa me-

diante elementos de la forma $\sum_{\mu}^{\infty} A_j (z - z_0)^{\frac{j}{\nu}}$ *si* $z_0 \neq \infty$, *o de la forma* $\sum_{\mu}^{\infty} A_j z^{-\frac{j}{\nu}}$ *si* $z_0 = \infty$. *Si el punto* $z_0 \neq \infty$ *es distinto de los puntos* $z_1, \ldots, z_m$, *en los cuales se anula el polinomio* $p_n(z)$ *o el discriminante de la ecuación* $D(z)$, *entonces se tienen* n *elementos regulares distintos con el centro* z_0. *Son posibles elementos irregulares solamente en el caso en que su centro sea uno de los puntos* $z_1, \ldots, z_m$ *o sea el punto del infinito.*

6.4. Ahora demostraremos que todos los elementos obtenidos en el apartado precedente forman una imagen analítica, es decir, que cualquiera de estos elementos puede obtenerse de cualquiera otro mediante la prolongación analítica. Es suficiente demostrar que cualquier elemento regular que satisface a la ecuación $F(z, w) = 0$ puede prolongarse analíticamente en cualquier otro elemento regular con el mismo centro, que satisfaga a esta ecuación. En efecto, si $f_{j_0}(z)$ y $\varphi_{k_0}(z)$ son dos elementos con distintos centros z_0 y ζ, entonces podemos prolongar primero $f_{j_0}(z)$ en cierto elemento $\varphi_{j_1}(z)$ con el centro ζ (véase el apartado precedente), y después prolongar $\varphi_{j_1}(z)$ en el elemento $\varphi_{k_0}(z)$. No queda más que observar que cada uno de los elementos irregulares que satisfacen a la ecuación $F(z, w) = 0$ se determina mediante la prolongación analítica de elementos regulares.

Para demostrar que dos elementos regulares con un mismo centro z_0 pueden prolongarse analíticamente uno en el otro, emplearemos el método de reducción a lo absurdo.

Supongamos que el elemento $f_1(z)$ con el centro z_0 puede prolongarse en los elementos $f_2(z), \ldots, f_k(z)$ $(k < n)$ con el mismo centro y que no puede prolongarse en los demás elementos $f_{k+1}(z), \ldots, f_n(z)$. Prolonguemos el elemento $f_1(z)$ de todos los modos posibles en el recinto G. Resulta una función $f(z)$ que, por lo general, es multiforme (k-forme). Sea $L \subset G$ una curva continua que una el punto z_0 con el punto $\zeta \in G$. Si se prolongan a lo largo de L dos elementos distintos $f_s(z)$ y $f_t(z)$, entonces tienen que resultar también dos elementos distintos $\varphi_\sigma(z)$ y $\varphi_\tau(z)$ con el centro ζ. En efecto, si fuese $\varphi_\sigma(z) = \varphi_\tau(z) = \varphi(z)$, entonces prolongando $\varphi(z)$ a lo largo de L obtendríamos también en el punto z_0 elementos iguales $f_s(z) = f_t(z)$, en contra de la hipótesis. De aquí se deduce que, prolongando a lo largo de L todos los k elementos $f_1(z), \ldots, f_k(z)$, tenemos que obtener también en el punto ζ k elementos distintos entre sí $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_k(z)$. Sea L un camino cerrado, que comience y termine en el punto z_0, a lo largo del cual el elemento $f_1(z)$ se convierte en un elemento $f_{\alpha_1}(z)$ distinto de $f_1(z)$. Entonces, prolongando $f_{\alpha_1}(z)$ a lo largo de L (en la misma dirección), tenemos

que obtener un elemento $f_{\alpha_2}(z)$ distinto de $f_{\alpha_1}(z)$. Si éste también es distinto de $f_1(z)$, entonces lo prolongamos a lo largo de L y obtenemos un elemento $f_{\alpha_3}(z)$ distinto de $f_{\alpha_1}(z)$ y $f_{\alpha_2}(z)$ (como a lo largo de L se han prolongado tres elementos distintos: $f_1(z)$, $f_{\alpha_1}(z)$ y $f_{\alpha_2}(z)$, los resultados de sus prolongaciones $f_{\alpha_1}(z)$, $f_{\alpha_2}(z)$ y $f_{\alpha_3}(z)$ también tienen que ser distintos entre sí). Reiterando este proceso, obtenemos un elemento $f_{\alpha_{j-1}}(z)$ que, al prolongarlo a lo largo de L, resulta el elemento $f_1(z)$. En efecto, el número de elementos distintos con el centro z_0 que pueden obtenerse como resultado de todas las prolongaciones posibles del elemento $f_1(z)$, es igual a k, y, por consiguiente, el proceso descrito de obtención de los elementos $f_{\alpha_1}(z)$, $f_{\alpha_2}(z)$, . . ., que son distintos de $f_1(z)$ y son distintos entre sí, tiene que terminarse no más tarde que en el $(k-1)$-ésimo paso. De este modo, a cada curva cerrada L le corresponde su ciclo de elementos $f_1(z)$, $f_{\alpha_1}(z)$, . . ., $f_{\alpha_{j-1}}(z)$ tal, que cada elemento siguiente se obtiene del anterior mediante la prolongación a lo largo de L en sentido positivo, y el elemento $f_1(z)$ mediante la prolongación del elemento $f_{\alpha_{j-1}}(z)$. Si $j<k$, entonces, tomando un elemento $f_{\beta_0}(z)$ que no figure en L, y prolongándolo reiteradamente a lo largo de L, obtenemos un nuevo ciclo $f_{\beta_0}(z)$, $f_{\beta_1}(z)$, . . ., $f_{\beta_{l-1}}(z)$ de elementos distintos de los considerados anteriormente. Por lo tanto, de todos los elementos $f_1(z)$, . . ., $f_k(z)$ pueden construirse ciclos (respecto de la curva dada L), donde los elementos de dos ciclos distintos son, necesariamente, distintos entre sí.

Formemos el producto

$$[w-f_1(z)]\,[w-f_2(z)]\ldots[w-f_k(z)]=$$
$$=w^k+A_{k-1}(z)\,w^{k-1}+\ldots+A_0(z). \qquad (6.4:1)$$

Como los elementos $f_1(z)$, . . ., $f_k(z)$ son prolongables analíticamente a lo largo de cualquier curva continua perteneciente a G, esto mismo es cierto también para los coeficientes $A_0(z)$, ..., $A_{k-1}(z)$ del polinomio en w obtenido, los cuales son funciones simétricas elementales de $f_1(z)$, . . ., $f_k(z)$. Por consiguiente, estos coeficientes son funciones analíticas en G (*a priori* k-formes). No obstante, la prolongación del sistema de elementos $f_1(z)$, ..., $f_k(z)$ con el centro z_0 a lo largo de cualquier curva cerrada perteneciente a G (exactamente igual que la prolongación del sistema $\varphi_1(z)$, . . ., $\varphi_k(z)$ con cualquier otro centro ζ), proporciona de nuevo el mismo sistema de elementos, pero dispuestos en otro orden, el cual puede ser establecido conociendo los ciclos que corresponden a la curva dada. Por ello, el resultado de la prolongación del elemento de cada una de las funciones simétricas $A_j(z)$ a lo largo de cualquier curva cerrada perteneciente al recinto G,

tiene que coincidir con el elemento inicial de esta función. Por lo tanto, las funciones $A_j(z)$ $(j = 0, \ldots, k-1)$ son uniformes en el recinto G, y los puntos frontera de este recinto $z_1, \ldots, z_m$ y ∞ pueden ser para éstas puntos regulares, polos o puntos singulares esenciales. Pero este último caso se excluye. En efecto, en los entornos de los puntos z_s los valores de la función multiforme $f(z)$ se expresan por una o varias series de la forma $\sum\limits_{\mu}^{\infty} A_p (z-z_s)^{\frac{p}{\nu}}$ (véase el apartado precedente). Exactamente igual, en un entorno del punto del infinito se tienen desarrollos de la forma $\sum\limits_{\mu'}^{\infty} A'_p z^{-\frac{p}{\nu'}}$. Poniendo en las expresiones de las funciones simétricas $A_j(z)$ en lugar de los k elementos de la función $f(z)$ las series correspondientes, y efectuando las operaciones de multiplicación y suma sobre estas series absolutamente convergentes, hallaremos para cada una de las funciones $A_j(z)$ el desarrollo en un entorno del punto z_s (o de $z = \infty$), el cual contiene solamente un número finito de términos con potencias negativas de $z - z_s$ (respectivamente, con potencias positivas de z). Esto significa que ninguna de las funciones $A_j(z)$ puede tener puntos singulares esenciales en el plano ampliado. Por consiguiente, todas las funciones $A_j(z)$ son racionales. Expresando cada una de ellas en forma de fracción irreducible

$$A_j(z) = \frac{\tilde{P}_j(z)}{Q_j(z)},$$

donde $\tilde{P}_j(z)$ y $Q_j(z)$ son polinomios (si $A_j(z) \equiv 0$, hacemos $\tilde{P}_j(z) \equiv 0$ y $Q_j(z) \equiv 1$), y denotando con $Q(z)$ el mínimo común múltiplo de los polinomios $Q_j(z)$ $(Q(z) \not\equiv 0)$, representamos la igualdad (6.4:1) en la forma

$$[w - f_1(z)] \ldots [w - f_k(z)] =$$
$$= \frac{1}{Q(z)} [P_k(z) w^k + P_{k-1}(z) w^{k-1} + \ldots + P_0(z)],$$

donde

$$P_k(z) = Q(z) \text{ y } P_j(z) = \frac{\tilde{P}_j(z)\, Q(z)}{Q_j(z)} \qquad (j = 0, 1, \ldots, k-1).$$

Por lo tanto, la función k-forme $f(z)$ obtenida mediante todas las prolongaciones posibles de uno de los elementos, que satisfacen a la ecuación algebraica (6.3:1), satisface a la ecuación algebraica

$$P_k(z) w^k + P_{k-1}(z) w^{k-1} + \ldots + P_0(z) = 0. \qquad (6.4:2)$$

Obsérvese que los coeficientes de la ecuación obtenida no tienen un común divisor mayor que de grado cero, es decir, no tienen ceros comunes. En efecto, sea $z - a$ algún divisor del coeficiente $P_h(z) = Q(z)$; entonces $z - a$ es divisor al menos de uno de los denominadores $Q_j(z)$ de las fracciones $\frac{\widetilde{P}_j(z)}{Q_j(z)}$. Supongamos que $Q_{j_0}(z)$ es divisible por la potencia más alta de $z-a$. El numerador correspondiente $\widetilde{P}_{j_0}(z)$ no es divisible por $z - a$ y, además, el factor complementario $\frac{Q(z)}{Q_j(z)}$ tampoco es divisible por $z - a$. De aquí se deduce que

$$P_{j0}(z) = \frac{Q(z)}{Q_j(z)} \widetilde{P}_{j0}(z)$$

tampoco es divisible por $z - a$ y, por consiguiente, $z - a$ no puede ser un común divisor de los coeficientes de la ecuación (6.4:2).

Demostremos que el polinomio

$$\Phi(z, w) = P_0(z) + \ldots + P_k(z) w^k$$

(cuyo grado k satisface a la condición $1 \leqslant k < n$) tiene que ser un divisor del polinomio inicial considerado

$$F(z, w) = p_0(z) + \ldots + p_n(z) w^n.$$

Como este último se suponía irreducible, obtendremos una contradicción, de donde deduciremos que k no puede ser menor que n, y en fin de cuentas, que todos los elementos que satisfacen a la ecuación algebraica irreducible forman una imagen analítica (y que todos los elementos regulares forman una función n-forme y analítica en el recinto G).

Para la demostración, obsérvese que

$$F(z, w) = p_n(z) [w - f_1(z)] \ldots [w - f_n(z)]$$

y

$$\Phi(z, w) = P_k(z) [w - f_1(z)] \ldots [w - f_k(z)],$$

conservándose estas relaciones para todas las prolongaciones posibles de los elementos regulares $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ en el recinto G. Por ello

$$\frac{F(z, w)}{\Phi(z, w)} = \frac{p_n(z)}{P_k(z)} [w - f_{k+1}(z)] \ldots [w - f_n(z)].$$

Puede aplicarse al producto $[w - f_{k+1}(z)] \ldots [w - f_n(z)]$ todo lo que se estableció para el producto $[w - f_1(z)] \ldots [w - f_k(z)]$.

Como resultado, obtenemos:

$$[w - f_{k+1}(z)] \dots [w - f_n(z)] = \frac{1}{R_{n-k}(z)} [R_{n-k}(z) w^{n-k} + \dots + R_0(z)],$$

donde $R_0(z), \dots, R_{n-k}(z)$ son polinomios que no tienen un factor común de grado mayor a cero.
Así, pues,

$$\frac{F(z, w)}{\Phi(z, w)} = \frac{p_n(z)}{P_k(z) R_{n-k}(z)} [R_0(z) + \dots + R_{n-k}(z) w^{n-k}],$$

o bien,

$$F(z, w) = \frac{p_n(z)}{P_k(z) R_{n-k}(z)} [P_0(z) + \dots + P_k(z) w^k] \times$$
$$\times [R_0(z) + \dots + R_{n-k}(z) w^{n-k}]. \qquad (6.4:3)$$

Expresemos $\frac{p_n(z)}{P_k(z) R_{n-k}(z)}$ en forma de fracción irreducible $\frac{P(z)}{Q(z)}$. Es obvio que el grado del polinomio $P(z)$ tiene que ser igual a cero. En caso contrario $P(z)$ tendría al menos un cero $z = a$ y de la relación (6.4:3) se deduciría que $F(a, w) = 0$ para todos los w, lo cual es imposible, puesto que los coeficientes $p_0(a), \dots, p_n(a)$ de este polinomio no son todos iguales a cero. Exactamente igual, $Q(z)$ es un polinomio de grado cero. En caso contrario $Q(z)$ tendría al menos un cero $z = b$ y el polinomio $F(b, w)$ tomaría el valor ∞ para todos los valores de w, lo cual es imposible. (Afirmando que el segundo miembro de la igualdad (6.4:3) es infinito para $z = b$, nos basamos en que los polinomios $P_s(z)$, así como los polinomios $R_t(z)$, no tienen un cero común).

Por lo tanto, la relación (6.4:3) puede expresarse en la forma

$$F(z, w) = C [P_0(z) + \dots + P_k(z) w^k] [R_0(z) + \dots + R_{n-k}(z) w^{n-k}],$$

donde C es una constante distinta de cero, lo cual, sin embargo, contradice a que la ecuación (6.3:1) es irreducible.

Por consiguiente, hemos demostrado que todos los elementos que satisfacen a una ecuación algebraica irreducible, forman una imagen analítica.

Considerando w como función de z, obtenemos una función n-forme $w = f(z)$ que es analítica en el recinto G y que en los puntos frontera $z_1, \dots, z_m$ y ∞ de este recinto no tiene otras singularidades más que, posiblemente, polos o puntos algebraicos de ramificación. Esta función $w = f(z)$ se llama **algebraica** y la imagen analítica correspondiente, considerada como superficie de Riemann en el sentido propio de la palabra, se llama superficie de Riemann de esta función.

Como la imagen analítica contiene n elementos distintos sobre cada punto del plano ampliado (a excepción de los puntos

$z_1, \ldots, z_m$ y ∞), la superficie de Riemann es de n hojas. Sobre los puntos $z_1, \ldots, z_m, \infty$ pueden estar situados elementos ramificados de la imagen analítica: los puntos de ramificación de la superficie. Se puede preparar un modelo de esta superficie tomando n ejemplares del plano ampliado, uniendo en cada uno de éstos los puntos $z_1, \ldots, z_m$ y ∞ en algún orden mediante una poligonal Λ sin autointersecciones, recortando cada ejemplar a lo largo de Λ y pegando después los bordes de los cortes de un mismo ejemplar o de ejemplares distintos en algún orden. Para especificar el orden en que deben pegarse los bordes indicados, fijemos en cada ejemplar algún punto z_0 no situado en Λ, y prolongamos analíticamente cada uno de los elementos de la imagen con el centro en este punto. En virtud del teorema de monodromia, obtenemos en cada ejemplar una rama uniforme algebraica de la función $f(z)$. Al prolongar el elemento que determina una rama, a lo largo de una curva que termina en algún punto de la poligonal (distinto de $z_1, \ldots, z_m$ y ∞), obtenemos en este punto uno u otro elemento de la función $f(z)$, según a cuál de los dos bordes del corte conduzca la curva. Si los elementos obtenidos en uno y otro borde del corte de un ejemplar determinado, resultan idénticos, entonces los puntos correspondientes del corte se pegan entre sí de tal modo que la parte del corte se elimine en el ejemplar dado. En caso contrario, el borde del corte del ejemplar dado se pega con el borde del corte de otro ejemplar que porte los mismos elementos de la función $f(z)$ Después de hacer todos estos pegados se obtiene el modelo pedido. A la prolongación de cualquier elemento de la función $f(z)$ a lo largo de cierta curva L del plano z le corresponde un desplazamiento sobre la superficie dada desde una de sus hojas a otra. Si la curva L es cerrada, entonces, como resultado del desplazamiento resulta, por lo general, que llegamos a un punto de la superficie distinto del inicial, a pesar de que éste está situado sobre el mismo punto del plano z. En otras palabras, sobre las curvas cerradas del plano z están situadas curvas, por lo general, no cerradas, de la superficie de Riemann considerada.

Señalemos, en conclusión, que la propiedad de las funciones algebraicas de tener una cantidad finita de determinaciones y no poseer otros puntos singulares más que polos y puntos algebraicos de ramificación, situados sobre una cantidad finita de puntos del plano ampliado, es caractrística para estas funciones. Precisando, se verifica la siguiente proposición:

T e o r e m a. *Supongamos que la función $f(z)$, admitiendo una prolongación analítica indefinida a lo largo de todas las curvas continuas pertenecientes al recinto G, cuya frontera consta de una cantidad finita de puntos $z_1, z_2, \ldots, z_m, \infty$, es no más que n-forme en el recinto G, se expresa en los entornos de los puntos z_j por desarrollos de*

la forma $\sum_{\mu}^{\infty} A_p (z - z_j)^{\frac{p}{\nu}}$ (μ es un número entero, ν es un número natural) *y en un entorno del punto* $z = \infty$ *se expresa por desarrollos de la forma* $\sum_{\mu'}^{\infty} A'_p z^{-\frac{p}{\nu'}}$. Entonces esta función es algebraica.

Para la demostración, es suficiente observar que los razonamientos hechos en la primera mitad de este apartado, donde se estableció que la función $f(z)$, obtenida mediante la prolongación analítica en el recinto G de un elemento que satisface a la ecuación (6.3:1), tiene que satisfacer ella misma a una ecuación algebraica (6.4:2), se basaban solamente en aquellas propiedades de la función que fueron incluidas en la hipótesis del último teorema.

§ 7. PRINCIPIO DE SIMETRIA. TRANSFORMACION DE UN SEMIPLANO EN UN POLIGONO ARBITRARIO

7.1. Este párrafo lo dedicaremos a un principio especial de la prolongación analítica de importancia capital que posee numerosas aplicaciones.

P r i n c i p i o d e s i m e t r í a (principio de Riemann — Schwarz). Sea G un recinto, en cuya frontera figura como arco de Jordan alcanzable un arco de una circunferencia o un segmento rectilíneo γ, y sea $d \subset G$ un recinto limitado por una curva de Jordan

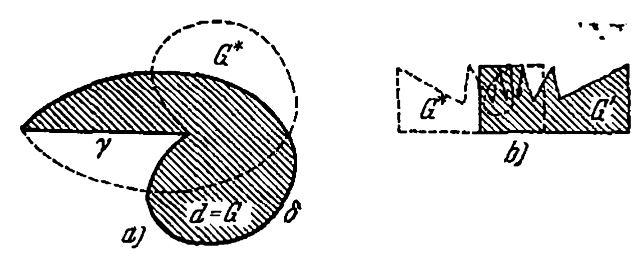


FIG. 77.

acotada $\delta + \gamma$ adjunta a γ (d puede coincidir con G (fig. 77, *a*), o diferenciarse de G (fig. 77, *b*)). Sea $f(z)$ *una función uniforme, definida en* $G + \gamma$, *que sea continua en el sentido generalizado en* $d + \gamma$ *y meromorfa en el recinto* G *y que tome en* γ *valores pertenecientes a una circunferencia o recta* Γ (en particular, valores reales). *En estas condiciones, la función* $f(z)$ *puede prolongarse analíticamente a través del arco* γ (del recinto d) *en el recinto* G^* *que es simétrico a* G *respecto de* γ. *La función* $f^*(z)$, *obtenida como resultado de la prolongación, es meromorfa en el recinto* G^* *y sus valores* $f^*(z^*)$ *y* $f(z)$ *en los puntos*

z^* y z que son simétricos respecto de γ ($z^* \in G^*$ y $z \in G$), son simétricos respecto de Γ.

Obsérvese que los recintos G y G^* pueden tener puntos comunes (véase la fig. 77). En este caso, la función que coincide con $f(z)$ en el conjunto $G + \gamma$ y con $f^*(z)$ en el recinto G^*, siendo $f(z) \not\equiv$ $\not\equiv$ const, es, por lo general, biforme, puesto que para un mismo punto perteneciente a los recintos G y G^* tienen que obtenerse dos valores distintos de la función, los cuales son simétricos respecto de Γ.

El principio de simetría no sólo da las condiciones suficientes para la posibilidad misma de la prolongación analítica de una función $f(z)$ a través de un arco de circunferencia o de un segmento de recta, sino que también señala el recinto al cual se realiza la prolongación, indicando también un método simple para la construcción de esta prolongación. El hecho de que éste se enuncie para la clase de las funciones meromorfas (y no simplemente para las analíticas), es completamente natural: si $f(z)$ no tiene polos en el recinto G, pero en algunos puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ toma un valor que se representa por el centro de la circunferencia Γ (suponemos aquí que Γ no es una recta), entonces en los puntos $z_1^*, z_2^*, \ldots$ $\ldots, z_n^*, \ldots$, que son simétricos a $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ respecto de γ, la función $f^*(z)$, según la condición, tiene que ser infinita, es decir, tiene que tener polos.

Comenzando la demostración, hagamos una transformación homográfica del plano z que aplique el arco γ en un segmento λ del eje real. Exactamente igual, hagamos una transformación homográfica del plano de valores de las funciones $f(z)$ y $f^*(z)$ de modo que a la línea Γ le corresponda el eje real; supongamos que en este caso el recinto G se transforma en g y G^* en g^*, y que las funciones $f(z)$ y $f^*(z)$ se transforman en $\varphi(\zeta)$ y $\varphi^*(\zeta)$. En las transformaciones homográficas, a los puntos que son simétricos respecto de γ o de Γ les corresponden puntos simétricos respecto del eje real, se conserva la continuidad de las funciones (en el sentido generalizado) y las funciones meromorfas se transforman en funciones meromorfas; por ello, es suficiente demostrar el teorema para aquel caso particular en que γ es un segmento del eje real, Γ es el eje real y la transformación de simetría significa la transformación de los números complejos en sus conjugados. Así, pues, suponemos que $f(z)$ toma en γ valores reales y que las funciones $f(z)$ y $f^*(z)$ toman valores conjugados para valores conjugados de la variable independiente:

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

Entonces, si $f(z)$ posee en un entorno del punto $z_0 \in G$ un desarrollo de la forma

$$f(z) = \sum_{n=\mu}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

entonces $f^*(z)$ poseerá en un entorno del punto $\bar{z}_0 \in G^*$ el desarrollo:

$$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} = \sum_{n=\mu}^{\infty} \bar{a}_n (z - \bar{z}_0)^n,$$

de donde se deduce que la función $f^*(z)$ es meromorfa en G^*.

Sea ahora ζ_0 un punto arbitrario del segmento γ, distinto de sus extremos. Se puede suponer que $\zeta_0 \neq \infty$; en caso contrario se efectúa la sustitución $\zeta = \frac{1}{z}$ que transforma al punto ∞ en el origen de coordenadas. Como γ es un arco alcanzable de la frontera del recinto G, existe un semicírculo con el centro ζ_0 que pertenece al recinto $d \subset G$. Demostremos que la función $F(z)$, que es igual a $f(z)$ en este semicírculo y en su diámetro y es igual a $f^*(z)$ en el semicírculo simétrico al dado respecto del diámetro, es meromorfa en el mismo. Precisamente de esto, se desprende que la función $f^*(z)$ es la prolongación analítica de la función $f(z)$.

Se puede suponer que $f(\zeta_0) \neq \infty$; en caso contrario sería suficiente considerar $\frac{1}{f(z)}$ en lugar de $f(z)$.

Considerando que el semicírculo con el centro ζ_0 es tan pequeño que $f(z)$ conserva en el mismo valores finitos, obtenemos una función $F(z)$ que es uniforme y continua en un entorno del punto ζ_0 (para demostrar que es continua nos basamos en que $f(z)$ y $f^*(z)$ toman valores reales iguales en los puntos del segmento γ) y es analítica en cada uno de los semicírculos en los que este círculo se divide por el eje real.

Del teorema de Morera se deduce que la función $F(z)$ es analítica en todo el círculo considerado. En efecto, cualquier triángulo Δ perteneciente al círculo, o pertenece por completo a uno de los semicírculos, o bien tiene puntos frontera comunes con el eje real, o bien, finalmente, se corta por el eje real en dos polígonos convexos, uno de los cuales pertenece a un semicírculo y el otro, al otro semicírculo. Como en los dos primeros casos la función $F(z)$ es continua en el triángulo cerrado Δ y es analítica en el interior del mismo, y en el último caso es continua en cada uno de los dos polígonos cerrados siendo analítica en el interior de los mismos, resulta, según la observación hecha al teorema integral de Cauchy (véase el tomo I, cap. 3, pág. 227-228), que la integral de $F(z)$ sobre cada uno de estos circuitos es igual a cero. Por ello, también resulta igual a cero la integral sobre todo el triángulo Δ, independientemente de su posición, y, por consiguiente, la función $F(z)$ es analítica en el entorno considerado del punto ζ_0.

Con esto se termina toda la demostración.

Señalemos un corolario importante del principio de simetría, que también se puede considerar como una generalización de este principio.

Supongamos que en el enunciado del principio de simetría, γ y Γ son unas curvas analíticas regulares (que, particularmente, pueden ser arcos de circunferencias o segmentos de rectas), *y que se conservan las demás condiciones impuestas a la función $f(z)$ en el recinto G* (o sea, que es continua en el sentido generalizado de la palabra en el conjunto $d + \gamma$ y es meromorfa en el recinto G). *Entonces $f(z)$ puede prolongarse analíticamente a través del arco γ; con más precisión, todos los puntos del arco γ en los cuales $f(z) \neq \infty$, son para $f(z)$ puntos regulares.*

D e m o s t r a c i ó n. Si $z = \lambda(t)$ ($\alpha \leqslant t \leqslant \beta$) es la ecuación de la curva γ y $w = \Lambda(T)$ ($A \leqslant T \leqslant B$) es la ecuación de la curva Γ, entonces mediante las transformaciones $t = \lambda^{-1}(z)$ y $T = \Lambda^{-1}(w)$ los entornos de los puntos $z_0 = \lambda(t_0)$ y $w_0 = \Lambda(T_0)$ se transforman biunívoca y conformemente en recintos que contienen a los puntos t_0 y T_0, y los arcos γ y Γ, que están situados en los entornos indicados y pasan por z_0 y w_0, se transforman en segmentos del eje real que contienen a los puntos t_0 y T_0. Como resultado, la función $w = f(z)$ se transforma en la función $T = \Lambda^{-1}f\lambda(t)$, definida en cierto recinto g, en cuya frontera figura un segmento alcanzable δ del eje real del plano t; además, esta función es continua en $g + \delta$, es meromorfa en el recinto g y toma valores reales en δ. En virtud del principio de simetría, la función $\Lambda^{-1}f\lambda(t)$ es analítica en cierto entorno del punto t_0; por ello, la función

$$F(z) = \Lambda(\Lambda^{-1}f\lambda)\lambda^{-1}(z)$$

es analítica en un entorno del punto z_0 y en la parte de este entorno que pertenece al recinto G coincide con $f(z)$. De aquí se deduce lo que se afirmaba.

En particular, *si, cumpliéndose las condiciones anteriores $f(z)$ se anula en el arco analítico alcanzable γ, entonces la función es idénticamente igual a cero* (éste es un caso muy particular del teorema frontera de unicidad de N. N. Luzin e I. I. Priválov, que generaliza el resultado obtenido en la pág. 213). En efecto, en este caso, según lo que acabamos de demostrar, $f(z)$ es regular en los puntos del arco γ, y cada punto de este arco es un punto de acumulación de los ceros de la función $f(z)$.

Mediante lo demostrado en este apartado, resulta la siguiente proposición de la teoría de las transformaciones conformes:

T e o r e m a. *Si forma parte de la frontera de un recinto simplemente conexo G algún arco analítico regular alcanzable γ, entonces la función $w = f(z)$ que transforma conformemente G en un círculo o en un semiplano, puede prolongarse analíticamente a través de γ*

desde el recinto d que es adyacente a γ, *está limitado por una curva de Jordan y pertenece a G. En otras palabras, todos los puntos del arco* γ, *en los cuales* $f(z) \neq \infty$, *son regulares para* $f(z)$ *respecto del recinto d.*

Este teorema se desprende inmediatamente de la proposición precedente y de que la función $f(z)$ es continua en el conjunto cerrado $\bar{d}$, es analítica en el recinto d y toma en γ unos valores que están situados en una circunferencia o en el eje real.

7.2. Apliquemos el principio de simetría a la construcción de una función que transforme conformemente el semiplano superior en un polígono arbitrario. Supongamos primero que el polígono G del plano z es un recinto, limitado por una curva cerrada de Jordan γ que está compuesta de n lados rectilíneos: los lados del polígono.

Designemos con $z_1, z_2, \ldots, z_n$ los vértices del polígono, dispuestos en el orden del recorrido positivo, y sean $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ los ángulos correspondientes. Los números α_j $(j = 1, \ldots, n)$ son positivos y menores de dos. Sea $z = \varphi(w)$ una función que transforme conformemente el semiplano superior $\operatorname{Re} w > 0$ en el recinto G. En virtud del teorema conocido (ap. 3.6, cap. V), esta función es continua en el semiplano cerrado y establece una correspondencia biunívoca y bicontinua entre el eje real y el circuito γ. Sean $a_1, \ldots, a_n$ las preimágenes de los vértices del polígono. Se puede suponer que todos estos puntos son finitos. En efecto, si, por ejemplo, $a_1 = \infty$, la transformación $w' = \frac{1}{a-w}$, donde a es un punto del eje real, distinto de $a_1, \ldots, a_n$, transforma el semiplano superior en sí mismo y la función $z = \varphi(w)$ en $z = \varphi'(w')$; además, para la última transformación del semiplano en el polígono las preimágenes de todos los vértices del polígono son finitos. Basándose en el principio de simetría (ap. 7.1), aplicado a la función $z = \varphi(w)$ y a los intervalos $(a_1, a_2), \ldots, (a_n, a_1)$ del eje real (uno de los cuales contiene al punto del infinito), sacamos la conclusión de que para $\varphi(w)$ todos los puntos del eje real son regulares, a excepción, posiblemente, de los puntos a_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Describamos una circunferencia con el centro en el vértice del polígono z_j, de un radio tan pequeño que no haya en su interior otros vértices del polígono. La circunferencia separa del recinto G un sector circular con el centro en el punto z_j y medida $\alpha_j\pi$.

Transformemos este sector en un semicírculo con el centro en el origen de coordenadas mediante alguna de las ramas uniformes de la función $t = (z - z_j)^{\frac{1}{\alpha_j}}$. Entonces la función $t = [\varphi(w) - z_j]^{\frac{1}{\alpha_j}} = \varphi_j(w)$ realizará una transformación conforme de cierto recinto g_j, perteneciente al semiplano superior y cuya frontera contiene un segmento del eje real, en un semicírculo del plano t. Esta

es biunívoca y continua en el recinto cerrado, transformándose en el diámetro del semicírculo el segmento del eje real. Aplicando el principio de simetría al recinto g_j y a la función $\varphi_j(w)$, hallamos que la función $t = \varphi_j(w)$ es analítica en un recinto que contiene al punto $w = a_j$ transformando a éste en un entorno del punto $t = 0$. Así, pues, $\varphi_j(w)$ posee en un entorno del punto $w = a_j$ un desarrollo de la forma

$$\varphi_j(w) = A_j(w - a_j) + \ldots, \text{ donde } A_j \neq 0.$$

Por ello

$$\varphi(w) = z_j + [\varphi_j(w)]^{\alpha_j} = z_j + (w - a_j)^{\alpha_j}[B_j + C_j(w - a_j) + \ldots],$$

donde $B_j \neq 0$.

Vemos, pues, que $w = a_j$ es un punto de ramificación para $\varphi(w)$, de orden finito si α_j es racional y de orden infinito si α_j es irracional. Teniendo en cuenta que $\varphi(w)$ no posee otros puntos singulares más que los hallados, obtendremos ahora la expresión analítica de esta función. Con este fin, derivemos dos veces el desarrollo hallado de la función $\varphi(w)$. Obtendremos:

$$\varphi'(w) = B_j\alpha_j(w - \alpha_j)^{\alpha_j - 1} + C_j(\alpha_j + 1)(w - \alpha_j)^{\alpha_j} + \ldots,$$

$$\varphi''(w) = B_j\alpha_j(\alpha_j - 1)(w - \alpha_j)^{\alpha_j - 2} + C_j(\alpha_j + 1)\alpha_j(w - \alpha_j)^{\alpha_j - 1} + \ldots$$

De aquí que

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = \frac{\alpha_j - 1}{w - a_j} + \ldots,$$

es decir, la función $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ tiene polos simples en los puntos a_j con los residuos iguales a $\alpha_j - 1$. Esta no tiene otras singularidades más, puesto que todos los puntos del plano finito, distintos de a_j, son regulares para $\varphi(w)$ y en ellos $\varphi'(w) \neq 0$ (por ser univalente la transformación $z = \varphi(w)$ en un entorno de tal punto). En el punto del infinito la función $\varphi(w)$ también es regular y en un entorno de este punto la transformación $z = \varphi(w)$ es univalente. Por ello

$$\varphi(w) = D_0 + \frac{D_1}{w} + \frac{D_2}{w^2} + \ldots (D_1 \neq 0),$$

$$\varphi'(w) = -\frac{D_1}{w^2} + \ldots, \quad \varphi''(w) = \frac{2D_1}{w^3} + \ldots$$

y

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = -\frac{2}{w} + \ldots,$$

de donde se deduce que $w = \infty$ es un punto regular para $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$.

Restando la suma $\sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - 1}{w - a_j}$ de $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$, obtenemos una función

que es analítica en todos los puntos del plano ampliado, es decir, una constante (del teorema de monodromia se deduce que es uniforme).

En resumen,

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_j-1}{w-a_j}=C,$$

de donde

$$\varphi'(w)=C_1\prod_{j=1}^{n}(w-a_j)^{\alpha_j-1}$$

y

$$z=\varphi(w)=C_1\int_{w_0}^{w}\prod_{j=1}^{n}(\tau-a_j)^{\alpha_j-1}\,d\tau+C_2, \qquad (7.2:1)$$

donde w_0 es un punto cualquiera del semiplano superior o del eje real.

Esta es la expresión analítica de la función buscada. La fórmula obtenida se llama fórmula de Christoffel — Schwarz.

Veamos dos ejemplos particulares. Sea primero el recinto G un triángulo. Entonces los puntos a_1, a_2 y a_3, que son las preimágenes de los vértices del triángulo, pueden darse *a priori*, cuidando de que se cumpla la condición necesaria de que los recorridos sean iguales. (Si las preimágenes de los vértices son unos puntos cualesquiera a_1', a_2' y a_3', es suficiente aplicar una transformación homográfica del semiplano sobre sí mismo para pasar a los puntos a_1, a_2 y a_3).

La fórmula (7.2:1) toma aquí la forma

$$z=\varphi(w)=C_1\int_{w_0}^{w}(\tau-a_1)^{\alpha_1-1}(\tau-a_2)^{\alpha_2-1}(\tau-a_3)^{\alpha_3-1}\,d\tau+C_2.$$

Para calcular las constantes C_1 y C_2 hacemos $w=a_1$ y $w=a_2$. Resultan las ecuaciones:

$$z_j=C_1\int_{w_0}^{a_j}(\tau-a_1)^{\alpha_1-1}(\tau-a_2)^{\alpha_2-1}(\tau-a_3)^{\alpha_3-1}\,d\tau+C_2 \qquad (i=1,\ 2),$$

de las cuales se pueden hallar C_1 y C_2.

Obsérvese que para la función subintegral tiene que elegirse alguna rama uniforme en el semiplano superior. Los valores en los puntos del eje real se determinan mediante la prolongación analítica o, lo que es lo mismo, basándose en razonamientos de continuidad.

Si G es un cuadrilátero, ya no se pueden asignar arbitrariamente las preimágenes de todos los cuatro vértices. Eligiendo arbitraria-

mente tres de ellos (conservando el orden del recorrido), obtenemos para la determinación de las constantes C_1, C_2 y la preimagen a_4 del cuarto vértice las siguientes ecuaciones:

$$z_j = C_1 \int_{w_0}^{a_j} (\tau - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\tau - a_2)^{\alpha_2 - 1} (\tau - a_3)^{\alpha_3 - 1} (\tau - a_4)^{\alpha_4 - 1} \, d\tau + C_2$$

$$(j = 1, 2, 3).$$

En éstas una de las tres incógnitas figura bajo el signo integral en una combinación bastante complicada. Cuando el cuadrilátero considerado posee un eje de simetría, estas ecuaciones pueden expresarse en forma simétrica. Supongamos, por ejemplo, que G es el rectángulo $-\alpha < x < \alpha$, $0 < y < \beta$. Debido al teorema de existencia de la transformación conforme, el rectángulo $0 < x < \alpha$, $0 < y < \beta$ se puede transformar conformemente en el primer cuadrante coordenado y, además, de tal modo que el punto $z = 0$ se transforme en el origen de coordenadas, el punto $z = \alpha$ en el punto 1 y el punto $z = \beta i$ en el punto del infinito. El homólogo del punto $z = \alpha + \beta i$ tiene que ser un punto situado en la parte positiva del eje real entre 1 y ∞. Designémoslo mediante $\frac{1}{k}$, donde $0 < k < 1$. Aplicando el principio de simetría (ap. 7.1), al rectángulo $0 < x < \alpha$, $0 < y < \beta$ y a la función que realiza la transformación hallaremos que esta misma función (prolongada analíticamente) transforma el rectángulo inicial G en el semiplano superior y sus vértices en los puntos ± 1, $\pm \frac{1}{k}$.

Observando que en el ejemplo considerado $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \frac{1}{2}$, obtenemos la siguiente expresión para la función que realiza la transformación:

$$z = C_1 \int_0^w (\tau - 1)^{-\frac{1}{2}} \left(\tau - \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\tau + \frac{1}{k}\right)^{-\frac{1}{2}} (\tau + 1)^{-\frac{1}{2}} \, d\tau + C_2 =$$

$$= C' \int_0^w \frac{d\tau}{\sqrt{(1 - \tau^2)(1 - k^2\tau^2)}} + C_2.$$

En el ap. 1.2 del cap. V ya nos encontramos con esta fórmula.

7.3. Para las aplicaciones es necesario extender el resultado del apartado precedente a los polígonos más generales del plano ampliado que están limitados, por lo general, por curvas que no son de Jordan.

Sea de nuevo G un recinto limitado por una poligonal cerrada, compuesta de una cantidad finita de lados rectilíneos (que pueden

ser segmentos, rayos o rectas enteras). Se admiten lados múltiples, recorridos más de una vez al hacer un recorrido simple del contorno, En la fig. 78 se muestran ejemplos de polígonos para $n = 1, 2, 3, 4$ (n es el número de lados que forman el contorno). Ahora los ángulos $\alpha_1\pi, \ldots, \alpha_n\pi$ de los polígonos pueden tomar también valores

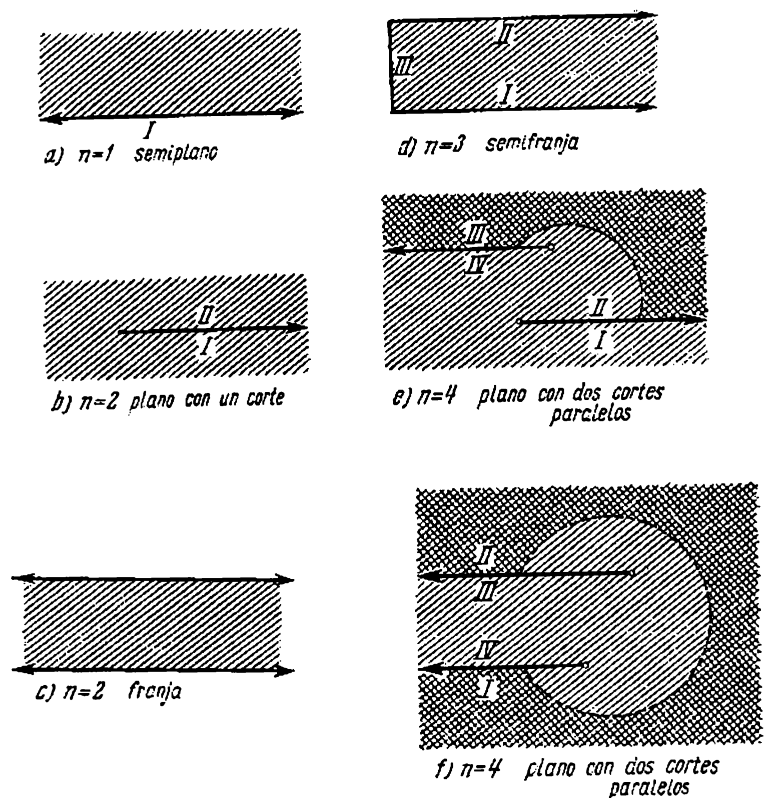


FIG. 78.

nulos y valores iguales a 2π. Si $z = \infty$ es un punto frontera del recinto G, convendremos en considerar a este punto, en todos estos casos, como un vértice del polígono, atribuyendo a todos los ángulos con el vértice en dicho punto valores negativos (si éstos no son iguales a cero). Por ejemplo, el polígono a) de la fig. 78 posee solamente un ángulo con el vértice en el punto del infinito, igual a $-\pi$;

el polígono *b*) posee un ángulo con el vértice finito, igual a 2π, y un ángulo con el vértice en el punto del infinito, igual a -2π; el polígono *c*) posee dos ángulos con los vértices en el punto del infinito, ambos iguales a cero, etc.

El lector puede comprobar fácilmente que para cada polígono representado en la figura la suma de los ángulos es igual a $(n-2)\pi$, donde n es el número de lados del polígono. A continuación se verá que así tiene que ser, siempre que el punto del infinito no esté situado en el interior del polígono.

Demostremos que en el caso considerado ahora la función $z = \varphi(w)$ que transforma el semiplano en un polígono, se determina por la fórmula anterior (7.2:1). La demostración es completamente semejante a la realizada en el ap. 7.2. Es nuevo solamente el caso de ángulos con el vértice finito de magnitud 2π, y el caso de ángulos con el vértice en el punto del infinito. En el primer caso, $\alpha_j = 2$ y la preimagen a_j del vértice correspondiente es un punto regular para la función $z = \varphi(w)$, puesto que el desarrollo de esta función en un entorno del punto $w = a_j$ tiene la forma

$$\varphi(w) = z_j + B_j(w-a_j)^2 + C_j(w-a_j)^3 + \ldots$$

El segundo caso necesita un exámen especial. Supongamos primero que el ángulo con el vértice en el punto $z = \infty$ está formado por dos rectas (o rayos) no paralelas. Entonces, de acuerdo a lo convenido, éste se mide por un número negativo α_j: $0 > \alpha_j > -2$ $(\alpha_j \neq -1)$. Aplicando la transformación auxiliar $t = z^{\frac{1}{\alpha_j}}$, transformamos de nuevo el recinto $g_j \subset G$, contenido entre los lados que forman el ángulo considerado y situado fuera de cierto círculo con el centro en el origen de coordenadas, en un semicírculo con el centro en el origen de coordenadas. Los razonamientos que siguen y el resultado no se diferencian en nada de lo anterior.

Supongamos ahora que el ángulo con el vértice en el punto $z = \infty$ está formado por dos rectas (o rayos) paralelas. Aquí son posibles los casos:

1) los lados del ángulo están situados en una misma recta; entonces el ángulo o es igual a $-\pi$ (fig. 78, *a*), o es igual a -2π (fig. 78, *b*);

2) los lados del ángulo están situados en dos rectas distintas; entonces el ángulo o es igual a cero (fig. 78, *c*, *d* y *f*), o es igual a $-\pi$ (fig. 78, *e*), o es igual a -2π (fig. 78, *f*).

En el caso 1) los razonamientos son los mismos que para lados no paralelos (la transformación $t = z^{-1}$ o $t = z^{-2}$).

Examinemos el caso 2), y supongamos primero que $\alpha_j = 0$; entonces, mediante un segmento de recta perpendicular a los lados del ángulo, desprendemos del recinto G una semifranja g y, después,

la transformamos en un semicírculo con el centro en el origen de coordenadas, de tal modo que el homólogo al punto del infinito sea el origen de coordenadas. Esto puede conseguirse mediante la transformación $t = e^{Cz}$, donde Cz toma en la línea media de la semifranja valores reales negativos. De un modo semejante a lo anterior, hallamos que $t = \exp [C\varphi (w)] = f (w)$ es una función analítica en un entorno del punto a_j (que es la preimagen del vértice considerado del ángulo), y que $f (w)$ posee un desarrollo de la forma

$$f (w) = A (w - a_j) + B (w - a_j)^2 + \ldots,$$

donde $A \neq 0$.

Derivando la igualdad $\exp [C\varphi (w)] = f (w)$ dos veces respecto de w, obtenemos:

$$C \exp [C\varphi (w)] \varphi' (w) = A + 2B (w - a_j) + \ldots,$$

$$C^2 \exp [C\varphi (w)] [\varphi' (w)]^2 + C \exp [C\varphi (w)] \varphi'' (w) = 2B + \ldots,$$

de donde

$$C\varphi' (w) = \frac{A + 2B (w - a_j) + \ldots}{A (w - a_j) + B (w - a_j)^2 + \ldots} = \frac{1}{w - a_j} + \ldots,$$

$$C\varphi' (w) + \frac{\varphi'' (w)}{\varphi' (w)} = \frac{2B + \ldots}{A + 2B (w - a_j) + \ldots} = D + \ldots$$

y

$$\frac{\varphi'' (w)}{\varphi' (w)} = (D + \ldots) - \left(\frac{1}{w - a_j} + \ldots\right) = -\frac{1}{w - a_j} + \ldots$$

Hemos hallado que $\frac{\varphi'' (w)}{\varphi' (w)}$ tiene en el punto a_j un polo simple con el residuo $-1 = \alpha_j - 1$; el resultado es el mismo que en el caso de un ángulo con el vértice finito.

Supongamos ahora que $\alpha_j = -\pi$ (fig. 78, e). En este caso separamos la parte del recinto G que está contenida entre los lados del ángulo en cuestión y un arco de una circunferencia (en la fig. 78, e esta parte está doblemente rayada) y despues, mediante la transformación lineal entera $\zeta = Cz + D$ la transformamos en el recinto representado en la fig. 79, a). Después mediante la función $\zeta = t' + e^{t'}$ (véase el ap. 5.7, cap. II) transformamos el recinto obtenido en un recinto de la forma b), fig. 79, y, finalmente, mediante $t = e^{-t'}$ lo transformamos en un recinto de la forma c), fig. 79. Resulta una función $t = f (w)$ que posee en un entorno del punto a_j un desarrollo de la forma

$$f (w) = A (w - a_j) + B (w - a_j)^2 + \ldots,$$

donde $A \neq 0$. Derivando dos veces la relación

$$C\varphi (w) + D = \frac{1}{f (w)} - \mathrm{Ln}\, f (w),$$

respecto de w, se obtiene sucesivamente:

$$C\varphi'(w) = -\frac{f'(w)}{[f(w)]^2} - \frac{f'(w)}{f(w)} = -\frac{1}{A(w-a_j)^2} + \ldots,$$

$$C\varphi''(w) = \frac{2}{A(w-a_j)^3} + \ldots,$$

de donde

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = -\frac{2}{w-a_j} + \ldots,$$

es decir, la función $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ tiene en el punto a_j un polo de primer orden con el residuo igual a $-2 = \alpha_j - 1$.

Supongamos, finalmente, que $\alpha_j = -2\pi$ (fig. 78, f). Separamos la parte del recinto G que está contenida entre los lados del ángulo

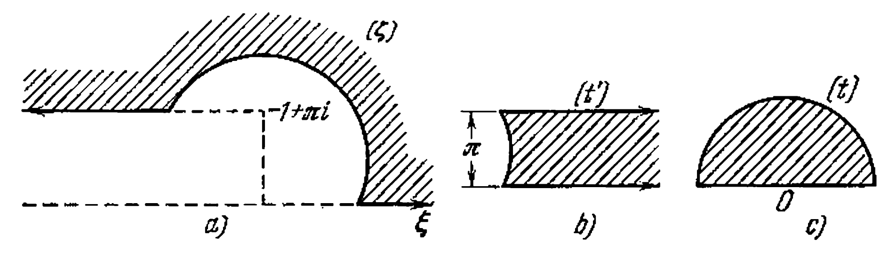


FIG. 79.

y un arco de una circunferencia (en la figura esta parte está doblemente rayada); después la transformamos mediante la función lineal entera $\zeta = Cz + D$ en un recinto de la forma a), fig. 80; el recinto obtenido lo transformamos mediante la función $\zeta = t' + e^{t'}$ en un recinto de la forma b), fig. 80, y, después, mediante $t = e^{-\frac{1}{2}t'}$ lo transformamos en un recinto de la forma c), fig. 80. Obtenemos de nuevo la función

$$t = f(w) = A(w-a_j) + B(w-a_j)^2 + \ldots \qquad (A \neq 0),$$

la cual satisface a la relación

$$C\varphi(w) + D = \frac{1}{[f(w)]^2} - 2\,\mathrm{Ln}\, f(w),$$

de donde, de un modo ordinario, hallamos:

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = -\frac{3}{w-a_j} + \ldots,$$

o sea, también en este caso $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ tiene en el punto a_j un polo simple con el residuo igual a $-3 = \alpha_j - 1$.

Así, pues, la preimagen a_j de cualquiera de los puntos z_j del polígono es, en todos los casos posibles, para la función $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ un polo simple con el residuo igual a $\alpha_j - 1$. Por ello, para $\varphi(w)$ se verifica la fórmula (7.2:1).

Obsérvese que $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ es una función racional, cuyo residuo respecto del punto del infinito es igual a 2 (véanse los cálculos hechos

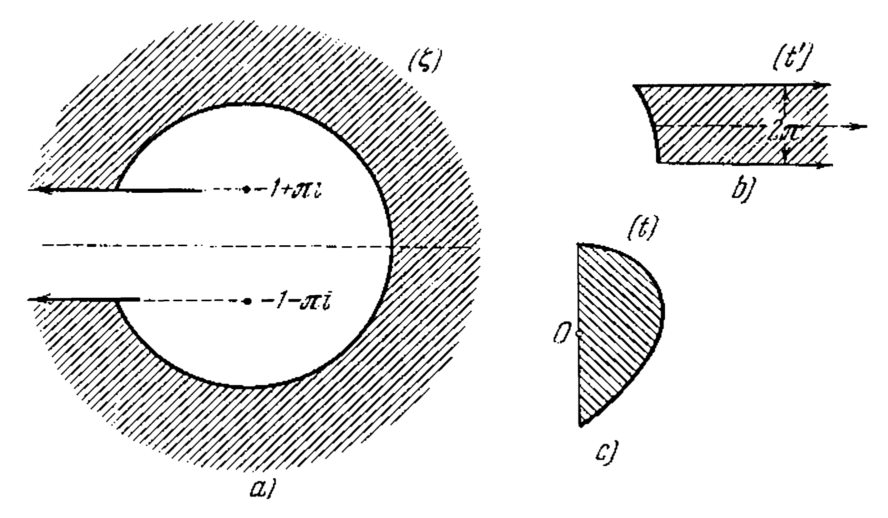


FIG. 80.

en la pág. 569). Como la suma de todos los residuos de una función racional es igual a cero, resulta

$$\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - 1) + 2 = 0,$$

de donde

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = n - 2.$$

Por lo tanto, la suma de los ángulos de cualquier polígono de n lados del plano ampliado, que no contenga en su interior al punto del infinito, es igual a $(n-2)\pi$.

Claro, este resultado puede obtenerse geométricamente de un modo elemental.

No nos queda más que considerar la transformación del semiplano en un polígono que contenga al punto del infinito.

En este caso la función $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ tiene de nuevo polos simples con los residuos $\alpha_j - 1$ en todas las preimágenes de los vértices del polígono. Pero a estos n puntos singulares se agregan otros dos más; el punto β del semiplano superior que es la preimagen del punto del infinito y el punto $\overline{\beta}$ conjugado con éste. Como la transformación $z = \varphi(w)$ es univalente, el punto β es un polo simple de la función $\varphi(w)$ y ésta posee en un entorno de este punto un desarrollo de la forma

$$\varphi(w) = \frac{A}{w-\beta} + \ldots$$

Por esta razón, para $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ obtenemos:

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = -\frac{2}{w-\beta} + \ldots$$

En virtud del principio de simetría, aplicado a la función $\varphi(w)$, cualquier rama uniforme de esta función en el semiplano inferior tiene que tener también en el punto $\overline{\beta}$ un polo simple. Por ello, $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ posee en un entorno del punto $\overline{\beta}$ un desarrollo de la forma

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = -\frac{2}{w-\overline{\beta}^2} + \ldots$$

Confrontando los resultados obtenidos, hallamos para $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ una expresión de la forma

$$\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)} = C + \sum_1^n \frac{\alpha_j - 1}{w - a_j} - \frac{2}{w-\beta} - \frac{2}{w-\overline{\beta}},$$

de donde, después de una doble integración, resulta:

$$z = \varphi(w) = C_1 \int_{w_0}^{w} \frac{\prod_1^n (\tau - a_j)^{\alpha_j - 1}}{(\tau-\beta)^2 (\tau-\overline{\beta})^2} d\tau + C_2. \qquad (7.3:1)$$

Por lo tanto, las fórmulas por las que se realiza la transformación conforme del semiplano en un polígono, son de forma distinta, según que $z = \infty$ sea un punto exterior o frontera del polígono (fórmula (7.2:1)), o sea un punto interior del mismo (fórmula (7.3:1)). En el último caso, al examinar la suma de los residuos de la función $\frac{\varphi''(w)}{\varphi'(w)}$ sacamos la conclusión de que $\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - 1) - 4 + 2 = 0$, de

donde $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = n + 2$, o sea, la suma de los ángulos del polígono es igual a $(n + 2)\pi$.

Ambas fórmulas fueron obtenidas con la suposición de que las preimágenes de todos los vértices son puntos finitos. Si se quiere llevar al infinito alguno de los vértices, por ejemplo z_n, es suficiente aplicar la transformación auxiliar del semiplano superior sobre sí mismo:

$$w' = \frac{1}{a_n - w}, \quad \text{o sea,} \quad w = a_n - \frac{1}{w'} .$$

La fórmula (7.2:1) toma la forma

$$z = C_1 \int_{w_0}^{a_n - \frac{1}{w'}} \prod_{j=1}^{n} (\tau - a_j)^{\alpha_j - 1}\, d\tau + C_2,$$

o bien, haciendo la sustitución bajo el signo integral $\tau = a_n - \frac{1}{\tau'}$:

$$z = C_1 \int_{\frac{1}{a_n - w_0}}^{w'} \sum_{j=1}^{n} [(a_n - a_j)\tau' - 1]^{\alpha_j - 1} \tau'^{-\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j - 1)} \frac{d\tau'}{\tau'^2} + C_2 =$$

$$= C' \int_{w'_0}^{w'} \prod_{j=1}^{n-1} (\tau' - a'_j)^{\alpha_j - 1}\, d\tau' + C_2. \qquad (7.3{:}2)$$

Aquí se ha tenido en cuenta que $\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - 1) = -2$ y se han designado con a'_j los números $\frac{1}{a_n - a_j}$ (los cuales son las preimágenes de los vértices del polígono, después de haber realizado la transformación $w' = \frac{1}{a_n - w}$). Vemos, pues, que cuando el punto del infinito es la preimagen de uno de los vértices, la fórmula para la función que realiza la transformación conserva su forma anterior y solamente disminuye en uno la cantidad de factores bajo el signo integral (falta el factor que corresponde al vértice con la preimagen infinita). También se obtiene un resultado similar para un polígono que contenga en su interior al punto del infinito. Con más precisión, efectuando la sustitución $w' = \frac{1}{a_n - w'}$, hallamos:

$$z = C' \int_{w'_0}^{w'} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (\tau - a'_j)^{\alpha_j - 1}}{(\tau - \beta')^2 (\tau - \bar{\beta}')^2}\, d\tau + C_2. \qquad (7.3{:}3)$$

Señalemos también las fórmulas para transformar el círculo unidad en un polígono. Para obtenerlas, es suficiente transformar el semiplano en el círculo $|\zeta| < 1$.

Si γ es un punto arbitrario del semiplano superior, entonces se puede obtener tal transformación en la forma $\zeta = \frac{w-\gamma}{w-\bar{\gamma}}$. En el caso de un polígono para el cual $z = \infty$ no es un punto interior, resulta:

$$z = C_1 \int_{w_0}^{\frac{\gamma-\bar{\gamma}\zeta}{1+\zeta}} \prod_{j=1}^{n} (\tau - a_j)^{\beta_j - 1} \, d\tau + C_2,$$

o bien (después de hacer la sustitución $\tau = \frac{\gamma - \bar{\gamma}\tau'}{1+\tau'}$ bajo el signo integral)

$$z = C' \int_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_{j=1}^{n} (\tau' - a'_j)^{\alpha_j - 1} \, d\tau' + C_2. \tag{7.3.4}$$

Aquí ζ_0 es un punto cualquiera del círculo unidad cerrado, y $a'_1, \ldots$ $\ldots, a'_n$ son los puntos de la circunferencia unidad que son las imágenes de los vértices del polígono. Si $z = \infty$ es un punto interior del polígono, buscamos una transformación del círculo $|\zeta| < 1$ en el polígono que lleve el centro del círculo al punto del infinito. Con este fin, agregamos a la transformación (7.3:1) la transformación $\zeta = \frac{w-\beta}{w-\bar{\beta}}$ y después de unos cálculos sencillos, teniendo en cuenta la relación $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = n + 2$, obtenemos:

$$z = C' \int_{\zeta_0}^{\zeta} \prod_{j=1}^{n} (\tau' - a'_j)^{\alpha_j - 1} \frac{d\tau'}{\tau'^2} + C_2. \tag{7.3:5}$$

7.4. En este apartado ilustraremos con ejemplos las fórmulas de los apartados precedentes. Ocupémonos primeramente de la transformación del semiplano en los polígonos representados en la figura 78. Dejando de un lado los recintos *a*), *b*), *c*) y *d*), para los cuales la transformación es bien conocida (el lector puede aplicar aquí como ejercicio la fórmula (7.2:1) o (7.3:1)), detengámonos en los recintos *e*) y *f*). Supongamos que uno de los rayos que forman la frontera del recinto *e*) va por eje real en dirección positiva desde el punto x_1, y el otro, por una recta paralela en dirección negativa desde el punto $x_2 + ih$. Los vértices del polígono por orden son: ∞, x_1, ∞, $x_2 + ih$, y los ángulos correspondientes son iguales a $-\pi$,

2π, $-\pi$, 2π. Insistamos en que sean imágenes de estos vértices los puntos siguientes del eje real: 0, 1, ∞, a (a es un número real negativo). Entonces la función que transforma el semiplano superior w en el polígono considerado se expresa según la fórmula (7.3:2) en la forma siguiente:

$$z = C' \int_{w_0}^{w} \tau^{-2}(\tau - 1)(\tau - a)\,d\tau + C_2 =$$

$$= C'w - (a+1)\,C' \operatorname{Ln} w - aC'w^{-1} + C''.$$

En esta fórmula es suficiente tomar una de las ramas de $\operatorname{Ln} w$ en el semiplano superior (el paso a otra rama influye solamente en el valor de C''), por ejemplo, $\ln w$; entonces obtenemos:

$$z = C'w - (a+1)\,C' \ln w - aC'w^{-1} + C''.$$

Fácilmente se observa que C' y C'' tienen que tomar aquí valores reales. En efecto, cuando w recorre el intervalo $(1, \infty)$ el punto z, en virtud de las suposiciones hechas, tiene que recorrer el lado II situado en el eje real. Sean w' y w'' dos puntos del intervalo $(1, \infty)$ y sean z' y z'' los puntos que les corresponden en el lado I; entonces, de las ecuaciones

$$z' = [w' - (a+1)\ln w' - aw'^{-1}]\,C' + C'',$$
$$z'' = [w'' - (a+1)\ln w'' - aw''^{-1}]\,C' + C''$$

obtenemos para C' y C'' valores reales. Para calcular realmente los valores reales C', C'' y a, tenemos dos ecuaciones:

$$x_1 = C' - aC' + C'', \quad x_2 + ih = C'a - (a+1)\,C' \ln a - C' + C'',$$

de donde, observando que $\ln a = \ln|a| + i\pi$, hallamos:

$$x_1 = C' - aC' + C'', \quad x_2 = C'a - (a+1)\,C' \ln|a| - C' + C'',$$
$$h = -(a+1)\,C'\pi.$$

Por consiguiente,

$$C' = -\frac{h}{\pi(1+a)}, \quad C'' = x_1 + \frac{h(1-a)}{\pi(1+a)},$$

$$2\frac{h}{\pi}\frac{1-a}{1+a} + \frac{h}{\pi}\ln|a| = x_2 - x_1.$$

Resolviendo la última ecuación respecto de a, determinamos después de esto los valores de las constantes C' y C'', con lo cual se termina la resolución del problema.

De un modo similar se resuelve el problema de la transformación del semiplano superior en el recinto f) de la figura 78. Aquí los vértices son los puntos x_1, ∞, $x_2 + ih$, ∞, y los ángulos correspon-

dientes son: 2π, -2π, 2π, 0. Insistamos en que sus preimágenes sean los puntos b, ∞, -1 y 0 ($b > 0$). Entonces por la fórmula (7.3:2) obtenemos:

$$z = C' \int_{w_0}^{w} (\tau - b)(\tau + 1)\,\tau^{-1}\,d\tau + C_2 =$$

$$= C'\left[\frac{w^2}{2} - (b-1)\,w - b\ln w\right] + C''.$$

Observamos de nuevo que C' y C'' son números reales, y para determinar las incógnitas C', C'' y b obtenemos las ecuaciones:

$$x_1 = C'\left[\frac{b^2}{2} - (b-1)\,b - b\ln b\right] + C'', \quad x_2 + ih =$$

$$= C'\left[\frac{1}{2} + (b-1) - b\ln(-1)\right] + C'',$$

o bien,

$$C' = -\frac{h}{b\pi}, \qquad C'' = x_2 + \frac{h(2b-1)}{2b\pi} \qquad \frac{bh}{2\pi} - \frac{h}{2b\pi} + \frac{h}{\pi}\ln b = x_1 - x_2.$$

Resolviendo la última ecuación respecto de b, calculamos después C' y C'', con lo que se termina la resolución del problema. Ob-

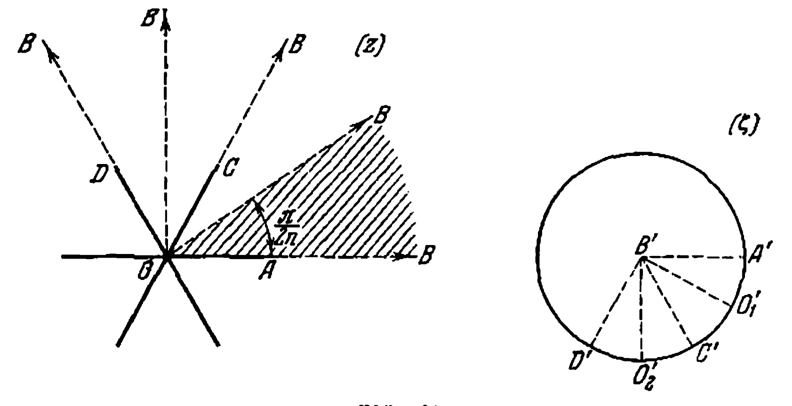


FIG. 81.

sérvese que en cada uno de los dos ejemplos considerados la existencia de raíz de la ecuación trascendente, negativa en el primer problema y positiva en el segundo, se deduce de la existencia misma de la función que realiza la transformación, por lo cual no se necesita una demostración especial.

Como último ejemplo, consideremos el polígono representado en la figura 81. Su frontera consta de $2n$ segmentos rectilíneos que

parten del origen de coordenadas formando ángulos iguales entre sí. Como cada uno de ellos se recorre doblemente al recorrer el contorno del polígono, nos encontramos con un polígono de $4n$ lados.

Se pide transformar el círculo unidad $|\zeta| < 1$ en este polígono, de tal modo que el punto $\zeta = 0$ vaya al punto del infinito.

Escribamos los vértices de este polígono en su orden: $1,\ 0,\ e^{\frac{\pi i}{n}},\ 0,\ e^{\frac{2\pi i}{n}},\ 0, \ldots, e^{\frac{(2n-1)\pi i}{n}},\ 0$. Los ángulos correspondientes son: $2\pi,\ \frac{\pi}{n},\ 2\pi,\ \frac{\pi}{n}, \ldots, 2\pi,\ \frac{\pi}{n}$. Comprobemos que sus preimágenes en la circunferencia tienen que ser los vértices de un polígono regular de $4n$ lados. En efecto, debido al teorema de existencia, el sector circular $A'B'O_1'$ de amplitud $\frac{\pi}{2n}$ se puede transformar conformemente en el ángulo AOB de tal modo que los puntos 0, 1 y $e^{-\frac{\pi i}{2n}}$ vayan a los puntos ∞, 1 y 0, respectivamente. Aplicando el principio de simetría a la función $z = \varphi(\zeta)$ que realiza la transformación y al recinto $A'B'O_1'$, hallaremos que la misma función (prolongada analíticamente) es analítica en el sector $A'B'C'$ de amplitud doble y que transforma este sector en el ángulo AOC, de tal modo que los radios $B'A'$ y $B'C'$ se transforman en los rayos AB y CB, y el arco $A'O_1'C'$ se transforma en la poligonal de dos lados AOC. Aplicando el principio de simetría a la función $z = \varphi(\zeta)$, al recinto $A'B'C'$ y al segmento $B'C'$, y después a la misma función, al recinto $C'B'D'$ y al segmento $B'D'$, etc, hallaremos que la función $\varphi(\zeta)$ se prolonga analíticamente a todo el círculo unidad (en el origen de coordenadas ésta tiene un polo) transformando a éste conformemente en el polígono dado de $4n$ lados. En esta transformación las preimágenes de los vértices del polígono son los vértices de un polígono regular de $4n$ lados inscrito en el círculo unidad.

Empezando a buscar esta función, observemos que ésta puede obtenerse directamente efectuando la transformación indicada anteriormente del sector circular en el ángulo. No obstante, como ejercicio, aplicaremos la fórmula (7.3:5). Como las preimágenes de los vértices, por orden, comenzando desde la preimágen del vértice A, son los puntos $1,\ e^{-\frac{\pi i}{2n}},\ e^{-\frac{2\pi i}{2n}}, \ldots, e^{-\frac{(2n-1)\pi i}{2n}}$, esta fórmula toma la forma

$$z = C' \int_1^{\zeta} (\tau - 1)\left(\tau - e^{-\frac{\pi i}{2n}}\right)^{\frac{1}{n}-1} \left(\tau - e^{-\frac{2\pi i}{2n}}\right)\left(\tau - e^{-\frac{3\pi i}{2n}}\right)^{\frac{1}{n}-1} \ldots$$

$$\ldots \left(\tau - e^{-\frac{(2n-2)2\pi i}{2n}}\right)\left(\tau - e^{-\frac{(2n-1)\pi i}{2n}}\right)^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\tau}{\tau^2} - C'' =$$

$$=C'\int_1^{\zeta}(\tau^{2n}-1)(\tau^{2n}+1)^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\tau}{\tau^2}+C''=$$

$$=C'\int_1^{\zeta}(\tau^{n}+\tau^{-n})^{\frac{1}{n}-1}(\tau^{n-1}-\tau^{-n-1})\,d\tau+C''=C_1(\zeta^n+\zeta^{-n})^{\frac{1}{n}}+C_2.$$

No queda más que determinar las constantes. Con este fin, hacemos $\zeta=1$ y $\zeta=e^{-\frac{\pi i}{2n}}$; obtenemos las ecuaciones:

$$1=2^{\frac{1}{n}}C_1+C_2,\quad 0=C_2.$$

Definitivamente, la función que realiza la transformación se puede expresar en la forma siguiente:

$$z=\left[\frac{1}{2}(\zeta^n+\zeta^{-n})\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Puede obtenerse el mismo resultado de otra manera. Mediante la transformación $z_1=z^n$ convertimos el plano en una superficie de Riemann de n hojas, y el polígono considerado en un recinto situado en esta superficie, con la frontera compuesta de $2n$ segmentos, cada uno de longitud igual a 1, los cuales se proyectan alternadamente sobre los segmentos $[0, 1]$ y $[-1, 0]$ del eje real.

Aplicando la transformación $z_1=\frac{1}{2}(z_2+z_2^{-1})$, transformamos este recinto en el círculo unidad de n hojas (se debe tomar aquella rama de la función $z_2=z_1+\sqrt{z_1^2-1}$ que se anula en el punto del infinito). Finalmente, mediante la transformación $\zeta=\sqrt[n]{z_2}$ envolvemos el círculo de n hojas en el círculo unidad de una hoja.

Es obvio que las transformaciones $z_1=z^n$, $z_1=\frac{1}{2}(z_2+z_2^{-1})$ y $\zeta=\sqrt[n]{z_2}$, efectuadas una tras otra, son equivalentes a la sola transformación

$$z=\left[\frac{1}{2}(\zeta^n+\zeta^{-n})\right]^{\frac{1}{n}}.$$

§ 8. FUNCION MODULAR. CRITERIO DE NORMALIDAD. TEOREMA GRANDE DE PICARD Y RECTAS DE JULIA

8.1. En este apartado aplicaremos el principio de simetría a la construcción de una función importante que tiene numerosas aplicaciones teóricas. Señalemos en la circunferencia unidad del plano z tres puntos: A, B y C, y unámoslos dos a dos mediante arcos de

circunferencias que sean ortogonales a la circunferencia unidad (fig. 82). Estos arcos encierran un recinto G_0, que es un triángulo con ángulos nulos. Transformemos conformemente G_0 en el semiplano superior w, de tal modo que los puntos A, B y C vayan a los puntos 0, 1 y ∞, respectivamente; entonces los arcos AB, BC y CA se convertirán en los segmentos $[0, 1]$, $[1, \infty]$ y $[\infty, 0]$ del eje real, respectivamente; éstos los designaremos en el orden indicado así: I, II y III.

Sea $w = \chi(z)$ la función que realiza la transformación. Apliquemos a ésta y al recinto G_0 el principio de simetría. Obtendremos que

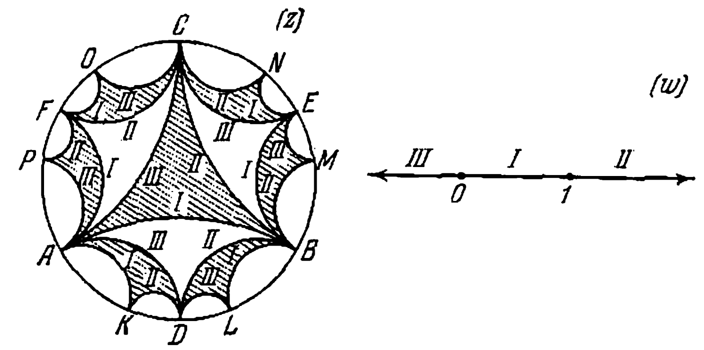


FIG. 82.

la función $\chi(z)$ se prolonga analíticamente a través de cada uno de los arcos AB, BC y CA a los triángulos de ángulos nulos ABD, BCE y ACF. En virtud del principio de simetría, los valores que toma la función en cada uno de estos triángulos tienen que pertenecer al semiplano inferior y llenan completamente este semiplano. Apliquemos ahora el principio de simetría a la misma función y a cada uno de los triángulos ABD, BCE y ACF. Hallaremos que ésta se prolonga analíticamente a través de sus lados AD, DB, BE, EC, CF y AF a los triángulos de ángulos nulos ADK, DBL, BEM, ECN, CFO y FAP. En cada uno de éstos la función $\chi(z)$ toma valores que llenan el semiplano superior.

Reiterando el proceso indicado de prolongación analítica, hallaremos que $\chi(z)$ puede prolongarse analíticamente a todo el círculo unidad. En efecto, el recinto al cual se ha realizado la prolongación analítica, representa en cada etapa del proceso considerado un polígono cuyos lados son circunferencias ortogonales a la circunferencia unidad. Precisando, al principio se tiene el triángulo ABC, luego resulta el hexágono $ADBECF$, en la siguiente etapa de la prolongación analítica se obtiene el dodecágono $AKDLBMENCOFP$, etc.

Obsérvese que el proceso mismo de prolongación analítica se puede efectuar aplicando el principio de simetría cada vez, no a los triángulos, sino a aquellos polígonos en los cuales la función ya se ha prolongado en la etapa anterior. Entonces, después del triángulo *ABC* se obtiene de nuevo el hexágono *ADBECF*, pero ya en la siguiente etapa se somete el hexágono a una transformación de simetría respecto de cada uno de sus seis lados, obteniéndose como

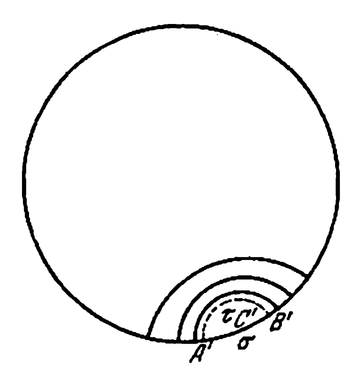


FIG. 83.

resultado un polígono de $6 + 4 \cdot 6 = 30$ lados (que no está representado en la figura). La aplicación del principio de simetría a sus lados permite prolongar la función $\chi(z)$ a un polígono de $30 + 28 \times \times 30 = 870$ lados, etc.

Para demostrar que todo punto del círculo va a pertenecer en cierta etapa a estos polígonos, es suficiente demostrar que las longitudes de los arcos de la circunferencia unidad, en los cuales descansan los lados del polígono (se tiene en cuenta cada vez el menor de los dos arcos con los extremos dados), tienden a cero a medida que el número de lados crece indefinidamente. Esto, a su vez, es consecuencia de que cada punto de la circunferencia unidad es un punto de acumulación para los vértices de los polígonos considerados. Supongamos lo contrario; entonces tiene que existir una sucesión de arcos encajados $\{\sigma_n\}$ de la circunferencia unidad que unen los vértices contiguos de los polígonos, los cuales se contraen hacia cierto arco σ que no contiene en su interior a ninguno de los vértices de los polígonos considerados. Unamos los extremos del arco σ con un arco τ que sea ortogonal a la circunferencia unidad. Efectuando la transformación de simetría respecto de τ, hallaremos en σ unos puntos A', B' y C' simétricos a A, B y C (fig. 83).

Reflejando los polígonos considerados en aquellos lados suyos que se basan en σ_n, hallaremos que las imágenes de los vértices A, B y C estarán arbitrariamente próximos a A', B' y C' para n suficientemente grande, y, por consiguiente, comenzando desde cierto n en adelante, al menos uno de los vértices del polígono pertenece al arco σ (siendo distinto de sus extremos). De la contradicción obtenida se deduce que $\chi(z)$ verdaderamente se prolonga analíticamente a todo el círculo unidad. Como el recinto es simplemente conexo, esta función es uniforme en el círculo (teorema de monodromia). Por cierto, su uniformidad se debe a que el polígono reflejado está situado en cada etapa en la parte exterior de la circunferencia en la que descansa su lado y, por lo tanto, este polígono y el que se obtiene después de la reflexión, no tienen puntos comunes. De la construcción se deduce que $\chi(z)$ toma infinitas veces en el círculo unidad cualquier valor complejo, a excepción de tres valores: 0, 1 y ∞. Además, los valores del semiplano superior se toman en los triángulos rayados y los del semiplano inferior en los no rayados; los valores de los intervalos del eje real $(0,1)$, $(1, \infty)$ y $(-\infty, 0)$ se toman en los lados de los triángulos designados por I, II y III. La función $w = \chi(z)$ determina una superficie de Riemann, la cual puede considerarse como compuesta de un conjunto infinito de ejemplares de semiplanos superiores e inferiores, de los cuales cada semiplano superior (inferior) está ligado con tres semiplanos inferiores (superiores) a lo largo de los segmentos I, II y III del eje real. En la superficie construida la función inversa a la dada es uniforme y analítica y está acotada en valor absoluto (todos sus valores pertenecen al círculo unidad). Esta misma función, considerada como función de w (a ésta la designaremos con $\omega(w)$), es multiforme y prolongable analíticamente a lo largo de cualquier curva continua que no pase por los puntos 0, 1 y ∞. Entre los valores que toma $\omega(w)$ en cierto punto hay uno, y sólo uno, que pertenece al triángulo cerrado ABC o que está situado dentro del triángulo ADB; a éste lo llamaremos valor principal de $\omega(w)$.

Transformando el círculo unidad en el semiplano superior t, de tal modo que los puntos A, B y C vayan a los puntos 0, 1 y ∞, respectivamente, el triángulo ABC de ángulos nulos se transforma también en un triángulo de ángulos nulos, representado en la figura 84. En este caso la función $w = \chi(z)$ se transforma en una función $w = \lambda(t)$, llamada función modular.

La función modular es uniforme y analítica en el semiplano superior. Esta se caracteriza en que transforma un triángulo de ángulos nulos con los vértices 0, 1 y ∞ en el semiplano superior, y lleva los vértices 0, 1 y ∞ a los puntos 0, 1 y ∞ del eje real. Todas sus propiedades se deducen de las propiedades de la función $w = \chi(z)$. He aquí, pues, que la función modular toma en un conjunto infinito

de puntos cada valor complejo, a excepción de los valores 0, 1 y ∞. Los triángulos de ángulos nulos, rayados en la figura 84, se transforman conformemente mediante $w = \lambda(t)$ en el semiplano superior w, y los no rayados, en el semiplano inferior; los lados de los triángulos que están señalados con las notaciones I, II y III se transforman en los intervalos del eje real $(0, 1)$, $(1, \infty)$ y $(\infty, 0)$.

La superficie de Riemann (en el sentido propio de la palabra), determinada mediante la función modular, es idéntica a la superficie de Riemann de la función $w = \chi(z)$. En efecto, una de ellas se

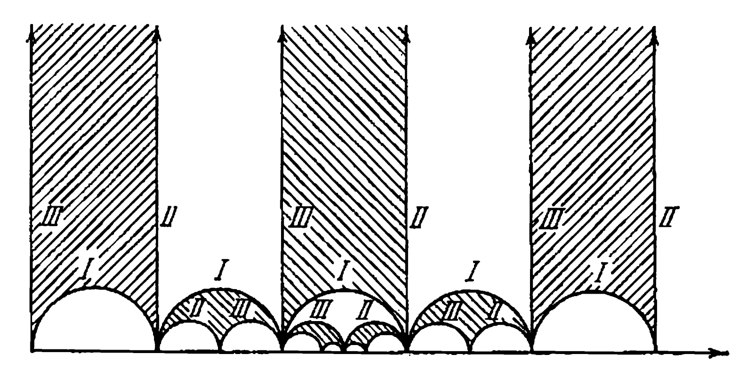


FIG. 84.

convierte en la otra mediante una transformación homográfica que transforme el círculo en el semiplano. Esta superficie de Riemann se llama superficie de Riemann de la función modular.

8.2. Apliquemos la función $\omega(w)$ del precedente apartado a la demostración del teorema pequeño de Picard, el cual se demostró en el ap. 1.5 del cap. VII sólo para las funciones de orden finito.

Teorema pequeño de Picard. *Toda función entera* $f(z) \not\equiv$ const *toma cualquier valor complejo finito, a excepción, posiblemente, de un valor.*

Demostración. Supongamos que para una función $f(z)$ existen dos valores finitos a y b que ésta no toma. Entonces $\varphi(z) = \frac{f(z)-a}{b-a}$ es una función entera que no toma los valores 0 y 1. Por consiguiente, todos los valores de esta función pertenecen al recinto en el cual está definida la función multiforme analítica $\omega(w)$. Fijemos una rama uniforme cualquiera de esta última función en un entorno del punto $w_0 = \varphi(0)$. Entonces en este entorno obtenemos

un elemento de la función $\omega\varphi(z)$, el cual es prolongable analíticamente a lo largo de cualquier curva continua perteneciente al plano finito y, por lo tanto, según el teorema de monodromia, determina una función uniforme y analítica en el plano finito, es decir, una función entera. Como ésta está acotada en valor absoluto (sus valores pertenecen al círculo unidad), del teorema de Liouville se deduce que $\omega\varphi(z) \equiv$ const. Pero esto, a su vez, es posible solamente cuando $\varphi(z) \equiv$ const y, por consiguiente, $f(z) \equiv$ const, lo cual contradice a la hipótesis del teorema.

Así, pues, el teorema pequeño de Picard queda demostrado.

Más adelante completaremos este teorema demostrando que una función trascendente entera toma cada valor finito, a excepción, posiblemente, de uno, en un conjunto infinito de puntos.

Del teorema demostrado se obtiene fácilmente una proposición similar para las funciones meromorfas.

T e o r e m a. *Toda función meromorfa $F(z) \not\equiv$ const toma cualquier valor complejo, a excepción, posiblemente, de dos.*

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que para la función $F(z)$ existen tres valores a, b y c que ésta no toma. Si uno de ellos, por ejemplo c, es igual a ∞, entonces $F(z) \not\equiv$ const es una función entera que no toma dos valores finitos a y b, lo cual es imposible. Así, pues, los números a, b y c son finitos. Formemos la función

$$\Phi(z) = \frac{1}{F(z)-c};$$

ésta es una función meromorfa que no toma el valor ∞, por lo cual es entera y, además, $\Phi(z) \not\equiv$ const. Por otra parte, $\Phi(z)$ no toma dos valores finitos $\frac{1}{a-c}$ y $\frac{1}{b-c}$. Resulta de nuevo una contradicción con el teorema pequeño de Picard, de donde se deduce que la proposición que se demuestra es cierta.

Son ejemplos elementales de funciones meromorfas con dos valores excepcionales las funciones e^z (los valores excepcionales son: 0 y ∞) y $\operatorname{tg} z$ (los valores excepcionales son: i y $-i$).

8.3. Apliquemos las propiedades de la función $\omega(w)$ para obtener un criterio suficiente muy amplio de normalidad de una familia de funciones analíticas. Recordemos (véase el ap. 1.1, cap. IV) que una familia de funciones $\{f(z)\}$, uniformes y analíticas en un recinto G, se llama normal en este recinto, si de cualquier sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$ de esta familia se puede extraer una subsucesión que converge uniformemente (posiblemente, al infinito idéntico) en el interior del recinto G.

C r i t e r i o d e n o r m a l i d a d. *Para que una familia de funciones $\{f(z)\}$, analíticas en un recinto G, sea normal, es suficiente*

que existan dos valores finitos a y b que no se toman en este recinto por ninguna de las funciones dadas.

D e m o s t r a c i ó n. Está claro que es suficiente establecer la normalidad de la familia dada en cualquier círculo perteneciente a G (compárense los razonamientos expuestos en el ap. 1.1, cap. IV). Esto significa que desde el comienzo se puede considerar que G es un círculo. Sustituyamos cada una de las funciones $f(z)$ por $\varphi(z) = \frac{f(z)-a}{b-a}$. Entonces obtenemos una familia de funciones $\{\varphi(z)\}$ que no toman los valores 0 y 1 en el círculo G. Si se demuestra que la familia $\{\varphi(z)\}$ es normal, de aquí se deducirá que la familia $\{f(z)\}$ también lo es.

Consideremos una sucesión arbitraria de funciones $\{\varphi_n(z)\}$ y la sucesión de valores de estas funciones en algún punto $z_0 \in G$. Distinguiremos dos casos: a) $\{\varphi_n(z_0)\}$ posee un punto de acumulación distinto de 0,1 y ∞; b) tal punto de acumulación no existe. En el caso a), pasando si es necesario a subsucesiones, tendremos:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z_0) = \alpha \neq 0,\ 1,\ \infty.$$

Fijemos un entorno del punto α tan pequeño que no contenga a los puntos 0, 1 y ∞, y elijamos en el mismo una rama uniforme de la función $\omega(w)$, por ejemplo, exigiendo que el valor $\omega(\alpha) = \beta$ sea principal (o sea, que pertenezca al cuadrilátero $ADBC$ fig. 82; se excluyen de éste los puntos de los lados AD y DB). Como, para valores suficientemente grandes de n, los puntos $\varphi_n(z_0)$ pertenecen al entorno asignado, obtenemos en un entorno del punto z_0 los elementos de las funciones analíticas $\omega\varphi_n(z)$, donde los valores de ω pertenecen a la rama elegida. Cada uno de estos elementos puede prolongarse analíticamente a todo el círculo G, puesto que $\varphi_n(z)$ son funciones analíticas en este círculo y todos sus valores pertenecen a aquel recinto en que la función $\omega(w)$ no posee puntos singulares. Como resultado de la prolongación, se obtienen funciones $\omega\varphi_n(z)$ uniformes y analíticas en el círculo G, que satisfacen a la condición $\lim_{n\to\infty} \omega\varphi_n(z_0) = \beta$. Todos los valores de estas funciones pertenecen al círculo unidad. Por ello, la sucesión $\{\omega\varphi_n(z)\}$ forma una familia compacta (véase el ap. 2.1, cap. IV), es decir, contiene una subsucesión $\{\omega\varphi_{n_k}(z)\}$ que es uniformemente convergente en el interior de G. Sea $\Omega(z) = \lim_{k\to\infty} \omega\varphi_{n_k}(z)$; esta función satisface a la condición $\Omega(z_0) = \beta$ y como $|\beta| < 1$, $\Omega(z)$ no puede ser una constante de valor absoluto igual a 1. Como $|\omega\varphi_{n_k}(z)| < 1$ en el recinto G, se tiene $|\Omega(z)| \leqslant 1$ en este recinto y, en virtud del principio del módulo máximo: $|\Omega(z)| < 1$, $z \in G$ (si se verificase la igualdad

en algún punto del recinto G, sería $|\Omega(z)| \equiv 1$, lo cual, como se ha observado, es imposible).

Consideremos un círculo cerrado K perteneciente al recinto G; la función $t = \Omega(z)$ transforma este círculo en un recinto cerrado D perteneciente al círculo unidad. Por consiguiente, la función $w = \chi(t)$ es uniformemente continua en D, de donde se deduce que la sucesión $\{\chi\omega\varphi_{n_k}(z) = \varphi_{n_k}(z)\}$ converge uniformemente en K hacia la función $\chi\Omega(z)$. Así, pues, en el caso a) existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}(z)\}$ de la sucesión $\{\varphi_n(z)\}$ que es uniformemente convergente en el interior de G.

No queda más que considerar el caso b) en que la sucesión $\{\varphi_n(z_0)\}$ no posee otros puntos de acumulación más que 0, 1 y ∞. Sea 1 un punto de acumulación de esta sucesión. Sin restringir generalidad, se puede suponer entonces que $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_n(z_0) = 1$. Formamos la función

$$\psi_n(z) = \frac{\mathrm{Ln}\,\varphi_n(z) + 2\pi i}{4\pi i},$$

asignando a $\mathrm{Ln}\,\varphi_n(z)$ en el punto z_0 el valor principal, de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Ln}\,\varphi_n(z_0) = 0,$$

y prolongando analíticamente los elementos respectivos de las funciones $\mathrm{Ln}\,\varphi_n(z)$ en el círculo G (tal prolongación es posible, puesto que $\varphi_n(z)$ no toma los valores 0 y ∞ en el recinto G). Como resultado de la prolongación se obtienen unas funciones $\psi_n(z)$ uniformes y analíticas en el círculo G. Estas no toman en éste los valores 0, 1 y ∞, puesto que $\mathrm{Ln}\,\varphi_n(z) \neq -2\pi i,\ 2\pi i,\ \infty$. En el punto z_0 se tiene: $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(z_0) = \frac{1}{2} \neq 0,\ 1,\ \infty$.

Por lo tanto, se pueden aplicar a la sucesión $\{\psi_n(z)\}$ los razonamientos expuestos en el caso a), es decir, existe una subsucesión $\{\psi_{n_k}(z)\}$ que converge uniformemente en el interior de G hacia cierta función $\Psi(z)$. Como ninguna de las funciones $\psi_{n_k}(z)$ toma el valor 1/2 en el recinto G, la función límite $\Psi(z)$ no tiene que tomar este valor, si ésta no es constante (esto se deduce del teorema de Hurwitz, ap. 3.5, cap. IV). Pero $\Psi(z_0) = \lim\limits_{k\to\infty} \psi_{n_k}(z_0) = \frac{1}{2}$; por consiguiente, $\Psi(z) \equiv \frac{1}{2}$. De aquí se deduce que las ramas uniformes elegidas de $\mathrm{Ln}\,\varphi_{n_k}(z)$ en el recinto G, convergen uniformemente en el interior del recinto hacia 0, y la sucesión de funciones $\{\varphi_{n_k}(z)\}$ converge uniformemente hacia 1.

Si en lugar de la relación $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = 1$ se cumpliese la relación $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = 0$ o $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \infty$, consideraríamos la sucesión de funciones $\{1 - \varphi_n(z)\}$, o $\left\{1 - \frac{1}{\varphi_n(z)}\right\}$. Las funciones de cada una de éstas son analíticas en el recinto G y no toman los valores 0, 1 y ∞. Además, la sucesión de sus valores en el punto z_0 converge hacia 1. Aplicando a ellas el caso particular examinado, hallaríamos que $\{\varphi_n(z)\}$ contiene una subsucesión que converge uniformemente en el interior de G hacia 0 o ∞, respectivamente. Con esto se termina la demostración del teorema.

8.4. Apliquemos el teorema del precedente apartado a la demostración del teorema grande de Picard enunciado en el ap. 3.1, cap. IV.

Teorema grande de Picard. *Toda función analítica $f(z)$ toma en un entorno arbitrario de un punto singular esencial z_0 cualquier valor finito, a excepción, posiblemente, de uno.*

Demostración. Sin restringir generalidad, hagamos $z_0 = 0$ (se obtiene este caso haciendo la transformación $\zeta = z - z_0$ o $\zeta = \frac{1}{z}$). Supongamos, por el contrario, que $f(z)$ posee dos valores excepcionales finitos a y b en un entorno $|z| < R$ del punto $z_0 = 0$. Construyamos los anillos circulares

$$\Gamma_0\left(\frac{R}{2} < |z| < R\right), \quad \Gamma_1\left(\frac{R}{2^2} < |z| < \frac{R}{2}\right), \ldots$$
$$\ldots, \Gamma_n\left(\frac{R}{2^{n+1}} < |z| < \frac{R}{2^n}\right), \ldots$$

con el centro z_0, y formemos la sucesión de funciones

$$f_1(z) = f\left(\frac{z}{2}\right), \ldots, f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right), \ldots .$$

La función $f_n(z)$ toma en el anillo Γ_0 los mismos valores que la función $f(z)$ en el anillo Γ_n. Por ello, $\{f_n(z)\}$ es una sucesión de funciones uniformes y analíticas en el anillo Γ_0, las cuales no toman los valores a y b, y, por lo tanto, es una familia normal. Extraigamos de ésta una subsucesión $\{f_{n_k}(z)\}$ que sea uniformemente convergente en el interior de Γ_0. Supongamos primero que la función límite $F(z) \not\equiv \infty$. Entonces el módulo $|F(z)|$ está acotado en la circunferencia $|z| = \rho$, $\frac{R}{2} < \rho < R$, y, por consiguiente, las funciones $\{f_{n_k}(z)\}$ están uniformemente acotadas en esta circunferencia.

Esto significa que la función $f(z)$ satisface a las condiciones

$$|f(z)| < M, \quad |z| = \frac{\rho}{2^{n_k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

y, por consiguiente, debido al principio del módulo máximo, satisface a la condición

$$|f(z)| < M, \quad 0 < |z| \leqslant \rho.$$

Pero esto es imposible, puesto que $z = 0$ es un punto singular esencial de la función $f(z)$.

Si $F(z) \equiv \infty$, la sucesión de funciones analíticas $\varphi_{n_k}(z) = \frac{1}{f_{n_k}(z) - a}$, converge uniformemente hacia cero en el interior de Γ_0. De aquí, razonando igual que anteriormente, sacamos la conclusión de que la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - a}$ está acotada en un recinto de la forma $0 < |z| \leqslant \rho$, de donde se deduce que el punto $z = 0$ es regular para $\varphi(z)$ y, por consiguiente, no puede ser un punto singular esencial para $f(z)$, en contra de la hipótesis del teorema. El teorema queda demostrado.

De éste se desprende el teorema pequeño de Picard con el siguiente enunciado más fuerte:

Toda función trascendente entera $f(z)$ toma en un conjunto infinito de puntos cualquier valor finito A, a excepción, posiblemente, de uno.

En efecto, si dos valores finitos a y b se toman solamente en un número finito de puntos, entonces tiene que existir un entorno del punto del infinito en el cual no se toman estos valores, lo cual contradice al teorema demostrado ($z = \infty$ es un punto singular esencial para $f(z)$).

El lector puede demostrar fácilmente que se verifica un aserto más general:

Una función trascendente $f(z)$ que es meromorfa en el plano finito, toma en un conjunto infinito de puntos cualquier valor finito, a excepción, posiblemente, de dos.

Analizando la demostración del teorema fundamental de este apartado, se puede obtener una proposición más general. Sea, igual que anteriormente, $f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^n}\right)$; introduzcamos los anillos circulares

$$\Gamma'_0\left(\frac{R}{2^4} < |z| < R\right), \quad \Gamma'_1\left(\frac{R}{2^5} < |z| < \frac{R}{2}\right), \ldots$$

$$\ldots \Gamma'_n\left(\frac{R}{2^{n+4}} < |z| < \frac{R}{2^n}\right), \ldots,$$

que se interceptan unos con otros.

Demostremos que la familia de funciones $\{f_n(z)\}$ no puede ser normal en el anillo Γ_0'. Supongamos lo contrario. Entonces existen subsucesiones de esta sucesión que son uniformemente convergentes en el interior de Γ_0', en particular, son uniformemente convergentes en el anillo cerrado $\Gamma\left(\frac{R}{2^3} \leqslant |z| \leqslant \frac{R}{2}\right)$. La función límite $F(z)$ de cualquiera de las subsucesiones tiene que ser idénticamente infinita; suponiendo lo contrario estableceríamos, razonando igual que en la demostración del teorema grande de Picard, que la función $f(z)$ está acotada en valor absoluto en un recinto de la forma $0 < |z| < \rho$, lo cual es imposible. Pero si cualquier subsucesión $\{f_{n_k}(z)\}$ que converge uniformemente en Γ converge hacia el infinito idéntico, de aquí se deduce que toda la sucesión $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente hacia el infinito en Γ. En caso contrario tendrían que existir un número positivo N, una sucesión de puntos $\{z_k\}$, pertenecientes a Γ, y una sucesión creciente de números naturales $\{n_k\}$, tales que $|f_{n_k}(z_k)| \leqslant N$. Pero esta conclusión contradice a que la subsucesión $\{f_{n_k}(z)\}$ tiene que contener dentro de sí otra subsucesión $\{f_{n_k'}(z)\}$ que converge uniformemente hacia ∞ en Γ. Así, pues, de la hipótesis de que la sucesión $\{f_n(z)\}$ es una familia normal en Γ_0', se deduce que $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente hacia el infinito en Γ. Por ello, para un N arbitrariamente grande, en los puntos del anillo Γ se verifican las desigualdades $|f_n(z)| > N$, si n es suficientemente grande. En otras palabras,

$$\left|f\left(\frac{z}{2^n}\right)\right| > N \quad \text{si} \quad n \geqslant \nu(N) \ \text{y} \ z \in \Gamma.$$

Cuando z recorre el anillo $\Gamma\left(\frac{R}{2^3} \leqslant |z| \leqslant \frac{R}{2}\right)$, el punto $\frac{z}{2^n}$ recorre el anillo $\gamma_n\left(\frac{R}{2^{n+3}} \leqslant |z| \leqslant \frac{R}{2^{n+1}}\right)$. Los anillos γ_n $(n = \nu, \nu + 1, \nu + 2, \ldots)$ se interceptan unos con otros cubriendo todo el recinto $0 < |z| < \frac{R}{2^{\nu+1}}$. Por consiguiente, en todos los puntos de este recinto se verifica la desigualdad

$$|f(z)| > N.$$

En otras palabras,

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \infty,$$

lo cual, no obstante, es imposible, puesto que $z = 0$ es un punto singular esencial de la función $f(z)$.

Por consiguiente, hemos demostrado que la familia $\{f_n(z)\}$ no puede ser normal en el anillo Γ_0'. De aquí se deduce que en este anillo existe al menos un punto ζ tal, que en cualquier entorno del

mismo la familia $\{f_n(z)\}$ no puede ser normal. En efecto, si todo punto del anillo Γ_0' poseyese un entorno en el cual la familia $\{f_n(z)\}$ fuese normal, entonces esta familia sería también normal en Γ_0'.

Sea $|z - \zeta| < \varepsilon$ un entorno arbitrariamente pequeño del punto ζ. Como la familia $\{f_n(z)\}$ no es normal en este entorno, las funciones de esta familia en su conjunto toman en el mismo todos los valores finitos, a excepción, posiblemente, de uno. Mejor dicho, para cualquier valor finito A, a excepción, posiblemente, de un valor A_0, existen funciones $f_{n_k}(z)$ de subíndices n_k arbitrariamente grandes, que toman el valor A en cierto punto z_k perteneciente al entorno dado. Observando que $f_{n_k}(z) = f\left(\frac{z}{2^{n_k}}\right)$ y designando $\frac{z_k}{2^{n_k}}$ mediante ζ_k, obtenemos:

$$f(\zeta_k) = A.$$

Está claro que la sucesión $\{\zeta_k\}$ converge hacia el punto $z = 0$ y está contenida dentro del ángulo limitado por los rayos que parten del punto $z = 0$ y son tangentes a la circunferencia $|z - \zeta| < \varepsilon$. Como el punto ζ está fijado y ε es arbitrariamente pequeño, obtenemos la siguiente proposición:

T e o r e m a. *Para cada punto singular esencial z_0 de una función analítica $f(z)$, existe al menos un rayo que parte de este punto tal que en cualquier ángulo, simétrico respecto de dicho rayo, la función $f(z)$ toma cualquier valor finito, a excepción, posiblemente, de uno, en una sucesión infinita de puntos que converge hacia z_0.*

Es obvio que este teorema es una precisión del teorema grande de Picard. Más exactamente, el teorema de Picard no dice cómo están situados los A-puntos de la función $f(z)$ en un entorno del punto singular esencial, mientras que el último teorema afirma que para cualquier A, a excepción, posiblemente, de uno, un conjunto infinito de A-puntos se agrupa en las proximidades de cierto rayo (puede haber unos cuantos rayos de éstos o incluso un conjunto infinito).

El rayo (o los rayos), cuya existencia demuestra el teorema, se llaman r a y o s d e J u l i a, que es el nombre del científico que los descubrió.

El caso $z_0 = \infty$ se reduce al que acabamos de examinar mediante la transformación $\zeta = \frac{1}{z}$. En particular, para las funciones enteras obtenemos la proposición siguiente:

T e o r e m a. *Sea $f(z)$ una función trascendente entera; entonces en el plano existen unos puntos, distintos del origen de coordenadas, tales que en cualquier entorno de los mismos la familia $\{f(2^n z)\}$ no es normal. El rayo que parte del origen de coordenadas y pasa por tal*

punto, posee la propiedad de que un ángulo de magnitud arbitrariamente pequeña, simétrico respecto de este rayo, contiene un conjunto infinito de A-puntos de la función para cualquier valor finito A, a excepción, posiblemente, de uno.

Como ejemplo, consideremos la función e^z. Esta posee dos rayos de Julia, dirigidos por las partes positiva y negativa del eje imaginario. En efecto, si $A \neq 0$, entonces las raíces de la ecuación $e^z = A$ son:

$$z_k = \operatorname{Ln} A = \ln |A| + i \arg A + 2k\pi i.$$

Supongamos, para precisar, que k es positivo. Como la tangente del ángulo formado por el vector z_k y la dirección positiva del eje imaginario es igual a $\frac{\ln |A|}{\arg A + 2k\pi}$, ésta tiende a cero cuando k crece indefinidamente. De aquí se deduce que los puntos z_k, comenzando desde uno de ellos en adelante, pertenecen a cualquier ángulo fijado que sea simétrico respecto de la parte positiva del eje imaginario. Para k negativos y para la parte negativa del eje imaginario se obtiene un resultado similar. Obsérvese que aquí todos los puntos del eje imaginario son tales, que en cualquiera de sus entornos la familia $\{e^{2^n z}\}$ no es normal. En efecto, en cada uno de ellos $|e^{2^n z}| = 1$, mientras que en los puntos que están situados en los semiplanos de la derecha y de la izquierda, la sucesión $\{e^{2^n z}\}$ converge hacia ∞ y 0, respectivamente. De aquí se deduce que para los puntos del eje imaginario no existe un entorno en el que la sucesión $\{e^{2^{n_k} z}\}$ sea uniformemente convergente.

APENDICE

SOBRE LA BASE EN EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES ANALITICAS

I

1. Consideremos el conjunto de todas las funciones uniformes de la variable compleja z que son analíticas en el círculo $|z| < R$ $(0 < R \leqslant \infty)$. Si $\{r_n\}$ es alguna sucesión monótona creciente de números positivos que satisfacen a la condición $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = R$, entonces, determinando la norma de una función analítica $f(z)$ mediante la relación

$$\|f(z)\| = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\max\limits_{|z| \leqslant r_n} |f(z)|}{1 + \max\limits_{|z| \leqslant r_n} |f(z)|},$$

podemos considerar este conjunto como un espacio lineal E_R de tipo F[1]. De acuerdo a la norma admitida, la convergencia en este espacio se define como la convergencia uniforme de la sucesión de funciones analíticas en cada conjunto cerrado de puntos del círculo $|z| < R$. Está claro que este espacio no es de Banach. Es sabido[2] que cualquiera que sea la definición de la norma no se puede llegar a obtener aquí un espacio de Banach, si se admite la convergencia en el sentido indicado.

2. Una funcional lineal definida en E_R siempre se puede expresar en la forma

$$L(f) = \sum_{0}^{\infty} l_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \tag{1}$$

---

[1]) Las definiciones y resultados fundamentales del análisis funcional se dan en el libro de S. Banach, Thèorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

[2]) P. Urysohn, Sur un probléme de M. Fréchet relatif aux classes des fonctions holomorphes, Comptes rendu du Congrés des Sociétés savantes en 1924, Sciences.

donde $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|l_n|} = l < R$. En efecto, si se cumple la última condición, la serie (1) es convergente para cualquier $f(z) \in E_R$ $\left(\text{puesto que } \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right|} \leqslant \frac{1}{R}\right)$; por ello, su suma define una funcional en E_R que, evidentemente, es aditiva. Por otra parte, si $l < r < R$, se tiene:

$$\sum_0^\infty \frac{|l_n|}{r^n} < \infty, \quad \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant \frac{\max\limits_{|z|\leq r} |f(z)|}{r^n}$$

y, por consiguiente,

$$|L(f)| < \max_{|z|\leq r} |f(z)| \sum_0^\infty \frac{|l_n|}{r^n}.$$

De aquí se deduce que $L_n(f) \to 0$ cuando $f(z) \to \theta$ (θ es el cero del espacio E_R, es decir, la función que es idénticamente nula). Resumiendo, $L(f)$ es una funcional lineal. Recíprocamente, si $L(f)$ es alguna funcional lineal en E_R, entonces, haciendo $L(z^n) = l_n$, se tiene:

$$L(f) = L\left(\sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n\right) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} l_n.$$

Si se supone que $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|l_n|} \geqslant R$, entonces existe una subsucesión infinita de números l_n, distintos de cero: $\{l_{n_j}\}$, para los cuales $\lim_{j\to\infty} \sqrt[n_j]{|l_{n_j}|} > R$. La función $F(z) = \sum_{j=0}^\infty \frac{z^{n_j}}{l_{n_j}}$ pertenece a E_R, por lo cual, la serie $\sum_{j=0}^\infty \frac{1}{l_{n_j}} l_{n_j}$ tiene que ser convergente, lo cual, evidentemente, es imposible. Por lo tanto, $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|l_n|} < R$.

En virtud de la condición demostrada, la función

$$\omega(\zeta) = \sum_0^\infty \frac{l_n}{\zeta^{n+1}} \tag{2}$$

es analítica en el punto del infinito y $\omega(\infty) = 0$. Por esto, $L(f)$ también puede expresarse en la forma

$$L(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l<|\zeta|=\rho<R} \omega(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta\,[3].$$

[3] Compárese con L. Fantappiè, I funzionali analitici, Memorie della Reale Academia Nazional dei Lincei, Serie sesta, Vol. III, Fasc. XI.

3. Desde el punto de vista de los problemas generales de la teoría de aproximaciones y desarrollos de las funciones en series, el espacio E_R es de un interés particular. Esto se justifica, por una parte, por aquel papel que desempeñan las funciones analíticas en el análisis y, por otra parte, por el carácter muy general del espacio E_R, que no entra en los marcos de los espacios de Banach. En este artículo nos dedicaremos al problema de la base en E_R, es decir, a buscar las condiciones que hay que imponer a una sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$ para que cualquier función $f(z)$, $f(z) \in E_R$, pueda expresarse en forma de una serie

$$f(z) = \sum_0^\infty c_n f_n(z)$$

y, además, de un modo único. Conviene indagar este problema dividiéndolo en una serie de problemas separados, dispuestos en un orden de subordinación. Ahora pasamos a ello, observando que el caso más general (el estudio de los problemas aquí considerados para el espacio de las funciones analíticas en un recinto simplemente conexo arbitrario) se reduce al considerado transformando conformemente el recinto en un círculo.

4. Sea $\{f_n(z)\}$ alguna sucesión de funciones de E_R. Diremos que ésta es completa[4]), si la cápsula lineal cerrada de $\{f_n(z)\}$ coincide con E_R, es decir, si cada función $f(z)$, $f(z) \in E_R$, puede expresarse como el límite de una sucesión de polinomios respecto de $\{f_n(z)\}$ (llamamos polinomios aquí a las combinaciones lineales de la forma $c_0 f_0(z) + \ldots + c_n f_n(z)$).

5. Si $\{f_n(z)\}$ es una sucesión completa (a veces diremos: sistema completo), entonces toda función $f(z)$, $f(z) \in E_R$, se expresa en la forma

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} p_n(z) = \lim_{n\to\infty} (c_0^{(n)} f_0(z) + \ldots + c_n^{(n)} f_n(z)). \qquad (3)$$

Por lo general, las columnas de los coeficientes $\{c_k^{(n)}\}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, c_k^{(n)} = 0$ para $n < k$) son divergentes. Claro que es fácil demostrar que siempre se puede elegir la sucesión $\{p_n(z)\}$ de tal modo que exista el límite $\lim_{n\to\infty} c_k^{(n)}$ para todos los k; pero, generalmente, estos límites dependen de la elección de $\{p_n(z)\}$. Para que ellos no dependan de $\{p_n(z)\}$ es necesario y suficiente que del cum-

---

[4]) En el libro citado de S. Banach se emplean en este sentido los términos: sucesión fundamental o cerrada.

plimiento de las relaciones

$$\left.\begin{array}{c}\lim\limits_{n\to\infty} p_n(z) = \lim\limits_{n\to\infty} (c_0^{(n)} f_0(z) + \ldots + c_n^{(n)} f_n(z)) = 0 \\ \text{siempre se deduzca que } \lim\limits_{n\to\infty} c_k^{(n)} = 0 \\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)^{5)}.\end{array}\right\} \qquad (4)$$

Es obvio que las funciones $\{f_n(z)\}$ que satisfacen a esta última condición son linealmente independientes y, además, no admiten desarrollos no triviales del cero. Pero un sistema de funciones linealmente independiente que no admita desarrollos no triviales del cero, puede no satisfacer a la condición (4), como muestra el ejemplo del sistema $1,\ 1+z,\ \ldots,\ 1+z^n,\ \ldots$, en el espacio E_1 (aquí $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(z) = \lim\limits_{n\to\infty} (f_0(z) - f_n(z)) = 0$). Estas observaciones justifican la definición y denominación siguientes[6]). Un sistema de funciones $\{f_n(z)\}$ se llama **sistema de independencia lineal reforzada** en E_R (abreviadamente, sistema de i.l.r), si se cumple la condición (4), es decir, si de la convergencia a cero de una sucesión de polinomios respecto de $\{f_n(z)\}$ se deduce la convergencia a cero de cada una de las columnas de la matriz de los coeficientes de estos polinomios. Esta definición no supone que el sistema $\{f_n(z)\}$ sea completo; no obstante, aquí lo aplicaremos solamente a los sistemas completos

6. Si $\{f_n(z)\}$ es un sistema completo de i.l.r. y $f(z)$ es alguna función de E_R, entonces de (3) se deduce que existen los límites

$$\lim_{n\to\infty} c_k^{(n)} = c_k = L_k(f) \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (5)$$

$L_k(f)$ son funcionales aditivas y, en virtud de la propiedad de i.l.r. (4), son continuas en E_R, es decir, son funcionales lineales. Está claro que

$$L_k(f_m) = \delta_{km} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (6)$$

---

[5]) Aquí se tiene en cuenta el primer capítulo de mi trabajo « Algunas cuestiones de la teoría de la aproximación y del desarrollo de las funciones en series ». El artículo presente es una exposición de una parte esencial del segundo capítulo de este trabajo.

[6]) A. Markushévich, Sobre la base (en el sentido amplio de la palabra) para los espacios lineales (А. Маркушевич, О базисе (в широком смысле слова) для линейных пространств, Доклады АН СССР, XII (1943), № 6, стр. 241—243); « Generalización de un teorema de D. E. Menshov («Обобщение одной теоремы Д. Е. Меньшова». Матем. сб., 15(57), 433—436). Desde un punto de vista un poco distinto y sólo para un espacio de Hilbert, los sistemas de independencia lineal reforzada fueron estudiados antes bajo el nombre de sistemas minimales por S. Lowin, en su trabajo « Über einige mit der Konvergenz im Mittel verbundenen Eigenschaften von Funktionenfolgen », Math. Zeitschrift Bd. 32, S. 491—511.

donde $\delta_{km} = 0$ para $k \neq m$ y $\delta_{kk} = 1$, es decir, $\{f_n\}$ y $\{L_n\}$ forman un sistema biortogonal. Recíprocamente, si un sistema completo de funciones $\{f_n(z)\}$ admite un sistema de funcionales lineales que es biortogonal con él, entonces, evidentemente, es un sistema de i.l.r. Así, pues, la existencia de un sistema de funcionales lineales $\{L_n\}$ que sea biortogonal con el sistema completo $\{f_n(z)\}$ es un criterio de i.l.r. del sistema $\{f_n(z)\}$.

Señalemos otro criterio más de sistema de i.l.r., que se demuestra fácilmente. Para que un sistema $\{f_n(z)\}$ sea de i.l.r., es necesario y suficiente que para cualquier n_0 la distancia de $f_{n_0}(z)$ a la cápsula lineal cerrada del conjunto $f_0(z), \ldots, f_{n_0-1}(z), f_{n_0+1}(z), \ldots$, sea distinta de cero.

7. Sea $\{f_n(z)\}$ un sistema completo de i.l.r. y sea $\{L_n\}$ un sistema de funcionales lineales, biortogonal con $\{f_n(z)\}$ ($\{f_n(z)\}$ determina a este sistema de un modo único).

Si

$$L_n(f) = \sum_0^\infty l_j^{(n)} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \quad \left(l_j^{(n)} = L_n(z^j), \quad \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|l_j^{(n)}|} = l^{(n)} < R\right), \tag{7}$$

a las funciones

$$\omega_n(\zeta) = \sum_0^\infty \frac{l_j^{(n)}}{\zeta^{j+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

las llamaremos **asociadas** con $\{f_n(z)\}$. Cuando $R < \infty$, las funciones $\omega_n(\zeta)$ pueden determinarse mediante las relaciones:

$$\omega_n(\zeta) = L_n\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) \qquad (|\zeta| \geqslant R). \tag{8}$$

8. En el caso de un sistema completo de i.l.r. $\{f_n(z)\}$, a cada función $f(z) \in E_R$ se le asocia su desarrollo respecto de las funciones $\{f_n(z)\}$:

$$f(z) \sim \sum_0^\infty L_n(f) \cdot f_n(z). \tag{9}$$

Si alguna serie de la forma $\sum_0^\infty c_n f_n(z)$ converge hacia $f(z)$, o por lo menos posee una subsucesión de sumas parciales que converge hacia $f(z)$, entonces, debido a la i.l.r de $\{f_n(z)\}$

$$c_n = L_n(f) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Pero si, recíprocamente, se sabe que la serie (9) converge hacia cierta función $F(z)$ (o posee una subsucesión de sumas parciales que converge hacia $F(z)$), entonces no se puede generalmente afirmar

que $F(z) = f(z)$. Podemos convencernos de esto en el ejemplo del sistema $1,\ 1+z,\ 1+z+z^2, \ldots, 1+z+\ldots+z^n, \ldots$ en el espacio E_1. Es obvio que éste es completo; su i.l.r. es consecuencia de la existencia de un sistema de funcionales lineales que es biortogonal con el mismo:

$$L_n(f) = \frac{f^n(0)}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\,.$$

Pero aquí la función $f(z) = \frac{1}{z-1} \in E_1$ posee un desarrollo cuyos coeficientes son todos ceros $(L_k(f) = \lim\limits_{n\to\infty} L_k(1+\ldots+z^n) = \lim\limits_{n\to\infty} L_k(f_n) = 0)$ y el cual, por consiguiente, converge hacia $F(z) = \theta \neq f(z)$.

Diremos que una sucesión de funcionales lineales $\{L_n\}$, definidos en E_R, posee la propiedad de unicidad, si de las relaciones

$$\left.\begin{array}{l} L_n(f) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad f(z) \in F_R \\ \text{se deduce que} \quad f(z) = \theta. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Esta definición no exige que el sistema $\{L_m\}$ sea biortogonal con algún sistema de funciones $\{f_n(z)\}$.

9. Un sistema completo de i.l.r. $\{f_n(z)\}$, para el cual la sucesión correspondiente de funcionales lineales (biortogonal con $\{f_n(z)\}$) posee la propiedad de unicidad, lo llamaremos base en el sentido amplio del espacio E_R[7]. En este caso, la serie (9) no puede converger hacia una función $F(z)$ distinta de $f(z)$, del mismo modo que no puede poseer una subsucesión de sumas parciales que converja hacia $F(z) \neq f(z)$. Por lo tanto, en el caso de una base en el sentido amplio de la palabra, el desarrollo (9) puede converger hacia $f(z)$, o puede poseer una subsucesión de sumas parciales que converja hacia $f(z)$, o finalmente, puede no poseer subsucesiones de sumas parciales convergentes. Correspondientemente a esto, las funciones del espacio E_R se dividen en tres clases: A, B y C (en el orden de enumeración). La primera de éstas nunca es vacía (pues forman parte de ella, por ejemplo, todos los polinomios respecto de $\{f_n(z)\}$). El ejemplo del sistema $\{(z-\alpha)^n\}$ $(\alpha \neq 0,\ |\alpha| < 1)$ en el espacio E_1 muestra que la clase C puede ser no vacía. Este sistema representa una base en el sentido amplio de la palabra (aquí las funcionales lineales que son biortogonales con $\{(z-\alpha)^n\}$ tienen la forma $L_n(f) = \frac{f^n(\alpha)}{n!}$; éstas, evidentemente, poseen la propiedad de unicidad). En este

[7]) Véase el primer artículo de los señalados en la llamada [6]).

ejemplo figura en la clase C la función

$$\frac{1}{1-z} \sim \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{(1-\alpha)^2}(z-\alpha) + \ldots + \frac{1}{(1-\alpha)^{n+1}}(z-\alpha)^n + \ldots$$

En efecto, ninguna subsucesión de sumas parciales de su desarrollo puede converger fuera del círculo

$$|z-\alpha| < |1-\alpha|$$

(esto se comprueba mediante un cálculo simple). Se puede demostrar que toda función de la clase C siempre se expresa en forma de una suma de dos funciones de la clase B (claro, la expresión no es única)[8]. Por lo tanto, la clase B no puede ser vacía si la clase C no es vacía. Sería interesante cerciorarse de que es justo lo recíproco.

10. Cuando las clases B y C son vacías, es decir, cuando el desarrollo (9) según los elementos de la base en sentido amplio de la palabra es convergente para cualquier función del espacio E_R, la base en sentido amplio se convierte en una base en sentido estricto de la palabra, es decir, simplemente en una base (véase más arriba el ap. 1). En otras palabras, una sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$ que satisface a las condiciones:

(α) $\{f_n(z)\}$ es un sistema completo (en E_R);

(β) $\{f_n(z)\}$ es un sistema de i.l.r.;

(γ) la sucesión de funcionales lineales $\{L_n\}$ que es biortogonal con $\{f_n(z)\}$ (ésta existe en virtud de (β)) posee la propiedad de unicidad;

(δ) para toda función $f(z) \in E_k$ su desarrollo según las funciones $\{f_n(z)\}$ es convergente;

es una base de E_R.

Es cierto lo recíproco: si un sistema $\{f_n(z)\}$ es una base de E_R, entonces se cumplen todas las condiciones (α) — (δ).

Sólo se necesita demostrar la propiedad (β). Para un espacio de tipo Banach los razonamientos correspondientes se pueden hallar en el libro de S. Banach[1]) (pág. 111). Estos razonamientos pueden extenderse también a los espacios de tipo F, basándose para esto en algunas propiedades de estos espacios, señaladas por S. Mazur y W. Orlicz[9]).

En resumen, un sistema $\{f_n(z)\}$ es una base de E_R cuando, y sólo cuando, se cumplen las condiciones (α), (β), (γ) y (δ) de este apartado. Señalemos que sólo el cumplimiento de las primeras tres condiciones

---

[8]) Véase el segundo artículo de los mencionados en la llamada [6]) y también el artículo del autor «Sobre la aproximación óptima» («О наилучшем приближении», Доклады АН СССР, 1944).

[9]) S. Mazur und W. Orlicz, Über Folgen linearer Operationen, Studia Math., t. IV, 1933. La demostración completa se expone en el primer capítulo del trabajo mencionado en la llamada [6]).

(α), (β) y (γ) significa que $\{f_n(z)\}$ es una base en el sentido amplio de la palabra.

En correspondencia con las condiciones (α) — (δ) el problema de la base se divide en los problemas siguientes:

(a) problema de complitud para un sistema de funciones $\{f_n(z)\}$;

(b) problema de i.l.r. para un sistema $\{f_n\}$;

(c) problema de unicidad para un sistema de funcionales lineales $\{L_n\}$;

(d) problema de convergencia para las series $\sum\limits_0^\infty L_n(f)\cdot f_n(z)$ (aquí $\{f_n(z)\}$ representa una base en el sentido amplio de la palabra).

Pasamos ahora al estudio de estos cuatro problemas, comenzando con (a) y (c), que son los centrales y están estrechamente ligados entre sí.

II

1. Comenzaremos por estblecer unos conceptos que representan la generalización de la transformación clásica de Borel empleada en la teoría de las funciones analíticas.

Sea $F(z, \zeta)$ una función de dos variables complejas, analítica respecto de cada una de ellas en los círculos

$$|z|<R \quad \text{y} \quad |\zeta|<P \qquad (0<R\leqslant\infty,\ 0<P\leqslant\infty)$$

respectivamente, y, por consiguiente, analítica respecto del conjunto de las dos variables z, ζ en el recinto tetradimensional: $|z|<R$, $|\zeta|<P$. Designaremos con $\underset{z}{L}$ y $\underset{\zeta}{\Lambda}$ todas las funcionales lineales posibles definidas en los espacios E_R y E_P, respectivamente. Los conjuntos de las funciones

$$\{\underset{\zeta}{\Lambda}[F(z, \zeta)]=f(z)\} \quad \text{y} \quad \{\underset{z}{L}[F(z, \zeta)]=\varphi(\zeta)\}$$

representan unos subconjuntos O y Ω de los espacios E_R y E_P:

$$O\subset E_R, \qquad \Omega\subset E_P.$$

Diremos que estos conjuntos están *engendrados* por la función $F(z, \zeta)$ (y que son conjugados respecto de $F(z, \zeta)$).

Como ejemplo, hagamos $F(z, \zeta) = e^{z\zeta}$ ($R = P = \infty$). En este caso los espacios E_R y E_P son idénticos y, además, coinciden entre sí O y Ω (debido a la simetría de $F(z, \zeta)$). Una funcional lineal arbitraria en E_∞ tiene la forma

$$L(f)=\sum_0^\infty a_n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \qquad a=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<\infty$$

(véase el ap. 2.1); por esta razón, las funciones engendradas por $F(z, \zeta)$ tienen aquí la forma

$$\varphi(\zeta) = \underset{z}{L}(e^{z\zeta}) = \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \zeta^n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r>a} e^{r\zeta} \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} dz, \qquad (11)$$

o sea, representan el resultado de aplicar la transformación de Borel a la función $\sum\limits_{0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$, la cual es analítica en el punto del infinito. De la condición $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = a < \infty$ se deduce que $\varphi(\zeta)$ es una función entera de tipo exponencial (es decir, es una función de orden inferior a la unidad, o de orden igual a la unidad pero de tipo finito). Recíprocamente, toda función de tipo exponencial puede expresarse en la forma $L(e^{z\zeta})$. Así, pues, en este ejemplo el conjunto $\Omega = O$ es la colección de todas las funciones enteras de tipo exponencial.

2. Examinemos un ejemplo más general, en que $F(z, \zeta) = f(z\zeta)$ y $f(z) = \sum\limits_{0}^{\infty} c_n z^n$ es una función analítica en el recinto $|z| < R'$. Podemos considerar a $F(z, \zeta)$ como una función analítica en el recinto $|z| < R$, $|\zeta| < P$, donde $R \leqslant R'$, $P = \frac{R'}{R}$ para $R' < \infty$ y $P = \infty$ para $R' = \infty$. Entonces, para una funcional lineal $L(f)$ definida en E_R, se tiene:

$$L(f) = \sum_{0}^{\infty} a_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \left(a = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < R\right).$$

Por ello, el conjunto Ω consta aquí de las funciones de la forma

$$\varphi(\zeta) = \underset{z}{L}(F(z, \zeta)) = \underset{z}{L}\left[\sum_{0}^{\infty} c_n z^n \zeta^n\right] = \sum_{0}^{\infty} a_n c_n \zeta^n.$$

Supongamos primero que $R' < \infty$; entonces todas estas funciones son analíticas en el círculo cerrado $|\zeta| \leqslant P = \frac{R'}{R}$ $\left(\text{puesto que } \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n c_n|} \leqslant \frac{a}{R'} < \frac{R}{R'} = \frac{1}{P}\right)$ y, en todo caso, son analíticas en el círculo unidad cerrado (pues $R \leqslant R'$). Lo recíproco, por lo general, no es cierto. Es fácil señalar las condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto O coincida exactamente con el conjunto de las funciones que son analíticas en el círculo cerrado

$|z| \leqslant P = \frac{R'}{R}$. Tales condiciones son: (a) $c_n \neq 0$ (0, 1, 2, . . .), (b) existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \left(= \frac{1}{R'}\right)$.

Supongamos ahora que $R' = \infty$, es decir, que $f(z)$ es una función entera. Supongamos que la clase de $f(z)$ no es superior a $[\rho, \sigma]$[10]. Entonces para la función entera

$$\varphi(\zeta) = \underset{z}{L}[F(z, \zeta)] = \sum_{0}^{\infty} a_n c_n \zeta^n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r>a} f(z\zeta) \sum_{0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$$

$$\left(a = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < R\right)$$

se tiene:

$$|\varphi(\zeta)| < C(r, \varepsilon)\, e^{(\sigma+\varepsilon) r^\rho |\zeta|^\rho},$$

de donde la clase de $\varphi(\zeta)$ es inferior a $[\rho, \sigma R^\rho]$. Así, pues, en el caso considerado las funciones de la clase son funciones enteras de clase inferior a $[\rho, \sigma R^\rho]$. Lo recíproco, por lo general, no es cierto. Es fácil señalar las condiciones necesarias y suficientes para que el conjunto Ω coincida con el conjunto de todas las funciones enteras de clase inferior a $[\rho, \sigma R^\rho]$. Tales condiciones son: (a') $c_n' \neq 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), (b') existe el limite $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|} = (e\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}}$.

3. Después de estos ejemplos introduciremos las definiciones siguientes (para facilitar la exposición ulterior enunciamos solamente una de ellas en términos de O y la otra en términos de Ω).

Una sucesión de funciones $\{f_n(z)\}$, pertenecientes a O, es decir, tales que $f_n(z) = \underset{\zeta}{\Lambda_n}(F(z, \zeta))$, se llama relativamente completa (en O), si O pertenece a la cápsula lineal de $\{f_n(z)\}$.

Respecto de una sucesión de funcionales lineales $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$ del espacio E_p, diremos que posee la propiedad de unicidad relativa (en Ω), si de $\varphi(\zeta) \in \Omega$ y $\Lambda_n(\varphi) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), se deduce que $\varphi(\zeta) = \theta$.

4. Teorema I (principio de dualidad). *Un sistema de funciones $\{f_n(z) = \underset{\zeta}{\Lambda_n}[F(z, \zeta)]\}$ se llama relativamente completa (en O) cuando, y sólo cuando, el sistema de funcionales $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$*

[10]) Siguiendo a V. L. Goncharov, decimos que la clase de una función entera $f(z)$ no es superior (o es inferior, respectivamente) a $[\rho, \sigma]$, si el orden de $f(z)$ es inferior a ρ, o es igual a ρ pero su tipo no es superior (o es inferior, respectivamente) a σ.

que lo engendra de la función $F(z, \zeta)$, posee la propiedad de unicidad relativa (en Ω)[11].

D e m o s t r a c i ó n. Supongamos que el sistema de funciones $\{f_n(z)\}$, $f_n(z) \in O$, es relativamente completo. Fijando algún ζ_0, $|\zeta_0| < P$, observamos que $F(z, \zeta_0) \in O$. Por consiguiente, existe una sucesión de polinomios respecto de $\{f_n(z)\}$ que converge hacia $F(z, \zeta_0)$, es decir

$$F(z, \zeta_0) = \sum_0^{\infty} P[f_n(z)].$$

Supongamos ahora que $\varphi(\zeta) = \underset{z}{L}[F(z, \zeta)] \in \Omega$ y $\underset{\zeta}{\Lambda_n}(\varphi) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), donde $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$ es el sistema de funcionales lineales que engendra la sucesión $\{f_n(z)\}$. Entonces

$$\varphi(\zeta_0) = \underset{z}{L}[F(z, \zeta_0)] = \sum_0^{\infty} P\{\underset{z}{L}[\underset{\zeta}{\Lambda_n}(F(z, \zeta))]\} =$$

$$= \sum_0^{\infty} P\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}[\underset{z}{L}(F(z, \zeta))]\} = \sum_0^{\infty} P\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}[\varphi(\zeta)]\} = 0$$

(es fácil demostrar que $\underset{z}{L}$ y $\underset{\zeta}{\Lambda_n}$ son conmutables). Como ζ_0 es arbitrario, de aquí sacamos la conclusión que $\varphi(\zeta) \equiv 0$. Así, pues, el sistema de funcionales lineales $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$ posee la propiedad de unicidad relativa.

Para demostrar la segunda parte del teorema, supongamos que $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$ posee la propiedad de unicidad relativa, pero que el sistema de funciones $\{f_n(z) = \underset{\zeta}{\Lambda_n}[F(z, \zeta)]\}$ no es relativamente completo. Entonces existen una función $f(z) = \underset{\zeta}{\Lambda}[F(z, \zeta)] \in O$ y un número r, $0 < r < R$, tales que

$$\inf \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - \Pi[f_n(re^{i\theta})]|^2 \, d\theta > 0$$

(aquí $\Pi[f_n(re^{i\theta})]$ es un polinomio respecto de $\{f_n(re^{i\theta})\}$). En efecto, para las funciones analíticas, de la convergencia en media (en el sentido de L_2) en una circunferencia $|z| = r$ se deduce la convergencia uniforme en cada círculo concéntrico de menor radio. Ortogonalizando las funciones $\{f_n(re^{i\theta})\}$ en el intervalo $(0, 2\pi)$, obtenemos

[11]) En una forma menos general este teorema fue publicado en mi artículo «Respecto del problema de la complitud de las funciones analíticas» («К проблеме полноты аналитических функций», Доклады АН СССР, 1943).

una sucesión de polinomios $\{P_j [f_n (re^{i\theta})]\}$; la serie de Fourier de la función $f (re^{i\theta})$, dispuesta según estos polinomios, converge en media hacia cierta función $\tilde{f} (\theta)$ cuyo módulo es de cuadrado integrable en el intervalo $(0, 2\pi)$:

$$\tilde{f}(\theta) = \sum_{0}^{\infty} a_j P_j ([f_n (re^{i\theta})]),$$

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f (re^{i\theta}) \cdot \overline{P_j [f_n (re^{i\theta})]}\, d\theta$$

(la convergencia se entiende en el sentido de convergencia en media). En virtud de la hipótesis

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f (re^{i\theta}) - \tilde{f} (re^{i\theta}) |^2 \, d\theta > 0.$$

Por otra parte, los coeficientes de Fourier (respecto del sistema $\{P_j [f_n (re^{i\theta})]\}$) de la función $f (re^{i\theta}) - \tilde{f} (\theta)$ son iguales a cero:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f (re^{i\theta}) - \tilde{f} (\theta)] \cdot \overline{P_j [f_n (re^{i\theta})]}\, d\theta = 0,$$

de donde se obtiene sucesivamente

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{[f (re^{i\theta}) - \tilde{f} (\theta)]} \cdot P_j [f_n (re^{i\theta})]\, d\theta = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{[f (re^{i\theta}) - \tilde{f} (\theta)]} \cdot f_n (re^{i\theta})\, d\theta = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{[f (re^{i\theta}) - \tilde{f} (\theta)]} \cdot \underset{\zeta}{\Lambda_i} [F (re^{i\theta}, \zeta)]\, d\theta = 0$$

y

$$\underset{\zeta}{\Lambda_n} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{[f (re^{i\theta}) - \tilde{f} (\theta)]} \cdot F (re^{i\theta}, \zeta)\, d\theta \right\} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Pero la función que figura entre llaves pertenece a Ω. Por ello, como el sistema $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$ posee la propiedad de unicidad (relativa), resulta:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{[f (re^{i\theta}) - \tilde{f} (\theta)]} \cdot F (re^{i\theta}, \zeta)\, d\theta \equiv 0.$$

Para terminar la demostración, observemos que

$$f(re^{i\theta})-\widetilde{f}(\theta)=\lim_{n\to\infty}\left[f(re^{i\theta})-\sum_{0}^{n}a_jP_j[f_n(re^{i\theta})]\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\underset{\zeta}{\Lambda}[F(re^{i\theta},\zeta)]-\sum_{0}^{n}a_jP_j[\underset{\zeta}{\Lambda_n}(F(re^{i\theta},\zeta))]\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\underset{\zeta}{\widetilde{\Lambda}_n}[F(re^{i\theta},\zeta)],$$

donde $\{\widetilde{\Lambda}_n\}$ es una sucesión de funcionales lineales y la convergencia se entiende en el sentido de convergencia en media.

Pasando a límites en la relación

$$\underset{\zeta}{\widetilde{\Lambda}_n}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{[f(re^{i\theta})-\widetilde{f}(\theta)]}\cdot F(re^{i\theta},\zeta)\,d\theta\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{[f(re^{i\theta})-\widetilde{f}(\theta)]}\cdot\underset{\zeta}{\widetilde{\Lambda}_n}[F(re^{i\theta},\zeta)\,d\theta=0,$$

obtenemos definitivamente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})-\widetilde{f}(\theta)|^2\,d\theta=0,$$

lo cual contradice a la hipótesis. Así, pues, el teorema queda demostrado por completo.

5. El teorema expuesto lo aplicaremos a continuación fundamentalmente como criterio de complitud. Es particularmente importante el caso en que la cápsula lineal cerrada O es todo el espacio E_R. Entonces un sistema de funciones $\{f_n(z)\}$ que es relativamente completo (en O), es completo en todo el espacio E_R. Llamemos a una función $F(z, \zeta)$ c o m p l e t a (respecto de z), si la cápsula lineal cerrada O es todo el espacio E_R (ejemplos sencillos muestran que una función que es entera respecto de z puede no ser entera respecto de ζ). En otras palabras, una función $F(z, \zeta)$ se llama completa (respecto de z), si existe una sucesión de funcionales lineales $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$ tal, que la sucesión de las funciones $\{f_n(z)=\underset{\zeta}{\Lambda_n}[F(z,\zeta)]\}$ es completa en E_R, es decir, que la cápsula lineal cerrada de $\{f_n(z)\}$ coincide con E_R. Del teorema 1 se deduce que $F(z, \zeta)$ es completa cuando, y sólo cuando, todo sistema de funcionales $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$ que posea la propiedad de unicidad relativa (en Ω), engendra un sistema de funciones $\{f_n(z)\}$ que es completo en E_R. En particular, $F(z, \zeta)$ es completa

cuando, y sólo cuando, la sucesión $\left\{\left[\frac{\partial^n F(z, \zeta)}{\partial \zeta^n}\right]\right\}_{\zeta=0}$ es completa en E_R.

Como ejemplo, examinemos la función $F(z, \zeta) = f(z + \zeta)$, donde $f(z)$ es alguna función entera. Como los sistemas de funcionales $\underset{\zeta}{\Lambda_n}(\varphi) = \varphi(\zeta_n)$ (donde el conjunto $\{\zeta_n\}$ tiene al menos un punto de acumulación finito) y $\underset{\zeta}{\tilde{\Lambda}_n}(\varphi) = \varphi^{(n)}(\zeta_0)$ poseen la propiedad de unicidad respecto al conjunto de todas las funciones enteras (que contiene en sí a Ω), para que la función $F(z, \zeta)$ sea completa es necesario y suficiente que cualquiera de los sistemas de funciones $\{f(z + \zeta_n)\}$, $\{f^{(n)}(z)\}$ sea completo en E_∞. De aquí, en particular, se deduce que $\{f(z + \zeta_n)\}$ y $\{f^{(n)}(z)\}$ son simultáneamente completos o no (en E_∞).

6. Teniendo alguna función completa $F(z, \zeta)$, podemos engendrar de ella un conjunto infinito de sistemas de funciones completos en E_R, mediante sucesiones arbitrarias de funcionales lineales que posean la propiedad de unicidad relativa en Ω, en particular, mediante sistemas de funcionales que posean la propiedad de unicidad en todo el espacio E_R. Con tal método de obtención de sistemas completos se puede obtener cualquier sistema dado *a priori* (eligiendo de un modo correspondiente la función $F(z, \zeta)$ y el sistema de funcionales $\{\Lambda_n\}$). En efecto, si $\{f_n(z)\}$ es un sistema arbitrario de funciones analíticas en $|z| < R$, (no necesariamente completo) entonces, tomando una sucesión creciente cualquiera de números positivos $\{r_n\}$ que converja hacia R y haciendo la notación $\max_{|z| \leq r_n} |f_n(z)| = m_n$, hacemos:

$$F(z, \zeta) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f_n(z)}{n!\,(1 + m_n)} \zeta^n.$$

$F(z, \zeta)$ es una función analítica para $|z| < R$, $|\zeta| < \infty$ (para cada z fijado, $|z| < R$, $F(z, \zeta)$, considerada como función de ζ es entera de una clase no superior a $|1, 1|$). En este caso

$$f_n(z) = (1 + m_n)\left[\frac{\partial^n F(z, \zeta)}{\partial \zeta^n}\right]_{\zeta=0} = \underset{\zeta}{\Lambda_n}[F(z, \zeta)] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

III

1. Ahora nos dedicaremos a aplicar los resultados de la sección II a los problemas de complitud y unicidad[12]). Partiremos de una función completa (respecto de z) arbitraria $F(z, \zeta)$ que sea analítica

[12]) Estas proposiciones fueron señaladas parcialmente en el artículo mencionado en la llamada [11]).

para $|z| < R$, $|\zeta| < P$. Según el teorema 1, es suficiente tomar un sistema arbitrario de funcionales lineales $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$ que posea la propiedad de unicidad relativa en Ω o *a fortiori* en algún conjunto Ω', $\Omega \subseteq \Omega' \subseteq E_P$, para obtener un sistema de funciones

$$\{f_n(z) = \underset{\zeta}{\Lambda_n}[F(z, \zeta)]\},$$

completo en E_R.

Resulta un caso particularmente sencillo al hacer

$$F(z, \zeta) = f(z\zeta),$$

donde $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ es una función analítica en el recinto $|z| < R'$, $R' \geqslant R$, y tal que $c_n \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Entonces

$$F(z, \zeta) = \sum_0^\infty c_n z^n \zeta^n$$

es una función analítica para $|z| < R$ y $|\zeta| < P$, donde $P = \frac{R'}{R} \geqslant 1$ si $R' < \infty$ y $P = \infty$ si $R' = \infty$. Esta es completa en E_R, pues el sistema

$$\left\{\frac{1}{c_n \cdot n!}\left[\frac{\partial^n F(z, \zeta)}{\partial\zeta^n}\right]_{\zeta=0} = z^n\right\}$$

es completo en E_R.

En el ap. 2 de la sección II se señaló que la clase Ω (que consta de todas las funciones de la forma $\underset{z}{L}[f(z\zeta)]$, donde $\underset{z}{L}$ es una funcional lineal en el espacio E_R) está contenida en el conjunto de las funciones que son analíticas en el círculo cerrado $|z| \leqslant P = \frac{R'}{R}$ $(R' \geqslant R)$ si $R' < \infty$, y está contenida en el conjunto de todas las funciones enteras de clase inferior a $[\rho, \sigma R^\rho]$ si $R' = \infty$ y $f(z)$ es una función de clase no superior a $[\rho, \sigma]$. Por ello, deseando obtener sistemas completos de la forma $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}[f(z\zeta)] = \sum_0^\infty \alpha_j^{(n)} c_j z^n\}$, es suficiente tomar por $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$ funcionales lineales que posean la propiedad de unicidad respecto de las funciones que son analíticas para $|z| \leqslant P$, respectivamente, respecto de las funciones enteras de clase inferior a $[\rho, \sigma R^\rho]$, y, en todo caso, es suficiente que $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$ posean la propiedad de unicidad respecto de las funciones que son analíticas para $|z| \leqslant 1$.

2. F u n c i o n a l e s $\Lambda_n(\varphi) = \varphi(\zeta_n)$. Supongamos primero que el conjunto de puntos $\{\zeta_n\}$ posee al menos un punto de acumula-

ción en el círculo $|\zeta| < P$. Entonces el sistema $\{\Lambda_n\}_\zeta$ posee la propiedad de unicidad respecto de todo el espacio E_P y, por consiguiente, respecto de cualquiera de sus subconjuntos Ω. De aquí resulta el teorema:

T e o r e m a II_1. *Si $F(z, \zeta)$ $(|z| < R, |\zeta| < P)$ es completa respecto de z, entonces el sistema de funciones $\{F(z, \zeta_n)\}$ es completo en E_R para cualquier sucesión de puntos $\{\zeta_n\}$ que tenga al menos un punto de acumulación en el recinto $|\zeta| < P$.*

Haciendo $F(z, \zeta) = f(z\zeta)$, resulta el teorema:

T e o r e m a II_2. *Sea $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ una función analítica en el recinto $|z| < R'$ $(R' > R)$, y supongamos que todos sus coeficientes de Taylor son distintos de cero. Entonces el sistema de funciones $\{f_n(z\zeta_n) = \sum_0^\infty c_n (z\zeta_n)^n\}$ es completo en el círculo $|z| < R$ para cualquier conjunto de puntos $\{\zeta_n\}$ que tenga al menos un punto de acumulación en el círculo cerrado $|\zeta| \leqslant 1$.*

Aquí está contenido el siguiente teorema de A. O. Guelfond[13]):

Si $f(z)$ es analítica en el origen de coordenadas y $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = 0$, entonces el sistema $f(\zeta_0 z), f(\zeta_1 z), \ldots, f(\zeta_n z), \ldots$ es completo en cada círculo de radio finito.

En efecto, fijemos r, $0 < r < \infty$. Si $f(z)$ es analítica en el círculo $|z| < r_0$, entonces $f\left(\frac{r_0}{r} z\right)$ es una función analítica en el círculo $|z| < r$, y como todos los puntos $\left\{\zeta_n \cdot \frac{r}{r_0}\right\}$, comenzando desde cierto índice en adelante, están situados en el círculo $|\zeta| < 1$ y tienen en el mismo un punto de acumulación, resulta según el teorema II_2 que el sistema $\left\{f\left(\zeta_n \frac{r}{r_0} \cdot \frac{r_0}{r} z\right) = f(\zeta_n z)\right\}$ es completo en el círculo $|z| < r$, que es lo que se quería demostrar.

Detengámonos también en el caso en que $f(z)$ es una función entera de orden finito y de clase no superior a $[\rho, \sigma]$. Entonces las funciones $\varphi(\zeta) \in \Omega$ son enteras de clase inferior a $[\rho, \sigma R^\rho]$. Por esta razón, los ceros $\{\zeta_n\}$ de las funciones $\varphi(\zeta)$, si $\varphi(\zeta) \not\equiv 0$, tienen que satisfacer a la condición $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln |\zeta_n|} < \rho$, si el orden de $\varphi(\zeta)$ es menor que ρ, y a la condición $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{|\zeta_n|^\rho} \leqslant \rho\sigma R^\rho e$, si su orden es igual a ρ.

De aquí se tiene el siguiente teorema:

---

[13]) A. G e l f o n d, Sur les systèmes complètes de fonctions analytiques, Rec. math., 4 (1938), 149—156.

T e o r e m a II$_3$. *Si* $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, $c_n \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *es una función entera de clase no superior a* $[\rho, \sigma]$ $(0 < \rho < \infty,$ $0 < \sigma < \infty)$, *entonces el sistema* $\{f(z\zeta_n)\}$ *es completo en el círculo de radio* R, *si* $\{\zeta_n\}$ *es una sucesión de números complejos, distintos entre sí, que satisface a las condiciones*:

$$\text{(a)} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\zeta_n|} > \rho$$

o bien

$$\text{(b)} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\zeta_n|} = \rho \ \text{ y } \ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\zeta_n|^\rho} > \rho\sigma R^\rho e.$$

El teorema II$_3$ se puede confrontar con el siguiente teorema de A. O. Guelfond[14]).

Si $\{\zeta_n\}$ son números complejos con el único punto de acumulación en ∞ y existen los límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln|\zeta_n|} = \mu, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\zeta_n|^\mu} = \nu,$$

entonces, para una función entera $f(z)$ de orden ρ y tipo σ, cuyos coeficientes de Taylor sean distintos de cero, el sistema $\{f(z\zeta_n)\}$ es completo en el círculo $|z| < R$ si se cumple la condición

$$\mu > \rho \quad \text{o bien} \quad \mu = \rho \quad \text{y} \quad \nu > \rho\sigma \cdot 2^{\rho-1} R^\rho \Big/ \int_0^1 \frac{dx}{2 - x^{\frac{1}{\rho}}}.$$

En comparación con nuestro teorema, aquí se imponen las condiciones de existencia de los límites $\frac{\ln n}{\ln|\zeta_n|}$ y $\frac{n}{|\zeta_n|^\mu}$. Además, en una de las desigualdades el factor e se ha sustituido por $2^{\rho-1} \Big/ \int_0^1 \frac{dx}{2-x^{\frac{1}{\rho}}}$.

Este factor, para valores grandes de ρ $\left(\rho > 1 + \frac{1}{\ln 2}\right)$, proporciona una cota peor que a nuestra, y mejor, para valores pequeños de $\rho\left(\rho < \frac{1}{\ln 2}\right)$. Respecto de la precisión del teorema II$_3$, se pueden hacer las siguientes observaciones. Supongamos que para la función entera $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ de clase $[\rho, \sigma]$, se satisfacen las condiciones del ap. 2 de la sección II: (a′) $c_n \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; (b′) existe el límite $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|} = (e\rho\sigma)^{\frac{1}{\rho}}$.

[14]) Véase el trabajo citado en la llamada [13]).

Sea ahora $\{\zeta_n\}$ alguna sucesión de números complejos; hagamos la notación $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\zeta_n|} = \mu$. Si $\mu > \rho$, entonces, en virtud del teorema II_3, el sistema $\{f(\zeta_n z)\}$ es completo en cualquier círculo. Si $\mu < \rho$, podemos construir una función entera $\varphi_0(\zeta) \not\equiv 0$ de orden μ que tenga por ceros los puntos $\{\zeta_n\}$. Como ésta figura en el conjunto Ω engendrado por $F(z, \zeta) = f(z\zeta)$ ($|z| < R$, $|z| < \infty$), el sistema de funcionales $\{\Lambda_n = \underset{\zeta}{\varphi}(\zeta_n)\}$ no posee la propiedad de unicidad relativa en Ω y, por consiguiente, el sistema de funciones $\{f(\zeta_n z)\}$ no es completo en ningún círculo $|z| < R$. Finalmente, si $\mu = \rho$, entonces haciendo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{|\zeta_n|^{\mu}} = \nu$, deducimos de nuestro teorema que el sistema $\{f(\zeta_n z)\}$ es completo en el círculo $|z| < \left(\frac{\nu}{\rho\sigma e}\right)^{\frac{1}{\rho}}$; sin embargo, no hay fundamentos para afirmar que él no es completo en un círculo mayor.

En particular, en la teoría de las series de Dirichlet $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ es de interés la cuestión sobre las condiciones de complitud del sistema $\{e^{\lambda_n z}\}$ en cualquier círculo (o sea, en todo el plano). De los teoremas de esta sección se deduce que tal sistema es completo en cada uno de los siguientes casos:

(a) el conjunto $\{\lambda_n\}$ tiene al menos un punto de acumulación finito;

(b) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|} > 1;$$

(c) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|} = 1 \quad \text{y} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} = \infty.$$

Evidentemente, todos estos casos están comprendidos en uno:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} = \infty.$$

Si $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln|\lambda_n|} < 1$, se puede construir una función entera de orden menor que la unidad, no idénticamente nula, con los ceros en los puntos λ_n. Por ello, las funcionales $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$ no poseen aquí la propiedad de unicidad con respecto a la clase Ω engendrada por la función $e^{z\zeta}$; por consiguiente, el sistema de funciones $\{e^{z\lambda_n}\}$ no es completo en todo el plano. Si se cumplen las condiciones (a), (b) o (c), entonces éstas también se cumplen después de despreciar cualquier número finito de exponentes $\{\lambda_n\}$. Por esto, las funciones $e^{\lambda_0 z}, \ldots, e^{\lambda_n z}$ pertenecen aquí a la cápsula lineal cerrada de las funciones $e^{\lambda_{n+1} z}$,

$e^{\lambda_{n+2}z}$; en particular, de aquí se deduce[5]) que, cumpliéndose una de las condiciones (a), (b) o (c), existe una serie universal de Dirichlet $\sum_0^\infty a_n e^{\lambda_n z}$ para las funciones enteras (o para las funciones analíticas en un semiplano fijado).

Finalmente, señalaremos una generalización de un teorema más de A. O. Guelfond[13]), referente al caso en que los puntos $\{\zeta_n\}$ son números naturales. Para esto nos basaremos en el siguiente caso particular de una generalización del teorema de Carlson[15]), perteneciente a F. y R. Nevanlinna[16]).

Sea $\varphi(\zeta)$ una función entera de clase no superior a $|\rho, \sigma|$, y supongamos que los puntos $\{\zeta_n\}$ son tales que $\varliminf \frac{n}{|\zeta_n|^\mu} = \nu > 0$, estando situados todos ellos en un ángulo de magnitud 2α, $0 \leqslant \alpha < \min\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\rho}\right)$ con el vértice en el origen de coordenadas. Entonces, si $\sigma < \pi\nu \cos\rho\alpha$, la función $\varphi(\zeta)$ que se anula en los puntos $\{\zeta_n\}$ es idénticamente nula.

Aplicando este teorema obtenemos inmediatamente el siguiente resultado.

T e o r e m a II_4. *Si $f(z)$ es una función entera de clase no superior a $|\rho, \sigma|$ y $\{\zeta_n\}$ es alguna sucesión de números complejos, situados en un ángulo con el vértice en el origen de coordenadas y de magnitud 2α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \min\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2\rho}\right)$, entonces la sucesión de funciones $\{f(z\zeta_n)\}$ es completa en el círculo $|z| < R$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{|\zeta_n|^\rho} < \frac{\sigma R^\rho}{\pi \cos\alpha}.$$

En particular, para $\rho = 1$ y $\zeta_n = n$ $(\alpha = 0)$ obtenemos el teorema de A. O. Guelfond[13]):

Si $f(z)$ es una función entera de primer orden y tipo σ, el sistema $\{f(nz)\}$ es completo en el círculo $|z| < R$ si $\sigma < \frac{\pi}{R}$.

3. Funcionales $\underset{\zeta}{\Lambda_n}(\varphi) = \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\zeta_0)$. Supongamos primero que el punto ζ_0 pertenece al círculo $|\zeta| < P$. Entonces el sistema $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$ posee la propiedad de unicidad con respecto a todo el espacio E_P de funciones analíticas para $|\zeta| < P$. Por ello, obtenemos el teorema:

15) F. C a r l s o n, Sur une classe de séries de Taylor (Thése), Upsal, 1914, p. 58.

16) F. und R. N e v a n l i n n a, Über die Eigenschaften analytisher Funktionen in der Umgebung einer singulärer Stelle oder Linie, Acta Soc. Fennicae, t. L, N° 5, 1922.

T e o r e m a III$_1$. *Si* $F(z, \zeta)$ $(|z| < R,\ |\zeta| < P)$ *es una función analítica, que es completa respecto de z, entonces el sistema de funciones* $\left\{\left[\frac{\partial^n F(z,\zeta)}{\partial\zeta^n}\right]_{\zeta=\zeta_0}\right\}$ *es completo en* E_R *para cualquier punto* $\zeta = \zeta_0$ *que sea interior al círculo* $|\zeta| < P$.

Haciendo $F(z, \zeta) = f(z\zeta)$ y $\zeta_0 = 1$, obtenemos el teorema:

T e o r e m a III$_2$. *Sea* $f(z)$ *una función analítica en el recinto* $|z| \leqslant R'$, $R' > R$, *y supongamos que todos sus coeficientes de Taylor son distintos de cero. Entonces el sistema* $\{z^n f^{(n)}(z)\}$ *es completo en el círculo* $|z| < R$.

Este teorema lo demostró de otro modo I. I. Ibraguímov[17]).

Examinemos también aquí las funcionales de la forma:

$$\Lambda'_{\underset{\zeta}{n}}(\varphi) = c_0\frac{f^{(n+p)}(0)}{(n+p)!} + c_1\frac{f^{(n+p-1)}(0)}{(n+p-1)!} + \ldots + c_p\frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

donde p es un número natural y todos los ceros del polinomio $c_0 + c_1 z + \ldots + c_p z^p$ no superan en valor absoluto a 1. Se ve fácilmente que las funcionales $\{\Lambda'_{\underset{\zeta}{n}}\}$ poseen la propiedad de unicidad con respecto a las funciones analíticas en el círculo unidad cerrado. En efecto, de $\Lambda'_{\underset{\zeta}{n}}(\varphi) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, se deduce, evidentemente, que $\varphi(\zeta) = \frac{d_0 + \ldots d_{p-1}\zeta^{p-1}}{c_0 + \ldots + c_p\zeta^p}$ es una función, la cual, debido a la hipótesis respecto de $c_0 + \ldots + c_p\zeta^p$, puede ser analítica en el círculo unidad cerrado solamente cuando es idénticamente igual a cero. De aquí resulta que para toda función $f(z)$ que sea analítica en el círculo $|z| < R$ y cuyos coeficientes de Taylor sean distintos de cero, el sistema $\left\{\frac{c_0}{(n+p)!}z^{n+p}f^{(n+p)}(z) + \ldots + \frac{c_p z^n}{n!}f^{(n)}(z)\right\}$ es completo en el círculo $|z| < R$. Exactamente igual, el sistema de funcionales

$$\Lambda''_{\underset{\zeta}{n}}(\varphi) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} - \alpha_n\frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

donde $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\alpha_0\ldots\alpha_{n-1}|} \geqslant 1$, posee la propiedad de unicidad en el círculo unidad cerrado. De aquí, similarmente a lo anterior, se deduce, en las mismas condiciones respecto de $f(z)$, que el sistema

$$\left\{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(z) - \alpha_n\frac{z^n}{n!}f^{(n)}(z)\right\}$$

es completo en el círculo $|z| < R$.

---

[17]) I. I. I b g r a g u í m o v, Respecto de la complitud de ciertos sistemas de funciones analíticas (И. И. И б р а г и м о в, О полноте некоторых систем аналитических функций, Известия АН СССР, серия матем., 1939, стр. 553—558).

4. Funcionales $\Lambda_{n}(\varphi) = \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(\zeta_n)$. En virtud del conocido resultado de V. L. Goncharov[18]), este sistema de funcionales posee la propiedad de unicidad en todo el espacio E_P, si $\{\zeta_n\}$ tiene un punto de acumulación ζ_0 en el interior del círculo $|\zeta| < P$ y si, además, $\sum_0^\infty |\zeta_{n+1} - \zeta_n| < \infty$. Por esta razón, obtenemos el teorema:

Teorema IV$_1$. *Si $F(z, \zeta)$ $(|z| < R, |\zeta| < P)$ es una función analítica, completa respecto de z, entonces el sistema de funciones $\left\{\left[\frac{\partial^n F(z, \zeta)}{\partial\zeta^n}\right]\right\}_{\zeta=\zeta_n}$ es completo en E_P, si $\{\zeta_n\}$ converge hacia un punto ζ_0, $|\zeta_0| < P$, y si, además, $\sum_0^\infty |\zeta_{n+1} - \zeta_n| < \infty$.*

Siendo $F(z, \zeta) = f(z\zeta)$, basándose en las indicaciones del ap. 1 de la presente sección, podemos afirmar que se verifica el siguiente teorema:

Teorema IV$_2$. *Si $f(z)$ es una función analítica en el círculo $|z| < R'$ $(R' \geqslant R)$, y todos los coeficientes de Taylor de $f(z)$ son distintos de cero, entonces el sistema de funciones $\{z^n f^{(n)}(z\zeta_n)\}$ es completo en el círculo $|z| < R$ para cualquier sucesión $\{\zeta_n\}$ que converja hacia ζ_0, $|\zeta_0| \leqslant 1$, de tal modo que $\sum_0^\infty |\zeta_{n+1} - \zeta_n| < \infty$.*

Suponiendo que $f(z)$ es una función entera de clase no superior a $[1, \sigma]$, podemos afirmar que las funciones correspondientes $\varphi(\zeta)$, $\varphi(\zeta) \in \Omega$ son enteras de clase inferior a $[1, \sigma R]$.

Es sabido[19]) que si una función entera $\varphi(\zeta)$ de clase inferior a $[1, \ln 2]$ satisface a las condiciones $\varphi^{(n)}(\zeta_n) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, entonces $\varphi(\zeta) \equiv 0$ (este resultado, a pesar de no ser definitivo, no puede mejorarse cualitativamente, pues $\cos\frac{\pi}{4}(z+1)$ es una función de clase $\left[1, \frac{\pi}{4}\right]$, para la cual cada una de las derivadas tiene un cero en la circunferencia unidad). Por ello, el sistema de funcionales lineales $\{\Lambda_n(\varphi) = \varphi^n(\zeta_n)\}$, $|\zeta| \leqslant 1$ engendrado por $F(z, \zeta) = f(z\zeta)$, siendo $R < \frac{\ln 2}{\sigma}$, posee la propiedad de unicidad respecto de Ω. De aquí resulta:

---

[18]) V. L. Goncharov, Recherches sur les dérivées successives de fonctions analytiques (Thése), 1930.

[19]) J. M. Whittaker, Interpolatory function theory, Cambridge at the University press, 1935. A J. M. Whittaker y también Takenaka y Kakeya (trabajos de los años 1931-32) solamente les pertenece la mejoración de la constante, en el teorema establecido en Thèse por V. L. Goncharov, de $\frac{1}{2e}$ a $\ln 2$.

Teorema IV$_3$. *Si* $f(z) = \sum\limits_0 c_n z^n$ *es una función entera de clase no superior a* $[1, \sigma]$ $(0 < \sigma < \infty)$ *cuyos coeficientes de Taylor son distintos de cero, entonces el sistema de funciones* $\{z^n f^{(n)}(z\zeta_n)\}$, $|\zeta_n| \leqslant 1$, *es completo en el círculo* $|z| < \frac{\ln 2}{\sigma}$. (La constante $\ln 2$ no puede ser sustituida aquí por una constante no menor que $\frac{\pi}{4}$.)

En el caso particular en que $f(z) = e^z$, obtenemos de aquí el teorema de Ibraguímov[17]) sobre la complitud del sistema de funciones

$$\{z^n e^{z\zeta_n}\}, \qquad |\zeta_n| \leqslant 1,$$

en el círculo $|z| < \ln 2$.

5. Funcionales $\Lambda_n(\varphi) = \int\limits_0^{\zeta_0} (n)\, \varphi(z)\, dz = \varphi^{(-n)}(\zeta_0) = \frac{1}{(n-1)!} \times$

$$\times \int\limits_0^{\zeta_0} \varphi(z)(\zeta_0 - z)^{n-1}\, dz \; (n > 0).$$

Si $\Lambda_n(\varphi) = 0$ y $\zeta_0 \neq 0$ pertenece al recinto de analiticidad de $\varphi(\zeta)$, entonces $\varphi(\zeta) \equiv 0$. La manera más fácil de comprobar esto es observar que de $\Lambda_n(\varphi) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ se deduce que $\int\limits_0^{\zeta_0} \varphi(z)\, z^n\, dz = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. De aquí, integrando a lo largo del rayo rectilíneo que une 0 con ζ_0 y considerando las partes real e imaginaria de $\varphi(\rho e^{i\theta})$ como funciones de ρ: $u(\rho)$ y $v(\rho)$, hallamos:

$$\int\limits_0^{r_0} u(\rho)\, \rho^n\, d\rho = \int\limits_0^{r_0} v(\rho)\, \rho^n\, d\rho = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

De aquí que $u(\rho) = v(\rho) = 0$, es decir, $\varphi(\zeta) = 0$ a lo largo del segmento rectilíneo y, por lo tanto, $\varphi(\zeta) \equiv 0$. Por esto, obtenemos el teorema:

Teorema V$_1$. *Si* $F(z, \zeta)$ $(|z| < R, |\zeta| < P)$ *es una función analítica que es completa respecto de* z, *entonces el sistema*

$$\left\{ \int\limits_0^{\zeta_0} (n)\, F(z, \zeta)\, d\zeta = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^{\zeta_0} F(z, \zeta)(\zeta_0 - \zeta)^{n-1}\, d\zeta \right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

es completo en el círculo $|z| < R$ *para cualquier* $|\zeta_0| < R$.

En particular, tomando $F(z, \zeta) = f(\zeta z)$ y $\zeta_0 = 1$, resulta el teorema:

T e o r e m a V$_2$. *Si* $f(z)=\sum_0^\infty c_n z^n$ *es una función analítica para* $|z|<R'$, $R'>R$, *cuyos coeficientes de Taylor son distintos de cero, entonces el sistema*

$$\left\{z^{-n}\int_0^z f(z)\,d\zeta=\frac{z^{-n}}{(n-1)!}\int_0^z f(\zeta)(z-\zeta)^{n-1}\,d\zeta\right\}\qquad (n=1,\ 2\ldots)$$

es completo en E_R.

6. El teorema 1 de por sí no resuelve todavía el problema de la complitud ni tampoco el de la unicidad. Su importancia consiste en que permite pasar inmediatamente del teorema de la complitud a los teoremas de unicidad y viceversa. En lo que respecta al propio teorema de complitud, aquí resultan ser útiles los teoremas que señalan los criterios cuyo cumplimiento hace que, los sistemas que en cierto sentido son próximos a los completos, resulten completos. Sin detenerse en problemas generales, utilizaremos el siguiente resultado especial de Boas[20]):

Si las funciones $\{h_n(z)\}$ ($h_n(0)=0$) pertenecen a la clase H_2[21]) en el círculo $|z|<R$ y poseen una mayorante (en el sentido de Poincaré) de la misma clase $h(z)$ ($h(0)=0$) que satisface además a la condición $|h(z)|\leqslant 1$, $|z|<R$, entonces el sistema de funciones $\{z^n[1+h_n(z)]\}$ es completo en E_R.

Siguiendo a Boas[22]), examinemos dos ejemplos de aplicación de este teorema:

(a) Sea $h_n(z)=e^{z\zeta_n}-1$, donde $|\zeta_n|\leqslant 1$. Entonces $h_n(z)\leqslant \leqslant h(z)=e^z-1$, y como $h(\ln 2)=1$, resulta que el sistema $\{z^n e^{z\zeta_n}\}$ es completo en el círculo $|z|<\ln 2$ (compárese con Ibraguímov[17])).

(b) Sea

$$h_n(z)=\frac{e^{z\zeta_n'}-e^{z\zeta_n''}}{z(\zeta_n'-\zeta_n'')}-1\ (\zeta_n'\neq\zeta_n'',\ |\zeta_n'|\leqslant 1,\ |\zeta_n''|\leqslant 1);$$

---

[20]) R. P. B o a s, General expansion theorems, Proc. Nat. Acad. Sci U. S. A., 26 (1940), 139—149. Véase también [6]) (el primero de los dos artículos) y [5]).

[21]) Según la definición, una función $f(z)$, analítica para $|z|<R$, pertenece a la clase H_2, si, y sólo si,

$$\sup_{0<r<R}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right]<\infty$$

[22]) El artículo citado en la llamada [20]) (ejemplo (a)) y, además, R. P. B o a s, Univalent derivatives of entire functions, Duke Math. J., 6, (1940), 719—721 (ejemplo (b)).

entonces

$$h_n(z) = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{z^{j-1}[(\zeta_n')^j - (\zeta_n'')^j]}{j!} \ll \sum_{j=2}^{\infty} \frac{z^{j-1}}{(j-1)!} = e^z - 1$$

y, por consiguiente, el sistema $\left\{z^{n-1} \frac{e^{z\zeta_n'} - e^{z\zeta_n''}}{\zeta_n' - \zeta_n''}\right\}$ es completo en el círculo $|z| < \ln 2$.

7. Del ap. 6 mediante el teorema I se deducen los teoremas respectivos de unicidad.

A saber, tomando $F(z, \zeta) = e^{z\zeta}$, $|z| < R$, $|\zeta| < \infty$, observamos que $z^n e^{z\zeta_n} = \underset{\zeta}{\Lambda_n}(e^{z\zeta})$, donde $\underset{\zeta}{\Lambda_n}(\varphi) = \varphi^{(n)}(\zeta_n)$, y como según el ap. 6 el sistema $\{z^n e^{z\zeta_n}\}$ es completo en el círculo $|z| < R = \ln 2$, resulta que el sistema de funcionales $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$ posee la propiedad de unicidad respecto del conjunto Ω formado aquí por todas las funciones enteras de clase inferior a $[1, \ln 2]$ (véase el ap. 2 de la sección II). En resumen, si para una función entera $\varphi(\zeta)$ de clase inferior a $[1, \ln 2]$ se tiene $\varphi^{(n)}(\zeta_n) = 0$, donde $|\zeta_n| \leqslant 1$, entonces $\varphi(\zeta) \equiv 0$ (compárese con el ap. 4 de la sección III).

Exactamente igual, observando que $z^{n-1} \frac{e^{z\zeta_n'} - e^{z\zeta_n''}}{\zeta_n' - \zeta_n''} = \underset{\zeta}{\widetilde{\Lambda}_n}(e^{z\zeta})$, donde

$$\underset{\zeta}{\widetilde{\Lambda}_n}(\varphi) = \frac{\varphi^{(n-1)}(\zeta_n') - \varphi^{(n-1)}(\zeta_n'')}{\zeta_n' - \zeta_n''} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y $\varphi^{(-1)}(\zeta) = \int_0^{\zeta} \varphi(\zeta)\, d\zeta$, sacamos la conclusión de que el sistema de funcionales $\{\underset{\zeta}{\Lambda_n}\}$ también posee la propiedad de unicidad respecto al conjunto de las funciones enteras de clase inferior a $[1, \ln 2]$. Esta proposición puede enunciarse también del modo siguiente[23]).

Toda función trascendente entera de clase inferior a $[1, \ln 2]$ posee una subsucesión de derivadas que son univalentes en el círculo unidad.

En efecto, suponiendo lo contrario tendríamos que sacar la conclusión de que comenzando desde cierto n en adelante, $n \geqslant N - 1$, se cumplen relaciones de la forma $\underset{\zeta}{\widetilde{\Lambda}_n} = 0$ (para una elección adecuada de los pares de puntos ζ_n', ζ_n'', $|\zeta_n'| \leqslant 1$, $|\zeta_n''| \leqslant 1$). Pero $\varphi^{(N)}(\zeta)$ es una función entera de clase inferior a $[1, \ln 2]$, si $\varphi(\zeta)$ es una función entera de clase inferior a $[1, \ln 2]$. De aquí que

---

[23]) El segundo de los artículos mencionados en la llamada [22]).

$\varphi^{(N)}(\zeta) = 0$ y $\varphi(\zeta)$ es un polinomio, en contra de la hipótesis. Obsérvese que en el último teorema la constante ln 2 no puede ser sustituida por una constante que supere a $\frac{\pi}{2}$, pues las derivadas de la función sen $\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right)z$, $\varepsilon > 0$ perteneciente a la clase $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$, no son univalentes en el círculo unidad.

8. Del teorema de unicidad del precendente apartado, mediante el teorema I, se pueden obtener teoremas de complitud más generales que los teoremas del ap. 6. (uno de tales teoremas más generales se expone en el ap. 4 de la sección III). Los teoremas generalizados de complitud, mediante el mismo teorema I, proporcionarán a su vez una generalización de los teoremas de unicidad del ap. 7. No obstante, preferimos hacer los razonamientos expuestos de una forma más general. Sean $h_n(z) = \sum_1^{\infty} h_j^{(n)} z^j$ funciones enteras de clase inferior a $|1, \infty|$, que tiene la mayorante $h(z) = \sum_1^{\infty} h_j z^j$ (no obligatoriamente entera), y supongamos que $|h(z)| < 1$ para $|z| < R$. Entonces, según el teorema del ap. 6, sección III, el sistema $\{z^n + z^n h_n(z) = z^n + \sum_1^{\infty} h_j^{(n)} z^{n+j}\}$ es completo en el círculo $|z| < R$. Examinemos las expresiones $\underset{\zeta}{\Lambda^{(n)}}(\varphi) = \varphi^{(n)}(0) + \sum_1^{\infty} h_j^{(n)} \varphi^{(n+j)}(0)$. Esribiendo $\underset{\zeta}{\Lambda^{(n)}}(\varphi)$ en la forma $\underset{\zeta}{\Lambda^{(n)}}(\varphi) = \sum_1^{\infty} \frac{\eta_j^{(n)} \varphi^{(j)}(0)}{j!}$ y observando que para $j > n$ $\sqrt[j]{|\eta_j^{(n)}|} = \sqrt[j]{|h_{j-1}^{(n)}| \cdot j!} < c_n$ debido a que $\sqrt[j]{|h_j^{(n)}|} < c_n'$ (lo cual a su vez significa que $h_n(z)$ pertenece a una clase inferior a $|1, \infty|$), sacamos la conclusión de que $\underset{\zeta}{\Lambda^{(n)}}(\varphi)$ son funcionales lineales en el espacio de las funciones enteras. Pero $z^n + \sum_1^{\infty} h_j^{(n)} z^{n+1} = \underset{\zeta}{\Lambda^{(n)}}(e^{z\zeta})$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, y como este sistema de funciones es completo en el círculo $|z| < R$, sacamos la conclusión de que el sistema de funcionales

$$\left\{\underset{\zeta}{\Lambda^{(n)}}(\varphi) = \varphi^{(n)}(0) + \sum_1^{\infty} h_j^{(n)} \varphi^{(n+1)}(0)\right\}$$

posee la propiedad de unicidad respecto del conjunto de todas las funciones enteras de clase inferior a $|1, R|$. Supongamos ahora que

$f(z)$ es una función entera arbitraria de clase no superior a $[1, \sigma]$, cuyos coeficientes de Taylor son todos distintos de cero. Entonces, haciendo $F(z, \zeta) = f(z\zeta)$, $|z| < \frac{R}{\sigma}$, $|\zeta| < \infty$, podemos afirmar que todas las funciones que pertenecen al conjunto correspondiente Ω, son enteras de clase inferior a $[1, R]$. Por consiguiente, las funcionales $\underset{\zeta}{\Lambda^{(n)}}(\varphi)$ poseen la propiedad de unicidad respecto de Ω, de donde se deduce que el sistema de funciones

$$\{\underset{\zeta}{\Lambda^{(n)}}[f(z\zeta)] = z^n f^{(n)}(0) + \sum_{j=1}^{\infty} h_j^{(n)} f^{(n+j)}(0)\, z^{n+j}\}$$

es completo en el círculo $|z| < \frac{R}{\sigma}$. Es obvio que, incluso en el caso particular en que $\sigma = 1$, este sistema es más general que el sistema

$$z^n + \sum_{j=1}^{\infty} h_j^{(n)} z^{n+j},$$

y en general no tiene que considerarse como «próximo» a $\{z^n\}$. Pero el sistema de funciones $\{\underset{\zeta}{\Lambda^{(n)}}[f(z\zeta)]\}$ se engendra por la función $e^{z\zeta}$ mediante las funcionales

$$\{\underset{\zeta}{\tilde{\Lambda}^{(n)}}(\varphi) = f^{(n)}(0)\,\varphi^{(n)}(0) + \sum_{j=1}^{\infty} h_j^{(n)} f^{(n+j)}(0)\,\varphi^{n+j}(0)\}.$$

De la complitud que hemos establecido del sistema de funciones para $|z| < \frac{R}{\sigma}$ se deduce que el sistema de funcionales $\{\underset{\zeta}{\tilde{\Lambda}^{(n)}}(\varphi)\}$ posee la propiedad de unicidad respecto a todas las funciones enteras de clase inferior a $[1, \sigma]$. De nuevo, esto es un teorema de unicidad más fuerte que el establecido anteriormente para las funcionales $\{\underset{\zeta}{\Lambda^{(n)}}(\varphi)\}$. Obsérvese que la aplicación ulterior de los mismos razonamientos no da nada nuevo. En efecto, suponiendo para precisar que $f(z)$ es una función de clase $[1, 1]$ $(\sigma = 1)$, habíamos pasado de los coeficientes de la forma $f^{(n)}(0)$ en las expresiones de los sistemas de funciones y funcionales obtenidos a los coeficientes de la forma $[f^{(n)}(0)]^2$, $[f^{(n)}(0)]^3$, . . . Pero estos últimos, a su vez, pueden considerarse como los valores de las derivadas en el origen de coordenadas de ciertas funciones de la misma clase $[1, 1]$.

IV

1. Sea $\{f_n(z)\}$ un sistema de funciones pertenecientes a E_R:

$$\{f_n(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_n^{(j)} z^j\} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

Si $\{f_n(z)\}$ es un sistema completo, se cumplen las relaciones

$$z^j = \lim_{n\to\infty} [\alpha_{n,0}^{(j)} f_0(z) + \ldots + \alpha_{n,n}^{(j)} f_n(z)] \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{2}$$

Además, según el ap. 5 de la sección I (véase la llamada [5]) se puede suponer que la sucesión $\{\alpha_{n,k}^{(j)}\}$ es convergente:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{n,k}^{(j)} = \alpha_k^{(j)} \qquad (k,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{3}$$

Poniendo (1) en la relación (2), resulta:

$$\lim_{n\to\infty} [\alpha_{n,0}^{(j)} a_0^{(k)} + \ldots + \alpha_{n,n}^{(j)} a_n^{(k)}] = \delta_{jk} \qquad (j,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{4}$$

donde $\delta_{jk} = 0$ para $j \neq k$ y $\delta_{jj} = 1$. En particular, si en lugar de las relaciones (2) se cumplen los desarrollos en serie

$$z^j = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(j)} f_n(z) \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{2'}$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(j)} a_n^{(k)} = \delta_{jk} \qquad (j,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{4'}$$

2. Teorema VI$_1$. *Para que un sistema de funciones* (1), *que es completo en el espacio* E_R, *sea un sistema de i.l.r., es necesario y suficiente que al menos un sistema de números* $\{\alpha_k^{(j)}\}$, *determinados por las relaciones* (2) *y* (3), *satisfaga a las condiciones*:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|\alpha_k^{(j)}|} = \rho_k < R \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_n^{(j)} \alpha_m^{(j)} = \delta_{nm} \qquad (n,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{6}$$

Demostración. Supongamos que el sistema $\{f_n(z)\}$ es de i.l.r. Entonces existe un sistema de funcionales lineales $\{L_n\}$ que es biortogonal con $\{f_n(z)\}$. Por esto

$$\alpha_k^{(j)} = \lim_{n\to\infty} \alpha_{n,k}^{(j)} = \lim_{n\to\infty} L_k [\alpha_{n,0}^{(j)} u_0(z) + \ldots + \alpha_{n,n}^{(j)} u_n(z)] = L_k(z^j)$$

y, por consiguiente, en virtud del ap. 2 de la sección I, $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|\alpha_k^{(j)}|} < R\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Así, pues, la condición (5) es

consecuencia de la i.l.r del sistema. Pero ahora, en caso de i.l.r.

$$L_k [f_m(z)] = \lim_{n\to\infty} L_k \{ \sum_{j=0}^{n} a_m^{(j)} \} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_m^{(j)} L_k(z^j) = \delta_{km},$$

y como $L_k(z^j) = \alpha_k^{(j)}$, de aquí se deducen las relaciones (6).

Demostremos ahora que las condiciones (5) y (6) son suficientes para la i.l.r. del sistema (1). Sea $f(z) = \sum_0^{\infty} a_j z^j$ un elemento arbitrario de E_R $(\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|a_j|} \leqslant R)$. Definamos las funcionales $\{L_n\}$ haciendo

$$L_n(f) = \sum_0^{\infty} a_j \alpha_n^{(j)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Debido a las condiciones (5), $L_n(f)$ son funcionales lineales en E_R (ap. 2.1).

No queda más que observar que, en virtud de las condiciones (6),

$$L_k [f_n(z)] = \sum_0^{\infty} a_n^{(j)} \alpha_k^{(j)} = \delta_{nk}.$$

De aquí, según el ap. 6 de la sección I, se deduce que $\{f_n(z)\}$ es un sistema de i.l.r.

3. Para que el estudio sea completo tenemos que convencernos también de que las condiciones (5) y (6), tomadas por separado, no son suficientes para que el sistema $\{f_n(z)\}$ sea de i.l.r. Obsérvese primero que siempre se cumple la condición (6), si $f_n(z)$ es un polinomio de grado n (¡exactamente!); además, los coeficientes $\alpha_k^{(j)}$ se determinan mediante la resolución sucesiva de las ecuaciones (1) respecto de z^j. En efecto, si

$$f_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_n^{(j)} z^j \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ a_n^{(n)} \neq 0)$$

y

$$z^j = \sum_{k=0}^{j} \alpha_k^{(j)} f_k(z),$$

se tiene la identidad

$$f_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} a_n^{(j)} \alpha_k^{(j)} f_k(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z) \sum_{j=k}^{j=n} a_n^{(j)} \alpha_k^{(j)},$$

de donde, en virtud de la independencia lineal de $\{f_n(z)\}$, la cual es consecuencia de la hipótesis hecha, resulta:

$$\sum_{j=k}^{j=n} a_n^{(j)} \alpha_k^{(j)} = \sum_0^{\infty} a_n^{(j)} \alpha_k^{(j)} = \delta_{nk},$$

es decir, obtenemos las condiciones (6), a pesar de que pueden no cumplirse las condiciones (5). Señalemos, en particular, el teorema que de aquí se desprende:

Teorema VI$_2$. *Para que un sistema de polinomios* $f_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_n^{(j)} z^j$ $(n = 0, 1, 2, \ldots;\ a_n^{(n)} \neq 0)$ *sea un sistema de i.l.r. en* E_R, *es necesario y suficiente que los coeficientes* $\{\alpha_n^{(j)}\}$ *determinados por las relaciones* $z^j = \sum_{k=0}^{j} \alpha_k^{(j)} f_k(z)$, *satisfagan a las condiciones:*

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|\alpha_k^{(j)}|} = \rho_k < R \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

4. Demostremos ahora que las condiciones (5) solas no son suficientes para la i.l.r. de las funciones $\{f_n(z)\}$, si éstas no son polinomios cuyos grados coinciden exactamente con el índice n. Esta afirmación conserva su valor también cuando se suponga que $\{f_n(z)\}$ es un sistema de funciones linealmente independiente que no admite desarrollos no triviales del cero. Resulta un ejemplo correspondiente (para el espacio E_1) haciendo

$$f_n(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Este sistema es completo, pues haciendo $\zeta = \frac{1+z}{1-z}$ se obtiene el sistema $\{\zeta^n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, el cual es completo en el recinto transformado $\operatorname{Re}\zeta > 0$. La independencia lineal del sistema $\{f_n(z)\}$ y la carencia de desarrollos no triviales del cero son evidentes. Sin embargo, considerando las funciones racionales de la forma $\frac{\zeta^p}{(1+\zeta)^q}$ y aproximándolas de un modo correspondiente mediante polinomios de ζ en el interior del recinto $\operatorname{Re}\zeta > -1$, nos convencemos de que existe una sucesión de polinomios que converge hacia cero en el interior del recinto $\operatorname{Re}\zeta > 0$, y cuyos coeficientes de una potencia fijada de ζ, precisamente de la potencia menor p-ésima, son iguales a 1. De aquí, volviendo a z mediante $\zeta = \frac{1+z}{1-z}$, sacamos la conclusión que cada función $f_n(z)$ pertenece a la cápsula lineal cerrada de todas las funciones que la siguen.

Se puede demostrar fácilmente que en tal caso se pueden satisfacer las relaciones (2) y (3) por unos números completamente arbitrarios $\alpha_n^{(j)}$, en particular, por tales números que cumplan las condiciones (5). Por lo tanto, existe un sistema de funciones linealmente independientes $\{f_n(z)\}$, que no admite desarrollos no triviales del cero, que satisface a las condiciones (5) y que, sin embargo, no es un sistema de i.l.r.

Obsérvese que de la propiedad del sistema de funciones $\left\{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n\right\}$, señalado aquí, se deduce[5]) la existencia de una serie universal de la forma $\sum_0^\infty A_n\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$ para las funciones que son analíticas en el círculo unidad, a lo que es lo mismo, la existencia de una serie de potencias universal de la forma $\sum_0^\infty A_n\zeta^n$ para las funciones que son analíticas en el semiplano $\operatorname{Re}\zeta > 0$.

5. Sea $\{f_n(z)\}$ un sistema de funciones analíticas que es completo en el espacio E_R de las funciones analíticas en el recinto $|z| < R$. Supongamos que es un sistema de i.l.r. Entonces existe un sistema biortogonal con él de funcionales lineales $\{L_n\}$. Si este último posee la propiedad de unicidad respecto de todo el espacio E_R, entonces $\{f_n(z)\}$ representa una base en el sentido amplio para E_R. Finalmente, si la serie $\sum_0^\infty L_n(f)\cdot f_n(z)$ es convergente para cualquier función $f(z) \in E_R$, entonces $\{f_n(z)\}$ es una base de E_R (en el sentido estricto) (véase el ap. 10 de la sección 1).

Ejemplos. Interpolación (esquema lineal). Sea $c_1, c_2, \ldots$ una sucesión de puntos del plano complejo. Consideremos la sucesión de polinomios $P_0 = 1$, $P_n(z) = (z - c_1)\ldots(z - c_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$; éstos son los polinomios de interpolación con los puntos de interpolación $\{c_n\}$. Es obvio que el sistema $\{P_n(z)\}$ es completo en cualquier círculo $|z| < R$. Sin embargo, para la i.l.r. del sistema $\{P_n(z)\}$ es necesario imponer a $\{c_n\}$ unas condiciones complementarias. Precisando, para que $\{P_n(z)\}$ sea un sistema de i.l.r. en el círculo $|z| < R$, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones

$$|c_n| < R \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Para la demostración, consideremos las identidades

$$z^n = \sum_0^n P_j(z)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho_j>\max(|c_1|,\ldots,|c_{j+1}|)}\frac{\zeta^n\,d\zeta}{P_{j+1}(\zeta)}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

De éstas deducimos que la condición necesaria y suficiente para la i.l.r. de los polinomios $\{P_j(z)\}$ consiste en lo siguiente (véase el teorema VI_2 de la presente sección):

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho_j}\frac{\zeta^n\,d\zeta}{P_{j+1}(\zeta)}\right|} < R \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Pero esta condición se satisface cuando, y sólo cuando, $|c_n| < R$ ($n = 1, 2, \ldots$). En efecto, sea $|c_n| < R$ ($n = 1, 2, \ldots$); entonces para j fijado, haciendo la notación $\max(|c_1|, \ldots, |c_{j+1}|) = r < R$, se tiene:

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho>r} \frac{\zeta^n \, d\zeta}{P_{j+1}(\zeta)}\right| = \left|\sum_{n\neq 0} \frac{A}{a^\alpha}\binom{n}{\alpha} a^n\right| < K_n^{j+1} r^n,$$

de donde

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \frac{\zeta^n \, d\zeta}{P_{j+1}(\zeta)}\right|} \leqslant r < R \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

es decir, $\{P_n(z)\}$ es un sistema de i.l.r. en el círculo $|z| < R$.

Supongamos ahora que no se cumple la condición $|c_n| < R$ para todos los n, y sea c_{j+1} el número de menor índice que satisface a la desigualdad $|c_{j+1}| \geqslant R$. Entonces

$$\frac{1}{P_{j+1}(\zeta)} = \frac{A_0}{\zeta - c_{j+1}} + \sum_{a\neq c_{j+1}} \frac{A}{(\zeta - a)^{\alpha+1}} \qquad (A_0 \neq 0),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho>|c_{j+1}|} \frac{\zeta^n \, d\zeta}{P_{j+1}(\zeta)} \Bigg| = \left|A_0 c_{j+1}^n + \sum_{\substack{a\neq 0 \\ a\neq c_{j+1}}} \frac{A}{a^\alpha}\binom{n}{\alpha} a^n\right| =$$

$$= |A_0| \cdot |c_{j+1}|^n \left|1 + \sum_{\substack{a\neq 0 \\ a\neq c_{j+1}}} \frac{A}{A_0 a^\alpha}\binom{n}{\alpha}\left(\frac{a}{c_{j+1}}\right)^n\right|,$$

de donde

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=\rho} \frac{\zeta^n \, d\zeta}{P_{j+1}(\zeta)}\right|} = |c_{j+1}| \geqslant R,$$

y el sistema $\{P_n(z)\}$ no puede ser de i.l.r. en el círculo $|z| < R$.

Suponiendo cumplidas las condiciones $|c_n| < R$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), podemos escribir las funcionales lineales $\{L_n\}$ que son biortogonales con los polinomios $\{P_n(z)\}$ en la forma

$$L_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{R<|\zeta|=\rho>\max[|c_1|, \ldots, c_{n+1}|]} \frac{f(\zeta) \, d\zeta}{P_{n+1}(\zeta)}.$$

Por lo general, $\{L_n\}$ no poseen la propiedad de unicidad respecto de todo el espacio E_R, es decir, que el sistema completo y de i.l.r. de los polinomios $\{P_n(z)\}$ no forma una base de E_R (en el sentido amplio).

Demostremos que para que el sistema $\{P_n(z)\}$ forme una base de E_R (en el sentido amplio), es necesario y suficiente que, cumplién-

dose las condiciones anteriores, al menos un punto de acumulación de $\{c_n\}$ pertenezca al círculo $|z| < R$. En efecto, sea

$$L_n(f) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Como $L_0(f) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - c_1} = f(c_1)$, de $L_0(f) = 0$ se deduce que $\frac{f(z)}{P_1(z)}$ es una función analítica en el círculo $|z| < R$. Supongamos que ya se ha demostrado que $\frac{f(z)}{P_n(z)} = \varphi_n(z)$ es una función analítica en el círculo $|z| < R$; entonces de

$$L_n(f) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{P_{n+1}(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{P_n(\zeta)(\zeta - c_{n+1})} = 0$$

se deduce que $\varphi_n(c_{n+1}) = 0$, es decir, que $\frac{f(z)}{P_n(z)}$ es una función analítica en el círculo $|z| < R$. En otras palabras, las ecuaciones $L_n(f) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ significan que $c_1, c_2, \ldots$ son ceros de la función $f(z)$ (cada uno de ellos de orden igual a su orden de multiplicidad en la sucesión $\{c_n\}$). Por esta razón, $f(z) \equiv 0$ si la sucesión $\{c_n\}$ posee al menos un punto de acumulación en el interior del círculo $|z| < R$; si tal punto de acumulación no existe, entonces siempre se puede construir una función analítica $f(z) \not\equiv 0$ que satisfaga a las condiciones $L_n(f) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Así, pues, el sistema $\{P_n(z)\}$ representa una base en el sentido amplio de la palabra cuando, y sólo cuando, todos los puntos $\{c_n\}$ pertenecen al círculo $|z| < R$, y al menos un punto de acumulación de la sucesión también pertenece a este círculo. Sin embargo, cumpliéndose todas estas condiciones el sistema $\{P_n(z)\}$ puede no ser una base, es decir, las series $\sum_0^\infty L_n(f)\cdot P_n(z)$ pueden no ser convergentes. Por ejemplo, si $c_n = \alpha$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $0 < \alpha < R$, entonces $L_n(f) = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$ y para $f(z) = \frac{1}{R - z}$ obtenemos la serie

$$\sum_0^\infty \frac{(z-\alpha)^n}{(R-\alpha)^{n+1}},$$

la cual no sólo no es convergente fuera del círculo $|z - \alpha| < |R - \alpha|$, sino que tampoco posee fuera de este círculo ninguna subsucesión de sumas parciales que sea convergente. Siendo $c_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, resulta una base cuando $P_n(z) = z^n$ y la serie de interpolación

$$\sum_0^\infty \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{P_{n+1}(\zeta)} P_n(z)$$

se convierte en la serie de Taylor.

Supongamos que los puntos de interpolación $\{c_n\}$ satisfacen a la condición $|c_n| \leqslant r < R$, es decir, que todos los puntos junto con los puntos de acumulación de esta sucesión están situados en el interior del círculo $|z| < R$. Según lo anterior, $\{P_n(z)\}$ representa entonces una base en el sentido amplio para E_R. Para obtener las condiciones según las cuales $\{P_n(z)\}$ es una base de E_R, no queda más que exigir la convergencia de la serie de interpolación $\sum_0^\infty L_n(f) \cdot P_n(z)$ para cualquier función $f(z) \in E_R$. De los teoremas generales de la teoría de interpolación se deduce[24]) que esto ocurrirá cuando, y sólo cuando, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_n(z)} = z$ uniformemente en todo conjunto cerrado y acotado que sea exterior a la circunferencia $|z| = r$; además, como se trata de las condiciones suficientes, podemos limitarnos a exigir que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P_n(z)|} = |z| \quad \text{para} \quad |z| > r$$

(sin la condición de uniformidad). En particular, es suficiente suponer que $c_n \to 0$ para $n \to \infty$ o que los puntos $\{c_n\}$ estén uniformemente distribuidos en la circunferencia $|z| = |r| < R$ o sea, estén situados de tal modo que la cantidad de puntos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ que caen en un arco arbitrario $0 \leqslant \alpha \leqslant 0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi$ de esta circunferencia sea asintóticamente igual a $\frac{\beta-\alpha}{2\pi} n$[24]). Consideramos que es probable que el sistema $\{P_n(z)\}$ no puedo ser una base en E_R si no se cumple la condición $|c_n| \leqslant r < R$ (a pesar de que se cumpla la condición $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_n(z)} = z$).

Supongamos, en particular, que $R = 1$, $c_n = 0$ para $n \neq k^2$ y $c_{k^2} = \rho_k = \frac{k+1}{k+2}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Entonces $P_n(z) = z^{n-[\sqrt{n}]} \prod_{k=0}^{[\sqrt{n}]} (z - \rho_k)$ $(n > 0)$ y, por consiguiente,

$$\sqrt[n]{|P_n(z)|} = |z|^{1-\frac{[\sqrt{n}]}{n}} \left\{ \left(\prod_{k=0}^{[\sqrt{n}]} |z-\rho_k| \right)^{\frac{1}{[\sqrt{n}]}} \right\}^{\frac{[\sqrt{n}]}{n}} \to |z|$$

para $n \to \infty$ y $z \neq 0, 1, \rho_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, siendo uniforme la convergencia en cada conjunto acotado y cerrado que no contenga a los puntos indicados. Examinemos el desarrollo de $\frac{1}{P_{n+1}(z)}$ en

---

[24]) Walsh, Interpolation and approximation, §§7,2; 7,3.

fracciones simples:

$$\frac{1}{P_{n+1}(z)}=\frac{p_{n-[\sqrt{n+1}]}(z)}{z^{n+1-[\sqrt{n+1}]}}+\sum_{k=0}^{[\sqrt{n+1}]}\frac{B_k}{\rho_k^{n+1-[\sqrt{n+1}]}(z-\rho_k)},$$

donde $B_k=\prod_{\substack{j=0\\(j\neq k)}}^{[\sqrt{n+1}]}(\rho_k-\rho_j)^{-1}$, y, por lo tanto, $|B_k|<C_1 n^{\sqrt{n}}$.

Haciendo $|z|=\frac{1}{4}$, tendremos:

$$M_0=\max_{|z|=\frac{1}{4}}|p_{n-[\sqrt{n+1}]}(z)\leqslant\frac{1}{\prod_{j=0}^{[\sqrt{n+1}]}\left(\rho_j-\frac{1}{4}\right)}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\sqrt{n+1}}\frac{B_k\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1-[\sqrt{n+1}]}}{\rho_k^{n+1-[\sqrt{n+1}]}\cdot\left(\rho_k-\frac{1}{4}\right)}<4^{[\sqrt{n+1}]+1}+C_2 n^{\sqrt{n}}<C_3 n^{\sqrt{n}}.$$

Por esto, para los coeficientes $a_j^{(n-\sqrt{n+1})}$ del polinomio $p_{n-[\sqrt{n+1}]}(z)$ obtenemos la cota:

$$|a_j^{(n-[\sqrt{n+1}])}|\leqslant\frac{M_0}{\left(\frac{1}{4}\right)^j}<C_4\cdot 4^{n-\sqrt{n}}.$$

Por consiguiente,

$$|L_n(f)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\rho<|z|=r<1}\frac{f(z)\,dz}{P_{n+1}(z)}\right|=$$

$$=\left|\sum_{j=0}^{n-[\sqrt{n+1}]}a_j^{(n-[\sqrt{n+1}])}\frac{f^{(n[\sqrt{n+1}]-j)}(0)}{(n-[\sqrt{n+1}]-j)!}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{[\sqrt{n+1}]}\frac{B_k f(\rho_k)}{\rho_k^{n+1-[\sqrt{n+1}]}}\right|>\left|\sum_{k=0}^{[\sqrt{n+1}]}\frac{B_k f(\rho_k)}{\rho_k^{n+1-[\sqrt{n+1}]}}\right|-$$

$$-C_4\cdot 4^{n-\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{n-[\sqrt{n-1}]}\left|\frac{f^{(n-[\sqrt{n+1}]-j)}(0)}{(n-[\sqrt{n+1}]-j)!}\right|>$$

$$>\left|\sum_{k=0}^{[\sqrt{n+1}]}\frac{B_k f(\rho_k)}{\rho_k^{n+1-[\sqrt{n+1}]}}\right|-C_4\cdot 4^{n-\sqrt{n}}\cdot|(n+1)-$$

$$-[\sqrt{n+1}]\} \cdot \frac{M_f}{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-[\sqrt{n+1}]}} >$$

$$> \left| \sum_{k=0}^{[\sqrt{n+1}]} \frac{B_k f(\rho_k)}{\rho_k^{n+1-[\sqrt{n+1}]}} \right| - C_5 M_f \cdot 16^{n+1-\sqrt{n+1}},$$

donde $M_f = \max\limits_{|z|=\frac{1}{4}} |f(z)|$. Determinemos ahora sucesivamente los números $\gamma_0 = 1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ de tal modo que sea

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{B_k \gamma_k}{\rho_k^{m^2-m}} = m^{m^2} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Se puede construir una función $f(z)$, uniforme y analítica en el círculo unidad, que satisfaga a las condiciones $f(\rho_k) = \gamma_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). (Es suficiente construir primero una función $\varphi(z)$ con polos simples en los puntos ρ_k, y después una función $\psi(z)$ que sea meromorfa en el círculo unidad y tenga las partes principales $\frac{\gamma_k}{\varphi'(\rho_k)(z-\rho_k)}$, haciendo finalmente

$$f(z) = \varphi(z) \cdot \psi(z).)$$

Entonces

$$|L_{m^2-1}(f)| > m^{m^2} - C_5 M_f 16^{m^2-m},$$

de donde, definitivamente,

$$\sqrt[m^2-1]{|L_{m^2-1}(f)|} \to \infty \quad \text{si} \quad m \to \infty.$$

Pero esto significa que la serie $\sum\limits_0^\infty L_n(f) \cdot P_n(z)$ no puede ser convergente en los puntos distintos de 0, ρ_k y, posiblemente, 1. En resumen, $\{P_n(z)\}$, siendo una base en el sentido amplio, no es una base. a pesar de que aquí se cumple la condición $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P_n(z)|} = |z|$ (e incluso $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_n(z)} = z$) uniformemente en cada conjunto acotado y cerrado que no contenga a los puntos 0, ρ_k, 1.

6. Supongamos ahora que $\{f_n(z)\}$ es una base de E_R ($R < \infty$) y que $\{\omega_n(\zeta)\}$ son las funciones asociadas con $\{f_n(z)\}$. Entonces para $|\zeta| \geqslant R$ la función $\frac{1}{\zeta - z} \in E_R$ tiene que admitir un desarrollo

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_0^\infty L_n\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) f_n(z) = \sum_0^\infty \omega_n(\zeta) f_n(z),$$

uniformemente convergente respecto de z (para ζ fijado) en cada círculo $|z| \leqslant r < R$. Sin embargo, se puede deducir algo más, a saber, que la serie $\sum_0^\infty \omega_n(\zeta) f_n(z)$ converge hacia $\frac{1}{\zeta - z}$ uniformemente respecto de ζ y respecto de z para $|\zeta| \geqslant R$ y $|z| \leqslant r < R$, donde r es un número positivo cualquiera menor que R. En otras palabras, se verifica el siguiente teorema:

T e o r e m a VII. *Para que un sistema de funciones* $\{f_n(z)\}$ *del espacio* E_R *sea una base de* E_R, *es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones:*

(a) *el sistema* $\{f_n(z)\}$ *es una base en el sentido amplio de la palabra;*

(b) *se verifica el desarrollo*

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_0^\infty \omega_n(\zeta) \cdot f_n(z)^{25)},$$

donde $\{\omega_n(\zeta)\}$ *son las funciones asociadas con* $\{f_n(z)\}$, *y la serie es uniformemente convergente para* $|\zeta| \geqslant R$, $|z| \leqslant r$ *para cualquier* r, $0 < r < R$.

Este teorema es una consecuencia directa del siguiente lema, el cual es a su vez de un interés particular.

L e m a. *Si* $F(z, \zeta)$ *es una función de dos variables complejas* z *y* ζ, *que es analítica en el recinto* $|z| < R$, $|\zeta| < P$, *y* $\{f_n(z)\}$ *es una base de* E_R, *entonces se verifica el desarrollo*

$$F(z, \zeta) = \sum_0^\infty \varphi_n(\zeta) f_n(z),$$

donde $\varphi_n(\zeta)$ *son funciones analíticas en el recinto* $|\zeta| < P$, *que pertenecen a la clase* Ω *engendrada por* $F(z, \zeta)$; *el desarrollo es uniformemente convergente respecto del conjunto* z *y* ζ *en cada recinto cerrado de la forma* $|z| \leqslant r < R$, $|\zeta| \leqslant \rho < P$. *Si* $F(z, \zeta)$ *es una función analítica para* $|z| < R$, $|\zeta| \leqslant P$, *entonces se puede afirmar además que* $\varphi_n(\zeta)$ *son continuas (e incluso infinitamente diferenciables) para* $|\zeta| \leqslant P$, *siendo uniformemente convergente el desarrollo* $\sum_0^\infty \varphi_n(\zeta) f_n(z)$ *en cada recinto cerrado de la forma* $|z| \leqslant r < R$, $|\zeta| \leqslant P$.

D e m o s t r a c i ó n. Este lema resulta como una aplicación sencilla del teorema de Mazur y Orlicz[26]), el cual representa a su vez

---

[25]) Como $\{f_n(z)\}$ es una base en el sentido amplio de la palabra, de la convergencia de esta serie se deduce que su suma es $\frac{1}{\zeta - z}$.

[26]) S. M a z u r und W. O r l i c z, Über Folgen linearer Operationen, Studia Math., IV (1933).

la extensión al caso de espacios de tipo F del conocido teorema de Banach-Steinhaus[27]). Por ejemplo, demostremos la segunda mitad del lema (en el cual, con unas restricciones más rigurosas se deducen unas proposiciones más fuertes). Sean $\{L_n\}$ funcionales lineales biortogonales con $\{f_n(z)\}$. Como $\{f_n(z)\}$ es una base de E_R, la serie $\sum_0^\infty L_n(f)\cdot f_n(z)$ es convergente para cualquier función $f(z) \in E_R$ y, por consiguiente, en virtud del teorema mencionado[26]), la familia de operadores lineales $\{\sum_0^\infty L_j(f)\, f_j(z)\}$ es equicontinua en E_R. Sea ζ_0 un punto arbitrario del recinto cerrado $|\zeta| \leqslant P$. Entonces se puede señalar un entorno U_0 tal, que para $\zeta \in U_0$ se cumple la desigualdad

$$\left\|\sum_0^n \underset{z}{L_j}[F(z,\zeta)-F(z,\zeta_0)]\, f_j(z)\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para un $\zeta > 0$ dado y para cualquier natural n. Cubramos el conjunto $|\zeta| \leqslant P$ por un número finito de entornos del tipo indicado U_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ con los centros ζ_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$. Como existen unos números naturales n_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$, tales que

$$\left\|\sum_{n+1}^{n+p} \underset{z}{L_j}[F(z,\zeta)]\, f_j(z)\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para $n \geqslant n_k$ y para cualquier natural p, designando $N = \max(n_1, \ldots, n_s)$, tendremos en virtud de las desigualdades establecidas

$$\left\|\sum_{n+1}^{n+p} \underset{z}{L_j}[F(z,\zeta)]\, f_j(z)\right\| < \varepsilon \qquad (*)$$

para $n > N = N(\varepsilon)$ y $|\zeta| \leqslant P$. Supongamos que la norma de $f(z) \in E_R$ se define así:

$$\|f(z)\| = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n}\frac{m_n}{1+m_n}, \quad \text{donde} \quad m_n = \max_{|z|\leqslant r_n} |f(z)| \ \text{y} \ r_n \to R,$$

y sea r un número positivo cualquiera menor que R.

Si $r_{n_0} \geqslant r$, entonces para $\varepsilon < \frac{1}{2^{n_0+1}}$ se tiene $\max_{|z|<r} |f(z)| < \varepsilon\cdot 2^{n_0+1}$ si $\|f(z)\| < \varepsilon$. Así, pues, para $|z| \leqslant r < R$ y $\varepsilon < \frac{1}{2^{n_0+1}}$, donde

[27]) S. Banach, Théorie des opérationes linéaires, Warszawa, 1932. Véase también A. Zygmund, Trigonometric Series, 4.55.

$n_0 = n_0(r)$, tenemos de la relación(*)

$$\Big| \sum_{n+1}^{n+p} L_j_{z} [F(z, \zeta)] f_j(z) \Big| < \varepsilon \cdot 2^{n_0+1}$$

para $|\zeta| \leq P$ y $n > N = N(\varepsilon)$. Haciendo

$$L_{j}_{z} [F(z, \zeta)] = \varphi_j(\zeta)$$

resulta todo lo que afirma el lema. No queda más que observar que para obtener el teorema VII se debe sustituir aquí ζ por $\frac{1}{\zeta}$.

7. Las condiciones del teorema anterior no son suficientes. Tomemos, por ejemplo, el sistema de polinomios de interpolación $\{P_n(z)\}$, estudiado en el ap. 5 de la sección IV. Obsérvese ante todo que para cualquier sistema de i.l.r. de polinomios de interpolación $\{P_n(z)\}$, las funciones asociadas $\{\omega_n(\zeta)\}$ se expresan por las fórmulas

$$\omega_n(\zeta) = \frac{1}{P_{n+1}(\zeta)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

En efecto, aquí para $|\zeta| \geqslant R$

$$\omega_n(\zeta) = L_n\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r>\max(|c_1|, \ldots, |c_{n+1}|)} \frac{dz}{(\zeta - z) P_{n+1}(z)} = \frac{1}{P_{n+1}(z)}.$$

Por ello, la serie de la condición (b) tiene aquí la forma

$$\sum_0^{\infty} \frac{P_n(z)}{P_{n+1}(\zeta)}.$$

Pero en nuestro caso $R = 1$, $c_n = 0$ para $n \neq k^2$ y $c_{k^2} = \rho_k = \frac{k+1}{k+2}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. Por esta razón, para $|z| \leq r < 1$, $|\zeta| \geqslant 1$, se tiene:

$$\left|\frac{P_n(z)}{P_{n+1}(\zeta)}\right| = \frac{z^{|n-[\sqrt{n}]|} \prod\limits_{k=0}^{|\sqrt{n}|} |z - \rho_k|}{|\zeta|^{n+1-[\sqrt{n+1}]} \prod\limits_{h=0}^{[\sqrt{n+1}]} |\zeta - \rho_k|} \leqslant \frac{r^{n-[\sqrt{n}]} \cdot 2^{[\sqrt{n}]+1}}{\prod\limits_{k=0}^{[\sqrt{n+1}]} |(1 - \rho_k)} =$$

$$= r^{n-[\sqrt{n}]} \cdot 2^{[\sqrt{n}]+1} ([\sqrt{n+1}] + 2)!;$$

esta última cantidad es el término general de una serie convergente. Así, pues, en este ejemplo, la serie $\sum\limits_0^{\infty} \omega_n(\zeta) f_n(z)$ es uniformemente convergente para $|z| \leqslant r < 1$, $|\zeta| \geqslant 1$. Además, su suma es igual a $\frac{1}{\zeta - z}$, puesto que ella es precisamente el desarrollo de esta función

según los elementos $\{f_n(z) = P_n(z)\}$, los cuales forman una base en el sentido amplio de la palabra (véase el ap. 6 de la presente sección). Por lo tanto, verdaderamente se cumplen todas las condiciones del teorema anterior, a pesar de que $\{P_n(z)\}$ no es una base.

8. Supongamos ahora que $\{f_n(z)\}$ es un sistema completo de i.l.r. de funciones del espacio E_R, siendo analíticas todas las funciones asociadas $\{\omega_n(\zeta)\}$ para $|\zeta| \geqslant l$, donde $0 \leqslant l < R$. Entonces el sistema $\{f_n(z)\}$ también es completo y es un sistema de i.l.r. para cualquier E_r, $l \leqslant r < R$. En efecto, es obvio que se conserva la complitud, independientemente de las hipótesis que se hagan respecto de $\{\omega_n(\zeta)\}$ para todos los E_r, $r < R$. En cuanto a la propiedad de i.l.r., ésta se deduce de las relaciones

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{R>|\zeta|=\rho>l} \omega_n(\zeta) f_m(\zeta)\, d\zeta = \delta_{nm}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots; \; m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Supongamos además que se verifica el desarrollo

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_0^\infty \omega_n(\zeta) f_n(z)$$

uniformemente para $|\zeta| \geqslant \rho$, $|z| \leqslant r$, donde ρ y r es cualquier par de números que satisfaga a las relaciones $0 < r < R$, $\rho > > \max(r, l)$. Entonces $\{f_n(z)\}$ es una base para cualquier E_r, $l < r \leqslant R$. (En este caso diremos que $\{f_n(z)\}$ es una b a s e p r o l o n g a b l e (h a c i a e l i n t e r i o r) d e E_R) En efecto, para $f(z) \in E_r$ siendo $|z| \leqslant r' \leqslant r$, se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{r>|\zeta|=\rho'>\max(l, r')} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho'} \sum_0^\infty \omega_n(\zeta) f_n(z) f(\zeta)\, d\zeta = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho'} f(\zeta)\, \omega_n(\zeta)\, d\zeta\right) f_n(z),$$

ésto es el desarrollo, uniformemente convergente, de $f(z)$ según las funciones $\{f_n(z)\}$. La unicidad del desarrollo es consecuencia de la i.l.r. del sistema.

Recíprocamente, supongamos que $\{f_n(z)\}$ es un sistema de funciones de E_R que es una base para todos los espacios E_r, $0 \leqslant l < r \leqslant R$. Entonces, éste es completo y posee la propiedad de i.l.r. para cada uno de estos espacios. Además, según el teorema VII, se verifican los desarrollos

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_0^\infty \omega_{r,n}(\zeta) \cdot f_n(z),$$

los cuales son uniformemente convergentes para $|\zeta| \geqslant r$ y $|z| \leqslant r' < r$. Comparando los dos desarrollos

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{0}^{\infty} \omega_{r,n}(\zeta) f_n(z) \quad \text{y} \quad \frac{1}{\zeta - z} = \sum_{0}^{\infty} \omega_{R,n}(\zeta) f_n(z)$$

para $|\zeta| \geqslant R$ y $|z| < R$, nos convencemos, en virtud de la propiedad de i.l.r. del sistema $\{f_n(z)\}$, que

$$\omega_{r,n}(\zeta) = \omega_{R,n}(\zeta) = \omega_n(\zeta) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots; \ l < r \leqslant R),$$

de donde se deduce ahora que todas las funciones $\omega_n(\zeta)$ son analíticas para $|\zeta| > l$ (pues las funciones $\omega_{r,n}(\zeta)$ son analíticas para $|\zeta| > l_{r,n}$, donde $l_{r,n} < r$). Confrontando lo dicho, obtenemos el teorema:

Teorema VIII. *Para que un sistema de funciones $\{f_n(z)\}$ del espacio E_R sea una base para cada uno de los espacios E_r, $l < r \leqslant R$, es necesario y suficiente que:*

(α) *sea un sistema completo de i.l.r. del espacio E_R;*

(β) *las funciones asociadas $\{\omega_n(\zeta)\}$ sean analíticas para $|\zeta| > 1$;*

(γ) *se verifique el desarrollo $\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{0}^{\infty} \omega_n(\zeta) f_n(z)$, y éste sea uniformemente convergente para $|z| \leqslant r$, $|\zeta| \geqslant \rho$, donde r y ρ son números cualesquiera que satisfagan a las condiciones: $0 < r < R$, $\rho > \max(r, l)$.*

9. Si $f_n(z)$ *es un polinomio de grado* n (¡exactamente!) $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, en el enunciado de las condiciones suficientes se puede no exigir que la suma de la serie uniformemente convergente $\sum_{0}^{\infty} \omega_n(\zeta) f_n(z)$ sea igual a $\frac{1}{\zeta - z}$. En efecto, en el caso particular considerado

$$z^j = \sum_{n=0}^{j} l_n^{(j)} f_j(z) \qquad (l_n^{(j)} = 0 \quad \text{para} \quad n > j)$$

y por consiguiente, según el teorema de Weierstrass de la serie doble de potencias, se tiene:

$$\sum_{0}^{\infty} \omega_n(\zeta) f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{l_n^{(j)} f_n(z)}{\zeta^{j+1}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta^{j+1}} \sum_{0}^{\infty} l_n^{(j)} f_n(z) \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\zeta^{j+1}} = \frac{1}{\zeta - z}.$$

Como ilustración sencilla al teorema VIII, consideremos el sistema $\{f_n(z) = 1 + \ldots + z^n\}$ en el espacio E_R, $R > 1$. Este es un sistema completo de funciones. Para comprobar la i.l.r., construimos el sistema biortogonal de funcionales

$$L_n(f) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Aquí las funciones asociadas tienen la forma

$$\omega_n(\zeta) = L_n\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) = \frac{1}{\zeta^{n+1}} - \frac{1}{\zeta^{n+2}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Estas son analíticas para $|\zeta| > 0$ y, en todo caso, fuera del círculo unidad. Finalmente, la serie $\sum_0^\infty \omega_n(\zeta) f_n(z)$ se puede escribir en la forma

$$\sum_0^\infty \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \frac{\zeta - 1}{\zeta^{n+2}}.$$

Evidentemente, esta serie es uniformemente convergente para $|z| \leqslant r$, $|\zeta| \geqslant \rho$, donde $\rho > \max(r, 1)$.

Debido a la observación de este apartado, se puede no comprobar que la suma de la serie es igual a $\frac{1}{\zeta - z}$. En resumen, el sistema $\{1 + z + \ldots + z^n\}$ es una base para cualquier E_r, $r > 1$.

Obsérvese que en este ejemplo la serie $\sum_0^\infty \omega_n f_n(z)$ es divergente para $|\zeta| = 1$, $\zeta \neq 1$, $|z| \leqslant r' < 1$. Por esto, en virtud del teorema VIII, el sistema $\{1 + z + \ldots + z^n\}$ no puede ser una base para E_1. Esta deja de ser aquí incluso una base en el sentido amplio de la palabra, puesto que $L_n\left(\frac{1}{1-z}\right) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Claro, este sistema conserva la complitud y la propiedad de i.l.r. en cualquier espacio E_r, $0 < r < \infty$.

10. Sea $\{f_n(z)\}$ un sistema completo de i.l.r. para todos los E_r, $l < r \leqslant R$. Estas condiciones equivalen a que $\{f_n(z)\}$ es un sistema completo de i.l.r. para E_R y que todas las funciones asociadas $\{\omega_n(\zeta)\}$ son analíticas para $|\zeta| > l$. Las funciones analíticas en el recinto $|\zeta| > l$, que se anulan en el punto del infinito, forman un espacio $\widetilde{E}_l$ de tipo F. Es evidente que

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l < |\zeta| = \rho < R} F(\zeta) f_n(\zeta)\, d\zeta = \widetilde{L}_n(F) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

representan funcionales lineales en $\widetilde{E}_l$, que son biortogonales con $\{\omega_n(\zeta)\}$. De aquí se deduce que $\{\omega_n(\zeta)\}$ representa un sistema de

i.l.r. en $\widetilde{E}_l$ (e incluso en cada espacio $\widetilde{E}_\rho$, $l \leqslant \rho < R$). Si es que las funciones $\{f_n(z)\}$ forman además una base en E_r, $l < r \leqslant R$, es decir, si se verifica el desarrollo

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_0^\infty \omega_n(\zeta) f_n(z)$$

uniformemente para $|z| \leqslant r$, $|\zeta| \geqslant \rho$, $0 < r < R$, $\max(l, r) > \rho$, entonces $\{\omega_n(\zeta)\}$ también forma una base en cada $\widetilde{E}_\rho$, $l \leqslant \rho < R$, lo cual se deduce inmediatamente de la representación de la función $F(z) \in \widetilde{E}_\rho$ por la integral de Cauchy:

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\rho < |z| = \rho' < R} \frac{F(z)\,dz}{\zeta - z} = \sum_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = \rho'} F(z) f_n(z)\,dz\, \omega_n(\zeta).$$

En particular, supongamos que las funciones $\{f_n(z)\}$, que forman una base prolongable (hacia el interior) de E_R, tienen la forma

$$f_n(z) = z^n + a_n^{(1)} z^{n+1} + \ldots = z^n \varphi_n(z),$$

donde $\varphi_n(z)$ son unas funciones analíticas en el círculo unidad que satisfacen a las condiciones $\varphi_n(0) = 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Entonces, fácilmente se comprueba que las funciones asociadas $\{\omega_n(\zeta)\}$ tienen la forma

$$\omega_n(\zeta) = \frac{1}{\zeta^{n+1}} + \frac{\alpha_n^{(1)}}{\zeta^n} + \ldots + \frac{\alpha_n^{(n)}}{\zeta} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

En virtud de lo expuesto anteriormente, las funciones $\{f_n(z)\}$ forman una base para E_r $(l < r \leqslant R)$ cuando, y sólo cuando, las funciones $\{\omega_n(\zeta)\}$ forman una base de $\widetilde{E}_\rho$ $(l \leqslant \rho < R)$. Pero, sustituyendo ζ por $\frac{1}{z}$ y haciendo $\omega_n\left(\frac{1}{z}\right) = \varphi_{n+1}(z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ y $1 = \varphi_0(z)$, nos convencemos de que el problema de la búsqueda de todas las bases prolongables del espacio E_R que tienen la forma $\{f_n(z) = z^n + a_n^{(1)} z^{n+1} + \ldots\}$, es equivalente al problema de la búsqueda de todas las bases prolongables del espacio E_r $\left(r > \frac{1}{R}\right)$ que tienen la forma

$$\{\varphi_n(z) = z^{n+1} + \alpha_n^{(1)} z^n + \ldots + \alpha_n^n\}.$$

11. Detengámonos en la condición de unicidad que figura en la definición de base (en el sentido amplio y estricto de la palabra). Sea $\{f_n(z)\}$ un sistema completo de i.l.r. de E_R y sea $\{L_n\}$ el sistema de funcionales lineales que es biortogonal con $\{f_n(z)\}$. La condición

mencionada de unicidad consiste en que de $L_n(f) = 0$ y $f(z) \in E_R$ tiene que desprenderse que $f(z) \equiv 0$.

En particular, esto tiene que verificarse para las funciones que pertenecen a $E_{R'}$, $R' > R$. Pero la función $f(z) \in E_{R'}$, $R' > R$, se engendra de $\frac{1}{\zeta - z}$ por cierto funcional lineal definido en $\widetilde{E}_R$. Por ello, según el teorema I, la condición de unicidad puede cumplirse solamente con la condición de que el sistema de funciones $\underset{z}{L_n}\left(\frac{1}{\zeta - z}\right) = \omega_n(\zeta)$ sea completo en el espacio $\widetilde{E}_R$. Obsérvese que *a priori* no hay razones para afirmar que la complitud de $\{\omega_n(\zeta)\}$ en $\widetilde{E}_R$ es suficiente para que el sistema $\{L_n\}$ posea la propiedad de unicidad en E_R. En efecto, según el teorema I, la unicidad queda garantizada solamente con respecto a la clase O de las funciones engendradas de $\frac{1}{\zeta - z}$ mediante las funcionales definidas en $\widetilde{E}_R$; aquí, la clase O coincide con el conjunto de todas las funciones analíticas en el círculo cerrado $|z| \leqslant R$. Un ejemplo sencillo confirma que la complitud de $\{\omega_n(\zeta)\}$ en $\widetilde{E}_R$ no es suficiente para que el sistema $\{L_n\}$ posee la propiedad de unicidad en E_R. Sea $f_n(z) = 1 + \ldots + z^n$ y $R = 1$. Aquí

$$L_n(f) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}, \qquad \omega_n(\zeta) = \frac{1}{\zeta^{n+1}} - \frac{1}{\zeta^{n+2}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y el sistema $\{\omega_n(z)\}$ es completo en $\widetilde{E}_1$ (en efecto,

$$\frac{1}{\zeta^{n+2}} = \left(\frac{1}{\zeta^{n+1}} - \frac{1}{\zeta^{n+2}}\right) + \left(\frac{1}{\zeta^{n+2}} - \frac{1}{\zeta^{n+3}}\right) + \ldots, \ |\zeta| > 1\Big) .$$

Sin embargo, las funcionales $\{L_n\}$ no poseen la propiedad de unicidad en E_1; de la condición $L_n(f) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ solamente se deduce que $f(z) = \frac{c}{1 - z}$.

Por el teorema I, resulta una condición suficiente para la unicidad en E_R (e incluso para la unicidad en E_r, $l < r \leqslant R$), si se supone que las funciones $\{\omega_n(\zeta)\}$ son analíticas para $|\zeta| > l$, $l < R$, y que el sistema $\{\omega_n(\zeta)\}$ es completo en $\widetilde{E}_l$. Resumiendo, obtenemos la proposición siguiente:

Teorema IX. *Para que un sistema de funcionales lineales $\{L_n\}$, que sea biortogonal con el sistema de funciones $\{f_n(z)\} \subset E_R$, posea la propiedad de unicidad en E_R, es necesario (aunque no suficiente) que el sistema de funciones asociadas $\{\omega_n(\zeta)\}$ sea completo en $\widetilde{E}_R$. Si el sistema $\{\omega_n(\zeta)\}$ es completo en $\widetilde{E}_l$, $0 \leqslant l < R$, entonces el sistema $\{L_n\}$ posee la propiedad de unicidad en cada E_r, $l < r \leqslant R$.*

12. De lo expuesto en los ap. 10 y 11 se deduce que si $\{f_n(z)\}$ es una base en el sentido amplio de la palabra para cada E_r, $l < r \leqslant R$, entonces el sistema de funciones asociadas $\{\omega_n(\zeta)\}$ es una base en el sentido amplio de la palabra para $\widetilde{E}_r$, $l \leqslant r < R$. En efecto, el cumplimiento de la condición indicada significa ante todo que $\{f_n(z)\}$ es un sistema completo de i.l.r. para cada E_r, $l < r \leqslant R$; por esta razón, $\{\omega_n(\zeta)\}$ es un sistema de i.l.r. para todos los E_r, $l \leqslant r < R$. Por otra parte, siendo $\{f_n(z)\}$ una base en el sentido amplio de la palabra, resulta que el sistema de funcionales lineales $\{L_n\}$, que es biortogonal con $\{f_n(z)\}$, posee la propiedad de unicidad para E_r, $l \leqslant r < R$; por esto (teorema IX) el sistema $\{\omega_n(\zeta)\}$ es completo en $\widetilde{E}_r$, $l \leqslant r < R$. Finalmente, como el sistema $\{f_n(z)\}$ es completo en E_r, $l < r \leqslant R$, del mismo teorema IX (en el cual se pueden cambiar de sitio los sistemas $\{f_n(z)\}$ y $\{\omega_n(\zeta)\}$) se deduce que el sistema de funcionales lineales $\{\Lambda_n\}$, definidos en $\widetilde{E}_r$ ($l \leqslant r < R$) y biortogonales con $\{\omega_n(\zeta)\}$, posee la propiedad de unicidad para cada $\widetilde{E}_r$ ($l \leqslant r < R$).

En todos estos razonamientos $\{\omega_n(\zeta)\}$ y $\{f_n(z)\}$ pueden cambiarse de sitio (puesto que la propiedad de asociación es recíproca).

En particular, la relación establecida aquí permite demostrar la proposición siguiente:

Teorema X. *Supongamos que* $F(z) = z + c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots$ $\ldots (|z| > l)$ *y*

$$\varphi(z) = 1 + \frac{d_1}{z} + \frac{d_2}{z^2} + \ldots (|z| > l)$$

son funciones que no se anulan, y sean

$$p_n(z) = z^n + \alpha_1^{(n)} z^{n+1} + \ldots + \alpha_n^{(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

los polinomios que representan los conjuntos de los términos de potencias con exponentes no negativos en los desarrollos de Laurent de las funciones $\frac{[F(z)]^n F'(z)}{\varphi(z)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *(en un entorno del punto* $z = \infty$*). Para que el sistema* $\{p_n(z)\}$ *sea una base en el sentido amplio de la palabra para cada uno de los espacios* E_r, $r > l$, *es necesario y suficiente que* $F(z)$ *sea univalente en el recinto* $|z| > l$.

Demostración. Obsérvese primero que los polinomios $\{p_n(z)\}$ representan un sistema de i.l.r. en E_r, $r > l$, y que las funciones asociadas con ellos tienen la forma $\omega_n(z) = \frac{\varphi(z)}{[F(z)]^{n+1}}$. En efecto, haciendo la notación

$$\frac{[F(z)]^n F'(z)}{\varphi(z)} - p_n(z) = \Delta_n(z) = \frac{\delta_1}{z} + \frac{\delta_2}{z^2} + \ldots \qquad (|z| > l),$$

obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho>l}\omega_n(z)\,p_m(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho>l}\omega_n(z)\,[p_m(z)+\Delta_m(z)]\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho>l}\frac{\varphi(z)}{[F(z)]^{n+1}}\,\frac{[F(z)]^m\cdot F'(z)}{\varphi(z)}\,dz=\delta_{nm}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (*)$$

de donde se deduce lo que se afirmaba. Si $\{p_n(z)\}$ es una base en el sentido amplio de la palabra en cada E_r, $r > l$, entonces, según lo anterior, $\{\omega_n(z)\}$ también es una base en el sentido amplio de la palabra para cada $\tilde{E}_r$, $r \geqslant l$. Pero si se supone que $F(z_1) = F(z_2)$, $|z_1| > l$, $|z_2| > l$, $z_1 \neq z_2$, es decir, que $F(z)$ no es univalente en el recinto $|z| > l$, entonces, cualquier función $\psi(z)$ que pertenezca a la cápsula lineal cerrada de $\left\{\omega_n(z) = \frac{\varphi(z)}{[F(z)]^{n+1}}\right\}$, tiene que satisfacer a la condición $\psi(z_1):\psi(z_2) = \varphi(z_1):\varphi(z_2)$. Esto contradice a la propiedad de complitud del sistema $\{\omega_n(z)\}$ en el espacio $\tilde{E}_l$. Así, pues, queda demostrada la condición necesaria del teorema.

Para demostrar que es suficiente, supongamos que $F(z)$ es univalente en el recinto $|z| > l$.

Demostremos primero que el sistema $\left\{\omega_n(z) = \frac{\varphi(z)}{[F(z)]^{n+1}}\right\}$ es completo en $\tilde{E}_l$ (y, por consiguiente, en cualquier $\tilde{E}_r$, $r > l$); efectuemos para esto la transformación $z = F^{-1}(w)$. Esta transforma $|z| > l$ en cierto recinto simplemente conexo G que contiene al punto $w = \infty$, a las funciones $\{\omega_n(z)\}$ las transforma en las funciones $\left\{\frac{\varphi[F^{-1}(w)]}{w^{n+1}}\right\}$ y al espacio $\tilde{E}_l$, en el espacio de las funciones que son analíticas en G y que se anulan en el punto $w = \infty$. Como el sistema $\left\{\frac{\varphi[F^{-1}(w)]}{w^{n+1}}\right\}$ es completo en el espacio transformado (según el teorema de Runge), el sistema inicial $\{\omega_n(z)\}$ es completo en $\tilde{E}_l$; la i.l.r. de este sistema es consecuencia de las relaciones de biortogonalidad (*), las cuales muestran que el sistema $\{\omega_n(z)\}$ es asociado con $\{f_n(z)\}$. Finalmente, la propiedad de unicidad de las funcionales que son biortogonales con $\{\omega_n(z)\}$ (en cada $\tilde{E}_r$, $r \geqslant l$), se deduce (según el teorema IX) de la complitud del sistema de funciones asociadas $\{p_n(z) = (z)^n + \alpha_1^{(n)}z^{n-1} + \ldots + \alpha_n^{(n)}\}$ (en cada E_r). En resumen, el sistema $\{\omega_n(z)\}$ es una base en el sentido amplio de la palabra para cada E_r, $r > l$. La condición suficiente del teorema queda demostrada.

BIBLIOGRAFIA PARA EL SEGUNDO TOMO*)

I OBRAS DE CARACTER GENERAL

1. M a n d e l b r o j t S., Séries adhérentes. Régularisation des suites. Applications Gauthier-Villars, Paris, 1952.
2. P ó l y a G. und S z e g ö G., Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, II b. Berlin, Verlag von Julius Springer, 1925.
3. S t o ï l o w S., Teoria functiilor de o variabila complexa, vol. II, Ed. Acad. R.P.R., 1958.
4. B i e b e r b a c h L., Lehrbuch der Funktionentheorie, B. II, Moderne Funktionentheorie, Leipzig — Berlin, 1927.
5. C a r a t h e o d o r y C., Funktionentheorie, B. II, Basel, 1950.
6. C a r a t h e o d o r y C o n s t a n t i n, Gesammelte Mathematische Schriften, Herausgegeben im Auftrag und mit Unterstützung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Dritter Band, München, 1955; Vierter Band, München, 1956.
7. J u l i a G., Principes géométriques d'analyse, t. II, Paris, 1932.
8. M i l l o u x H., Principes. Méthodes générales, t. I, F. II Traité de théorie des fonctions publié sous la direction de M. Gaston Gulia, Paris, 1956.
9. M o n t e l P a u l, Selecta, 1897—1947, Cinquantenaire scientifique de M. Paul Montel, Paris, 1947.
10. S t o ï l o w S., Oeuvre mathématique, Bucuresti, 1964.

II. MONOGRAFIAS SOBRE CUESTIONES PARTICULARES

A. Funciones univalentes y multivalentes.

Transformaciones conformes

1. Г о л у з и н Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, изд. 2., М., 1966 (G o l u z i n G. M., Teoría geométrica de las funciones de variable compleja).
2. J e n k i n s J. A., Univalent functions and conformal mapping, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
3. C o u r a n t R., Dirichlet's Principle, Conformal mapping and Minimal Surfaces, New-York; Intersc. Public., 1950.

*) Aquí faltan los artículos de las revistas. No obstante muchos de los libros que se nombran a continuación contienen unos índices bibliográficos suficientemente detallados. Nuestro objetivo es recomendar al lector obras que le permitan profundizar más el tema. Junto con las monografías más recientes en los sentidos correspondientes, indicamos no pocas obras de carácter clásico, cuya lectura también es interesante e instructiva para un matemático contemporáneo.

4. Лаврентьев М. А., Конформные отображения с приложениями к некоторым вопросам механики, М.—Л., 1946 (Lavréntiev M. A., Transformaciones conformes y sus aplicaciones a ciertos problemas de la mecánica).
5. Hayman W. K., Multivalent functions, Cambridge University Press, 1958.
6. Julia G., Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes, Paris, 1931.
7. Julia G., Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes, Paris, 1934.

B. Transformaciones casi-conformes

1. Волковыский Л. И., Квазиконформные отображения, Львов, (Volkoviski L. I., Transformaciones casi-conformes).
2. Künzi H. P., Quasikonforme Abbildungen, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1960.
3. Lehto O. und Virtanen K. I., Quasikonforme Abbildungen, Berlin — Heidelberg — New York.

C. Funciones armónicas y subarmónicas

1. Brelot M., Elements de la theorie classique du potentiel, 3e édition (1965), Centre de documentation universitaire, Paris.
2. Ландкоф Н. С., Основы современной теории потенциала, М., 1966 (Landkof N. S. Fundamentos de la teoría moderna del potencial).
3. Привалов И. И., Субгармонические функции, М.—Л., 1937 (Priválov I. I., Funciones subarmónicas).

D. Funciones analíticas uniformes. Distribución de los valores. Propiedades límites

1. Wittich H., Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen, Springer, Berlin, 1955.
2. Голубев В. В., Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, М., 1961 (Gólubiev V. V., Funciones analíticas uniformes. Funciones automorfas).
3. Джрбашян М. М., Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., 1966. (Dzhrbashián M. M., Transformaciones integrales y representación de las funciones en el plano complejo).
4. Евграфов М. А., Асимптотические оценки и целые функции, М., 1962 (Evgráfov M. A., Acotaciones asintóticas y funciones enteras).
5. Ибрагимов И. И., Экстремальные свойства целых функций конечной степени, Баку, 1962 (Ibraguímov I. I., Propiedades extremales de las funciones enteras de grado finito).
6. Левин Б. Я., Распределение корней целых функций, М., 1956 (Levin B. Y., Distribución de las raíces de las funciones enteras).
7. Mac-Lane G. R., Asymptotic values of holomorphic functions, William Marsh Rice University, Houston 1, Texas, 1963.
8. Nevanlinna R. Eindeutige analytische Funktionen, Springer, Berlin; 2a ed., 1953.
9. Noshiro K., Cluster sets, Springer-Verlag, Berlin-Göttinger-Heidelberg, 1960.
10. Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, М.—Л., 1950 (Priválov I. I. Propiedades frontera de las funciones analíticas).

11. Чеботарев Н. Г. и Мейман Н. Н., Проблема Рауса — Гурвица для полиномов и целых функций, М.—Л., 1949 (Chebotariov N. G. y Meyman N. N., El problema de Rauss—Hurwitz para los polinomios y las funciones enteras).
12. Cartwright M. L., Integralfunctions, Cambrige, 1956.
13. Nevanlinna R., Le théorème de Picard — Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929.

E. Funciones elípticas y automorfas

1. Ахиезер Н. И., Элементы теории эллиптических функций, М.—Л., 1948 (Ajieser N. I., Elementos de la teoría de las funciones elípticas).
2. Hurwitz A., Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, Berlin, 1929.
3. Whittaker E. T. and Watson G. N., A course of modern analysis t. II, Cambridge at the University press, 1927.
4. Appell P. et Lacour E., Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications, 2 éd., Paris, 1922.
5. Schwarz H. A., Formeln und Lehrzätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass, 2 Aufl., Erster Th., Berlin, 1893.

F. Superficies de Riemann. Funciones algebraicas y automorfas

1. Nevanlinna R., Uniformisierung, Springer, Berlin, 1953.
2. Riemann B., Euvres.
3. Springer G., Introduction to Riemann surfaces, Addison — Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, USA.
4. Ford L. R. Automophic Functions, 1929.
5. Чеботарев Н. Г., Теория алгебраических функций, М.—Л., (Chebotariov N. G., Teoría de las funciones algebraicas).
6. Chevalley C., Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, American Mathematical Society, New York, 1951.
7. Schiffer M. and Spencer D. S., Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1954.
8. Appell P. et Gorsat E., Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, t. I. Etude des fonctions analytiques sur une surface de Rieman, 2 éd., Paris 1929; Théorie des fonctions algébriques d'une variable et des transcendantes quis'y rattachent, t. II, Fontions automorphes, par Pierre Faton, 2 éd., Paris, 1930.
9. Klein F., Gesammelte Mathematische Abhandlungen. Dritter Band. Elliptische Funktionen, insbesondere Modulfunktionen, Hyperelliptische und Abelsche Funktionen, Riemannsche Funktionentheorie und Automorphe Funktionen, Berlin, 1923.
10. Pfluger A., Theorie der Riemannschen Flächen, Berlin — Göttingen—Heidelberg, 1957.
11. Weyl H., *Die Idee der Riemannschen Fläche*, 3 Aufl., Stuttgart, 1955.

INDICE ALFABETICO

BETEJTIN A.

Curso de mineralogía

El académico Anatoli Betejtin, un notable hombre de ciencia, en su manual dedicado al estudio de los cristales, considera con plenitud y claridad las nociones contemporáneas sobre las propiedades físicas y químicas de los minerales; se estudia su ligazón mutua con su composición y estructura cristalina.

El autor investiga la naturaleza de la combinación de los minerales y el carácter sucesivo de su formación compleja en menas y rocas, enseña el empleo de esta naturaleza en la búsqueda y prospección geológica de los yacimientos de minerales.

La obra se dota de una lista de minerales según los principales elementos incorporados.

El «Curso de mineralogía» ha sido empleado por generaciones enteras de geólogos soviéticos y es de gran utilidad para los estudiantes de facultades de investigación geológica. Su valor cognoscitivo y científico lo hace muy útil para las personas que se interesan por la mineralogía como ciencia.

La obra ha sido reeditada en ruso y traducida al español, inglés y francés.

Formato 16,8 × 26,2 cm. Encuadernado en tela con sobrecubierta, 840 págs. con 390 figuras.